

在层状系统中半承压井非定常流^{*1)}

罗焕炎

(中国科学院地质研究所)

提 要

当层状油田或地下水库被弱渗透薄层所分割而层次之间具有水力联系之时,虽只在下层设置并过滤器并进行常流量的开采,由于下层压力的下降,除它本身的弹性补给以外,还有由上层通过薄夹层向下层的补给。本文针对这种串流现象进行了分析,近似地获得了影响半径及上下两层的压降值随时间变化的各表达式并用实测资料做了验证,文中提出的方法能作为合理井群布置及地层参数确定之用。

近十多年来,为了确定地层参数和合理布置井群,虽然对层次之间压力下降随时间和空间的变化规律进行了大量的研究,但是往往由于数学分析的困难,不是假设被影响的邻层的水头或压力不变^[1,2],就是把影响半径看成为定值^[1]或无限大^[3]而忽略了它们与时间的关系,致使计算结果与真实现象有出入,不能满足生产的要求。

本文针对上述缺点,尽量减少假设条件,寻求层次之间的压力随时间和空间变化的表达式,并利用野外实测资料验证所得结果的适用性和有效性。

一、基本微分方程及其近似解

在层状系统中,大多每层厚度不均一,且渗透性随处而异,特别在地下水方面,水平的常压面也不常见。目前还不能在这样复杂条件之下进行分析,仍须作出下面的几个假设:

1. Darcy 定律有效,包括在井壁附近。
2. 各层厚度均一,且为均质、各向同性介质。
3. 上下两层的初始水面和测压面一致且水平。

图1和图2所示的岩层结构和开采方式,所产生的流态应当是三维的,但因弱渗透薄

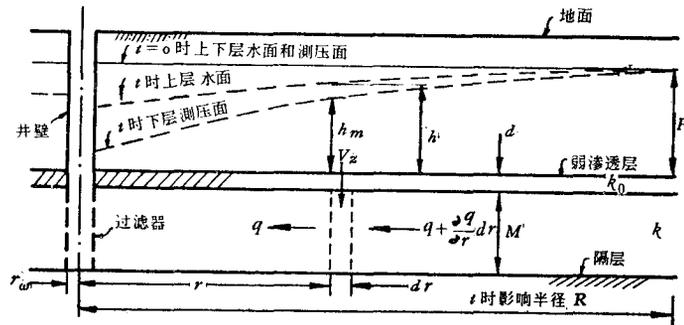


图1 当上层为非承压时串流示意图

* 1965年8月16日收到。

1) 本文曾在1965年3月第一届全国水文地质工程地质学术会议上提出,但内容有所删改。

层的渗透性较上下层次小得多,可以认为来自上层的流线在薄夹层内垂直向下,然后在接触面处成直角折射流向井方,所以能以理想的二维流代替三维流^[1].也可以取下层垂直断面上速度势的平均值,将三维流转化为二维流^[4,5].本文采用第二种方法,并按照通用的推导程序,建立微分方程式.在图1或图2中,若在下层取一个圆柱壳体,其内径为 r ,厚度为 dr ,且与井同轴,则通过内径和外径的流量分别为

$$q = 2\pi k M r \frac{\partial h_m}{\partial r}, \quad (1)$$

$$q + \frac{\partial q}{\partial r} dr = 2\pi k M \left[r \frac{\partial h_m}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h_m}{\partial r} \right) dr \right], \quad (2)$$

式中, k 为下层的渗透系数,并设为常数, M 为该层的厚度, h_m 为该层垂直断面上的平均速度势(即测压力),它是 r 和时间 t 的函数.

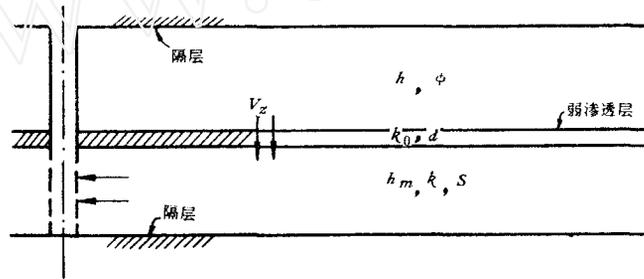


图2 当上下两层均为承压时串流示意图

此外,由上层流向此薄壳的垂直补给量为

$$q_v = V_z 2\pi r dr = 2\pi r \frac{k_0}{d} (h - h_m) dr, \quad (3)$$

式中, k_0 为弱渗透薄层的渗透系数,并设 $k_0 \ll k$, d 为该层的厚度, h 为该层上界的速度势,它也是 r 和 t 的函数.其实,在生产实践中,把它看成为水深或测压力,并无重大的差异.

