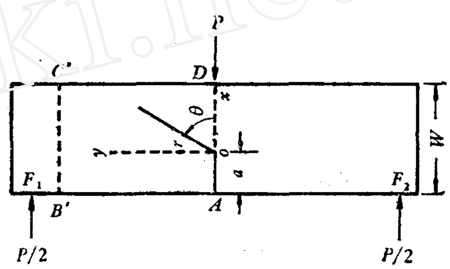
三点弯曲断裂韧度试样的应力强度因子 K_{I}*

钢铁研究院 陈 篪

近十几年来断裂力学有了很快的发展，断裂韧度已成为结构材料的重要性能，它对评价质量、合理选材和安全设计都有相当大的意义[1]．为了把断裂力学的原理用于实际，以及为了测试材料的断裂韧度值，都需要知道相应条件下裂纹尖端的应力强度因子 K_{I}．因此，K_{I} 的计算是断裂力学的重要内容．

三点弯曲试样是测定断裂韧度时广泛应用的一种试样．文献[2,3,7]中已经有 $S/W=4$，$S/W=8$ 时的 K_{I}（图 1）．在实际工作当中，$S/W=3$—5 的试样是常常用到的．本文介绍用边界配位法对 $S/W=3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$ 和 8.0 这六种情况所得的 K_{I}，引入 $S/W=8.0$ 的 K_{I} 值是为了和文献[2]的 K_{I} 值进行对比．



$F_1F_2=S$ $AB'=S'/2$

图 1 试样和坐标系统

一、计算方法

边界配位法在文献[5, 6, 10]等中已有详细叙述，这里只简单地写出其基本方程．

图 1 中 AO 为裂纹，O 点是裂纹的尖端，取为极坐标 (r, θ) 的原点．文献[4]指出：满足双调和方程

$$\nabla^2\nabla^2\chi=0 \tag{1}$$

而又能使 $\sigma_{\theta\theta}$ 及 $\sigma_{r\theta}$ 在裂纹面上 $(\theta=\pm\pi)$ 为 0 的对称解是

$$\chi=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\cdot r^{\frac{j}{2}+1}\left\{-\cos\left(\frac{j}{2}-1\right)\theta+\frac{\frac{1}{2}j+(-1)^j}{\frac{1}{2}j+1}\cos\left(\frac{j}{2}+1\right)\theta\right\} \tag{2}$$

式(2)右端诸 c_j 为任意常数．

引入无量纲数

$$x_j=Bc_jW^{\frac{j}{2}}/P \tag{3}$$

式(2)即可写成

$$\chi=\frac{PW}{B}\sum_{j=1}^{\infty}x_j\left(\frac{r}{W}\right)^{\frac{j}{2}+1}\left\{-\cos\left(\frac{j}{2}-1\right)\theta+\frac{\frac{1}{2}j+(-1)^j}{\frac{1}{2}j+1}\cos\left(\frac{j}{2}+1\right)\theta\right\} \tag{4}$$

---

* 1973 年 12 月 19 日收到．

从而

$$\frac{\partial \chi}{\partial s}=\frac{P}{B}\sum_{j=1}^{\infty} x_j\left(\frac{r}{W}\right)^{\frac{j}{2}}\left\{-\cos\left[\frac{j}{2}\theta-\omega\right]-\frac{j}{2}\cos\left[\left(\frac{j}{2}-2\right)\theta+\omega\right]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{j}{2}+(-1)^j\right]\cos\left[\frac{j}{2}\theta+\omega\right]\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{yy}&=\frac{P}{BW}\sum_{j=1}^{\infty} x_j\left(\frac{r}{W}\right)^{\frac{j}{2}-1}\frac{j}{2}\left\{\left[\frac{j}{2}-2+(-1)^j\right]\cos\left(\frac{j}{2}-1\right)\theta\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{j}{2}-1\right)\cos\left(\frac{j}{2}-3\right)\theta\right\}\\
\sigma_{xx}&=\frac{P}{BW}\sum_{j=1}^{\infty} x_j\left(\frac{r}{W}\right)^{\frac{j}{2}-1}\frac{j}{2}\left\{-\left[\frac{j}{2}+2+(-1)^j\right]\cos\left(\frac{j}{2}-1\right)\theta\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{j}{2}-1\right)\cos\left(\frac{j}{2}-3\right)\theta\right\}\\
\sigma_{xy}&=\frac{P}{BW}\sum_{j=1}^{\infty} x_j\left(\frac{r}{W}\right)^{\frac{j}{2}-1}\frac{j}{2}\left\{\left[\frac{j}{2}+(-1)^j\right]\sin\left(\frac{j}{2}-1\right)\theta\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{j}{2}-1\right)\sin\left(\frac{j}{2}-3\right)\theta\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$K_{\mathrm{I}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{2\pi x}\,\sigma_{yy}(x,0)=-C_1\sqrt{2\pi} \tag{7}$$

$$K_{\mathrm{I}}B(\sqrt{W})^3/M=-x_1\sqrt{2\pi}\left(\frac{4W}{S}\right) \tag{8}$$

其中 ω 是 s 和 x 轴之间的夹角，$M=\frac{1}{4}PS$ 是弯曲力矩.