由式(1),(2)和(3)得到流入和流出该壳体的流量差为

$$2\pi r \left[\frac{kM}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h_m}{\partial r} \right) + k_0 \frac{h - h_m}{d} \right] dr. \quad (4)$$

然而,在此壳体内,因下层速度势的变化所能放出的流量为

$$2\pi r S \frac{\partial h_m}{\partial t} dr, \quad (5)$$

式中, S 为在下层的单位体积内,因降低单位压头所能放出的储量和该层厚度 M 的乘积,被称为储量系数^[1],并设为常数.

根据质量守恒定律,式(4)和(5)必须相等,即

$$\frac{kM}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h_m}{\partial r} \right) + \frac{k_0}{d} (h - h_m) = S \frac{\partial h_m}{\partial t}. \quad (6)$$

这就是只在下层设置井过滤器而井流量为常数时,上下层相互影响并产生串流的关系表达式.

式(6)中的 h 也是 t 和 r 的函数, 不易获得它的分析解, 必须寻求近似解. 按照一般惯例^[4,5], 可将非定常过程的每一瞬间状态视为定常状态. 这种假设曾被验证, 认为相当准确^[6]. 本文也采用这个方法. 同时认为, 除开采初期以外, 在任一时间通过下层任一垂直断面的流量可设为

$$q = Q \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^c \right], \quad (7)$$

式中, Q 为井的常流量, 指数 c 大于 1, 而 R 为影响半径, 它随开采时间的增长而渐次地向外扩展. 对某一时刻而言, 当 $r = R$ 时, $q = 0$, 即无通过影响区外界的流入量; 当 $r = r_w$ (井半径) 时, $(r/R)^c \rightarrow 0$, 从而 $q = Q$. 于是式(7)表明, 由下层释放的弹性储量及由上层向下层补给的串流量之和随 r 值的加大而减少至零为止. 因为上下层压力之差以及下层压力的下降值也是随 r 而变小至零为止, 故从某一时刻各断面流量的变化看来, 式(7)与真实现象相似. 后面将利用实测资料来确定 c 值并说明式(7)的正确性.

将式(7)代入式(1), 采用边界条件: $r = R$ 时, $h_m = H$, 得

$$h_m = H - \frac{Q}{2\pi k M} \left(\ln \frac{R}{r} - \frac{1}{c} + \frac{r^c}{cR^c} \right). \quad (8)$$

此式为某一时刻的下层测压力分布方程, 其中 H 为上下层的起始水面或测压面的高程. 若能求得 R 与 t 的关系式, 即可利用式(8)计算 h_m 值.

根据 Leibnitz^[7] 的规则, 我们有

$$\frac{d}{dt} \int_{r_w}^R r h_m dr = \int_{r_w}^R r \frac{\partial h_m}{\partial t} dr + \frac{H}{2} \frac{dR^2}{dt}. \quad (9)$$

又由式(8), 考虑到 $R \gg r_w$, 近似地有

$$\begin{aligned} \int_{r_w}^R r h_m dr &\approx \frac{HR^2}{2} - \frac{Q}{2\pi k M} \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2c} \right) R^2 + \frac{R^2}{c(c+2)} \right] = \\ &= \left[\frac{H}{2} - \frac{cQ}{8(c+2)\pi k M} \right] R^2. \end{aligned} \quad (10)$$

另外, 由式(6), 考虑到

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h_m}{\partial r} \right|_R = 0, \quad k M r \left. \frac{\partial h_m}{\partial r} \right|_{r_w} = \frac{Q}{2\pi}, \quad \text{同样忽略 } r_w^2 \text{ 项, 有} \\ \int_{r_w}^R r \frac{\partial h_m}{\partial t} dr = -\frac{Q}{2\pi S} + \frac{k_0}{Sd} \left[\frac{\bar{h} R^2}{2} - \int_{r_w}^R r h_m dr \right], \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $\bar{h} = \frac{2}{R^2} \int_{r_w}^R r h dr$. 因为 $R \gg r_w$, 故 \bar{h} 相当于某一时刻的 R 范围内的 h 平均值, 它是 t 的函数. 将式(9)和(10)代入式(11), 得

$$\frac{cQ}{8(c+2)\pi k M} \frac{dR^2}{dt} = \frac{Q}{2\pi S} + \frac{K_0}{2Sd} \left[H - \bar{h} - \frac{cQ}{4(c+2)\pi k M} \right] R^2. \quad (12)$$

由连续方程可得

$$\dot{Q}t = \phi(H - \bar{h})\pi R^2 + 2\pi S \int_{r_w}^R r(H - h_m)dr, \quad (13)$$

式中 ϕ 为上层的有效孔隙度或储量系数, 并设为常数. 对式(13)进行积分并将式(10)代入, 也同样忽略 r_w^2 项, 得

$$\bar{h} = H - \frac{Qt}{\phi\pi R^2} + \frac{cSQ}{4(c+2)\phi\pi kM}.$$

此式表明 \bar{h} 与 t 和 R 的关系, 虽然 $t=0$ 时, $\bar{h} \neq H$, 但在生产实践中, 上式右端的最后一项往往比 H 小得多, 可忽略不计, 故近似地有

$$\bar{h} = H - \frac{Qt}{\phi\pi R^2}. \quad (14)$$

将式(14)代入(12), 得

$$\frac{dR^2}{dt} = \frac{4(c+2)kM}{cS} + \frac{4(c+2)k_0kM}{cS\phi d} t - \frac{k_0}{Sd} R^2. \quad (15)$$

上式表示影响半径 R 与时间 t 的关系, 式中其他符号均为常数或参变数, 故可利用解常微分方程式的方法求 R , 得

$$R^2 = \frac{4(c+2)kM}{c} \left[\frac{t}{\phi} + \frac{d}{k_0} (1 - e^{-k_0 t/Sd}) \right]. \quad (16)$$

将式(16)代入式(8), 即得任一时刻沿 r 方向的下层测压力分布; 如将它代入式(14), 便获得任一时刻上层的平均水深或测压力. 因此, 利用式(8), (14)和(16), 便能近似地预报上下两层的动态变化规律, 可作为确定地层参数和布置井群之用.

二、分析结果的验证与应用

我们一方面利用野外实测资料进行分析对比, 另一方面以简单自然条件的近似解与严格的分析解比较, 以说明本文假设条件的正确性.

(一) 指数 c 值的确定

在弱渗透薄夹层不存在而换以绝对隔层时, $k_0 = 0$, 即没有由上层向下层的补给量. 这时由式(15)可得

$$R = \sqrt{\frac{4(c+2)kMt}{cS}}. \quad (17)$$

将式(17)代入(8), 得

$$\frac{4\pi kM(H-h_m)}{Q} = \ln \frac{4(c+2)kMt}{cSr^2} - \frac{2}{c} + \frac{2r^c}{c \left[\frac{4(c+2)kMt}{cS} \right]^{c/2}}. \quad (18)$$

在没有外来补给而只有本身弹性储量补给的条件下, 承压完整井的下降值 $(H-h_m)$ 随时间变化的近似表达式便是式(18). 然而这种情况下的严格分析解^[8]为

$$\frac{4\pi kM(H-h_m)}{Q} = -0.5772 - \ln u + u - \frac{u^2}{2 \cdot 2!} + \frac{u^3}{3 \cdot 3!} - \dots, \quad (19)$$