式(8)左右端都是无量纲数,所以很适合于整理和表达结果.

边界条件可以有几种不同的表达方法，可以用应力表达；可以用 χ 和 $\partial\chi/\partial n$ 表达，n 是计算边界的外向法线；也可以用 $\partial\chi/\partial n$ 和 $\partial\chi/\partial t$ 表达，t 是计算边界的切线. 由于边界配位法中所得的艾雷应力函数 χ 并非严格解，它不是在整个边界上而只是在有限的配位点满足边界条件,所以上述的几种表达就不是等效的. 文献[5]曾对 $(\chi, \partial\chi/\partial n)$ 表达和 $(\partial\chi/\partial n, \partial\chi/\partial t)$ 表达作了对比，指出 $(\chi, \partial\chi/\partial n)$ 表达比 $(\partial\chi/\partial n, \partial\chi/\partial t)$ 表达要好，并猜测应力表达可能最差. 对这个问题不能认为已有定论，还需要作更多的理论分析和实际计算工作. 本文采用的是 $(\chi, \partial\chi/\partial n)$ 表达.

至于计算边界,则如图1所示，S' 可小于或等于 S. 文献[6]认为,由于 $B'C'$ 上的 χ 和 $\partial\chi/\partial n$ 是采用无裂纹时的解答,所以让 $B'C'$ 避开支撑点是有利的.

无裂纹时的 χ_0 是

$$\chi_0=-\frac{P}{B}\left(\frac{S}{2}-y\right)\left\{\left(\frac{x+a}{W}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{x+a}{W}\right)^2\right\} \tag{9}$$

在本文中,边界点在 AB', $C'D$ 上等距离配置,间距用 Δ 表示；在 $B'C'$ 上也是等距离配置,但步长和 Δ 一般是不同的.

二、计算结果和分析

1. Δ/W 的影响　对原始的计算数据加以分析可以看出，在同一个 S/W 值下，对

$K_I B(\sqrt{W})^3/M$ 的计算值影响较大的往往是 Δ/W,而 S'/W 的影响是次要的. 在 $\Delta/W = 0.19$—0.22 之间,结果比较稳定. 表 1 是 $S/W = 5$ 的部分结果,可作为典型的例子.

表 1 Δ/W 对 $K_I B(\sqrt{W})^3/M$ 计算值的影响($S/W = 5.0$, m 是边界配位点数)

a/W	$S'/W=3$			$S'/W=4$	$S'/W=5$
	$m=16$ $\Delta/W=0.250$	$m=18$ $\Delta/W=0.215$	$m=20$ $\Delta/W=0.188$	$m=20$ $\Delta/W=0.250$	$m=30$ $\Delta/W=0.208$
0.25	5.46	5.44	5.44	5.44	5.45
0.30	6.21	6.19	6.19	6.19	6.21
0.35	7.07	7.05	7.05	7.05	7.08
0.40	8.08	8.06	8.05	8.07	8.08
0.45	9.30	9.28	9.25	9.29	9.30
0.50	10.84	10.80	10.75	10.82	10.81
0.55	12.77	12.74	12.67	12.77	12.75
0.60	15.34	15.31	15.21	15.34	15.30
0.65	18.86	18.81	18.69	18.86	18.80
0.70	23.93	23.86	23.70	23.93	23.82
0.75	31.72	31.57	31.31	31.71	31.51

计算数据也表明,并不是 Δ/W 愈小结果愈精确. 当 $\Delta/W < 0.16$ 时,结果反而不好. 这种现象和计算机精度无关,可能与富里哀级数的特征有关.

2. 采用的 $K_I B(\sqrt{W})^3/M$ 值　边界配位法的缺点是不能预计误差,只能靠不同 m 时所得结果的相对稳定性来衡量可靠与否. 从我们得到的数据来看,$S'/W = 3$时,$m = 18$ 和 $m = 20$ 的结果符合得很好. 即使对于 $S/W = 3$ 的情况来说,相差也不超过 1%. $S/W = 4$,$m = 20$ 时的结果和文献[7]给出的符合得很好,相差仅千分之几. 在没有已知误差的解析结果以前,为了和现在广泛应用的文献[7]的值相一致,我们就采用 $S'/W = 3$, $m = 20$ 的结果($S/W = 8$ 除外,见表 2)汇总列于表 2.