式中 $u = \frac{r^2 S}{4kMt}$. 若 $\frac{r^2}{t} \ll \frac{4kM}{S}$, 则 $u \ll 1$. 一般认为 u 及其高次方项可忽略^[9], 故式(19)变为

$$\frac{4\pi kM(H-h_m)}{Q} = \ln \frac{4kMt}{Sr^2} - 0.5772. \quad (20)$$

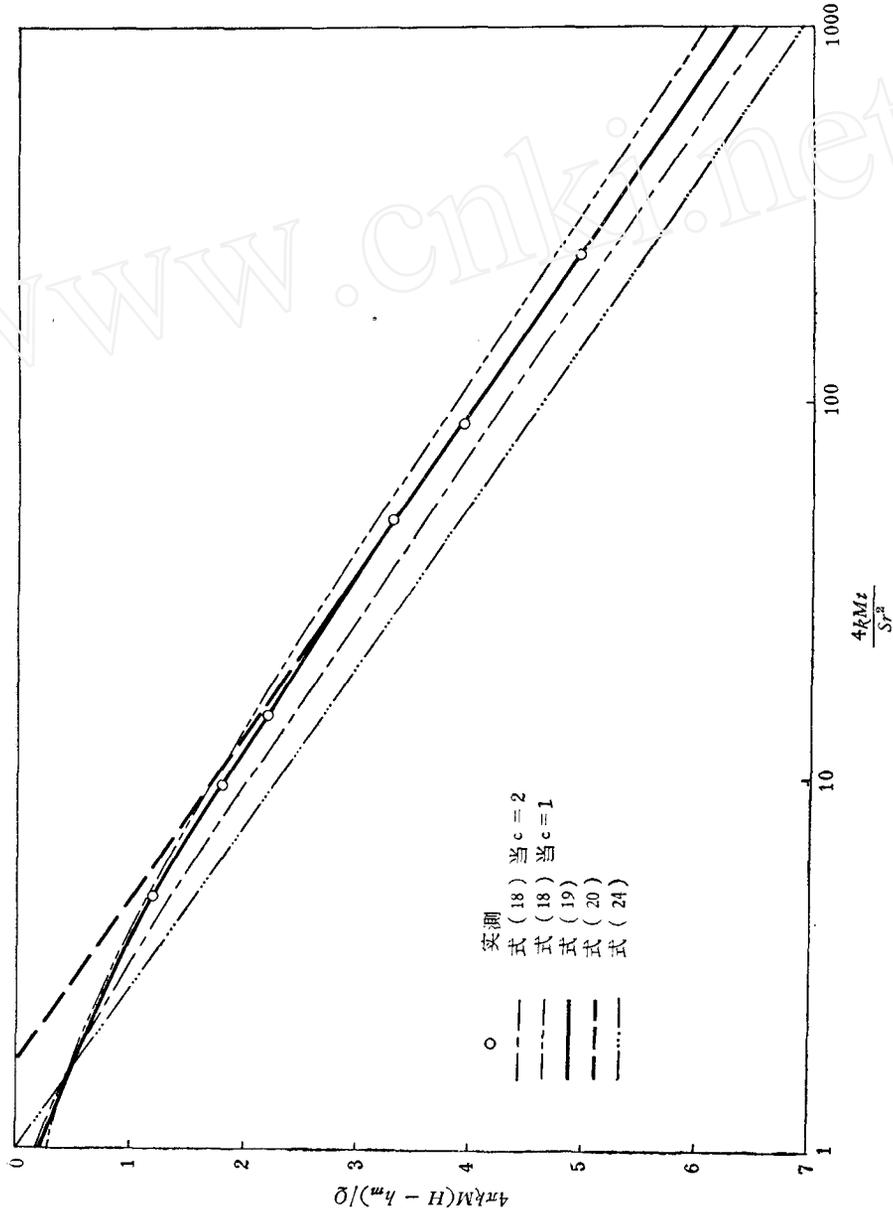


图 3 式(18), (19), (20) 和 (24) 与实测资料^[10] 的对比

而当 $r = R$ 时, $H - h_m = 0$, 代入上式, 得

$$R = \sqrt{\frac{2.25kMt}{S}} = 1.5 \sqrt{\frac{kMt}{S}}. \quad (21)$$

另一方面, 若只忽略 u 的三次方以上各项, 同样以边界条件 $r = R$ 时, $H - h_m = 0$ 代入, 得

$$R = \sqrt{\frac{5.6kMt}{S}} = 2.37 \sqrt{\frac{kMt}{S}}. \quad (22)$$

文献[5]对这个问题进行近似求解时, 设通过下层的所有垂直断面流量相等, 得

$$R = \sqrt{\frac{4kMt}{S}} = 2 \sqrt{\frac{kMt}{S}}. \quad (23)$$

而压力下降值的表达式则为

$$\frac{4\pi kM(H - h_m)}{Q} = \ln \frac{4kMt}{Sr^2}. \quad (24)$$

此式相当于把式(19)右边各项除 $\ln u$ 以外全部忽略的结果, 显然缺乏依据. 同时, 在弹性储量的前提之下, 任一断面的流量并不相同, 它随 r 的减小而增大, 只在井壁处, 才会等于 Q , 故设各断面的流量为 Q 所得到的式(23)和(24)与实际不符. 再由式(21)和(22)来看, 忽略项数越多, R 值越小, 因此将大于式(22)而趋于式(17), 这也说明式(21)和(23)所给予的 R 值均偏小.

为了确定 c 值及说明式(18), (19), (20) 和 (24) 的差异程度, 利用野外资料^[10]进行对比于图 3 中. 由图看出, 式(24)的准确度较其他各式为低, 而式(20)在 t/r^2 值较小部分偏离真实情况, 唯有由式(18)所得到的曲线, 既在形式上与严格分析解式(19)相似, 且与实测资料接近, 若采用 $c = 1.5$, 则会趋于一致. 由此可见, 对于没有串流的简单情况, 在式(7)的假设的基础之上得到的近似解的准确度相当高. 前面已经讨论过, 在流量的变化方面, 串流量与弹性储量的物理现象很相似, 故对于有串流的问题也可采用 $c = 1.5$, 于是式(8)和(16)分别写为

$$h_m = H - \frac{Q}{2\pi kM} \left(\ln \frac{R}{r} - \frac{1}{1.5} + \frac{r^{1.5}}{1.5R^{1.5}} \right), \quad (25)$$

$$R^2 = \frac{14kM}{1.5} \left[\frac{t}{\phi} + \frac{d}{k_0} (1 - e^{-k_0 t/Sd}) \right]. \quad (26)$$

(二) 近似结果的适用性

式(14), (25) 和 (26) 中的地层参数 kM , d/k_0 , ϕ 和 S 均需通过野外试验来确定. 当然, 后两者也可近似估计. 当 t 很大时, $\frac{r^{1.5}}{1.5R^{1.5}} \ll 1$, 且 $e^{-k_0 t/Sd} \ll 1$, 故由式(25)和(26)可得

$$\frac{4\pi kM(H - h_m)}{2.303Q} = \log \left(\frac{t}{\phi} + \frac{d}{k_0} \right) + \log \frac{14kM}{1.5e^{2/1.5} r^2}. \quad (27)$$

对某一 r 值而言, 上式右端第 2 项为常数; 当 $t/\phi \gg d/k_0$ 时, $(H - h_m)$ 与 $\log t$ 会成直线关系. 例如, 根据野外实测资料^[11](图 4), $r = 738\text{m}$ 处的读数表明, 当 t 很大时, 它们的的确