表 2　$K_I B(\sqrt{W})^3/M$ 值

a/W	本工作						文献[2,3,7]	
	$S/W=3.0$	$S/W=3.5$	$S/W=4.0$	$S/W=4.5$	$S/W=5.0$	$S/W=8.0$ ($S'/W=4$)	$S/W=4.0$	$S/W=8.0$
0.25	5.25	5.32	5.37	5.41	5.44	5.56		5.55
0.30	5.98	6.05	6.11	6.15	6.19	6.33	6.08	6.31
0.35	6.80	6.89	6.95	7.01	7.05	7.20		7.18
0.40	7.76	7.86	7.94	8.00	8.05	8.22	7.91	8.18
0.45	8.94	9.05	9.13	9.20	9.25	9.45	9.12	9.41
0.50	10.41	10.53	10.62	10.69	10.75	10.98	10.6	10.94
0.55	12.32	12.44	12.54	12.61	12.67	12.93	12.6	12.89
0.60	14.84	14.97	15.07	15.15	15.21	15.50	15.1	15.41
0.65	18.32	18.46	18.55	18.63	18.69	19.01		
0.70	23.34	23.47	23.56	23.64	23.70	24.07	23.4	
0.75	31.02	31.14	31.22	31.29	31.31	31.83		

3. $K_I B(\sqrt{W})^3/M$ 的解析表达　在 K_I 的力学标定工作中,我们发现三点弯曲试样的柔度 C 相当好地符合下列关系[8]:

$$BEC = \alpha + \beta \tan^2\left(\frac{\pi a}{2W}\right) \tag{10}$$

借助于欧文-吉斯 (Irwin-Kies) 关系马上可以得到

$$K_I B(\sqrt{W})^3/M \propto \sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right)\sqrt{\tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \tag{11}$$

上式中的比例常数是一个随 S/W 缓慢变化的函数.

当然，式(10)和(11)不是精确公式而只是很好的近似公式，因此，$K_I B(\sqrt{W})^3/M$ 和 $\sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right)\sqrt{\tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)}$ 的比值 R 随 a/W 略有变化，其情况列于表 3.

表 3 $R = \frac{K_I B(\sqrt{W})^3}{M} : \sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right)\sqrt{\tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)}$ 之值

S/W \ a/W	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75
3.0	7.53	7.46	7.40	7.37	7.36	7.36	7.39	7.44	7.49	7.56	7.64
3.5	7.63	7.56	7.50	7.46	7.45	7.45	7.47	7.50	7.55	7.60	7.67
4.0	7.70	7.63	7.57	7.53	7.52	7.51	7.52	7.55	7.59	7.63	7.69
4.5	7.76	7.69	7.63	7.59	7.57	7.56	7.57	7.59	7.62	7.66	7.71
5.0	7.80	7.73	7.67	7.63	7.61	7.60	7.61	7.62	7.64	7.68	7.72
8.0	8.03	7.95	7.88	7.85	7.82	7.81	7.80	7.81	7.83	7.87	7.94

尤其是在实际上常用的范围 $0.4 \leqslant a/W \leqslant 0.6$ 内，对于给定的 S/W，比值变化很小，在 $S/W \geqslant 3.5$ 时此比值和平均值之差 $\leqslant 0.4\%$，在 $S/W = 3$ 时也 $< 1\%$.

在 $0.4 \leqslant a/W \leqslant 0.6$ 区间，可用

$$\frac{K_I B(\sqrt{W})^3}{M} = \left[7.31 + 0.21\sqrt{\frac{S}{W} - 2.9}\right]\sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right)\sqrt{\tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \tag{12}$$

来表达结果. 此结果比文献 [7] 的公式好，适用于不同的 $S/W(3 \leqslant S/W \leqslant 5)$.

顺便指出，根据科依特的理论结果[9]，$a/W \to 0$ 时，比值 $R \to 6\sqrt{2} \times 1.1215 = 9.51$，而在 $a/W \to 1$ 时，比值 $R \to 1.1215\,\pi^2/\sqrt{2} = 7.82$. 在整个 $0 \leqslant a/W \leqslant 1$ 区间内，比值 R 的变化是大的，但在一个相当大的区间内它是稳定的.

本工作是在史光洁和蔡大用同志的大力协助下完成的。

参 考 文 献

[1] Fracture Toughness Testing and Its Applications, ASTM STP No. 381.
[2] Brown, W. F., Srawley, J. E., Plane Strain Crack Toughness Testing of High Strength Metallic Materials, ASTM STP No. 410.
[3] Srawley, J. E., Gross, B., *Eng. Fract. Mech.*, **4** (1972), 587.
[4] Williams, M. L., *J. Appl. Mech.*, **24** (March 1957), 109.
[5] Wilson, W. K., *J. Bas. Eng.*, **93** (1971), 685.
[6] Gross, B., Srawley, J. E., *NASA TN* D-3092 (1965).
[7] Review of Developments in Plane Strain Fracture Toughness Testing, ASTM STP No. 463.
[8] 陈 篪、姚 蘅、金志英，科学通报，**19** (1974), 41.
[9] Mechanics of Fracture (Edit. G. C. Sih), Vol. 1, pp. 131—143.
[10] Srawley, J. E., Gross, B., *Mat. Res. Stand.*, **7** (1967), 155.