是直线关系。该直线的斜率可写为

$$\frac{\Delta(H - h_m)}{\Delta \log t} = \frac{2.303Q}{4\pi kM} \quad (28)$$

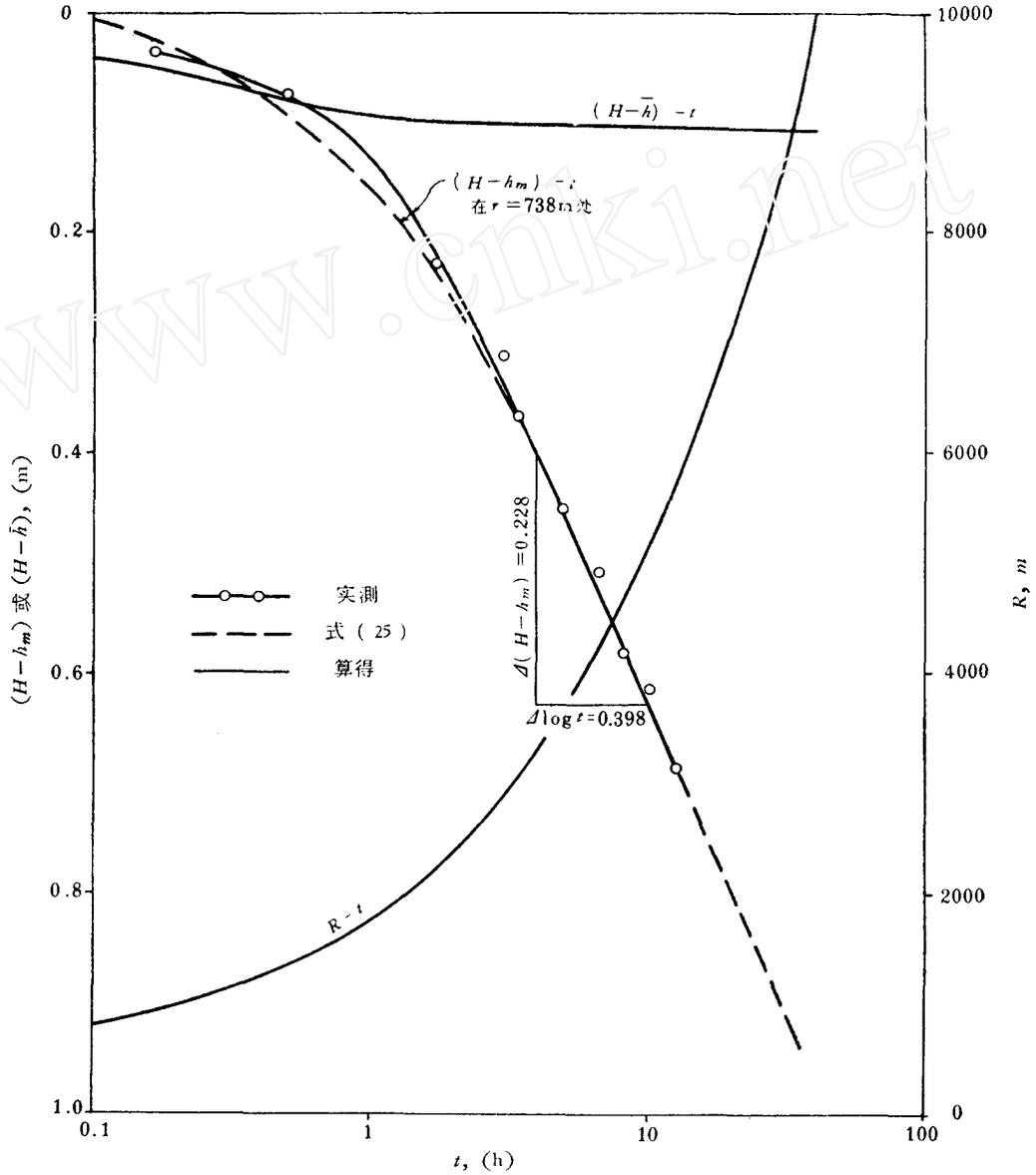


图 4 式(14), (25) 和(26) 的应用及其与实测资料^[11] 的对比

由图 4, 如任意取 $\Delta(H - h_m)$ 和 $\Delta \log t$ 的绝对值分别为 0.228m 和 0.398h, 且已知 $Q = 122.3 \text{ m}^3/\text{h}$, 代入式(28), 则得

$$kM = \frac{2.303(122.3)}{4\pi} \left(\frac{0.398}{0.228} \right) = 39.4 \text{ m}^2/\text{h}.$$

再由同一条曲线的直线部分, 任取两个较大的 t 值及相应的 $(H - h_m)$ 值, 分别代入式

(27), 可联立求解 ϕ 和 d/k_0 值. 例如

当 $t = 10\text{h}$ 时, $(H - h_m) = 0.628\text{m}$,

当 $t = 12.8\text{h}$ 时, $(H - h_m) = 0.686\text{m}$.

分别代入式(27), 得

$$\frac{d}{k_0} = 1,100\text{h}, \phi = 1.42 \times 10^{-4}.$$

然后引伸曲线部分, 求得 $(H - h_m) \rightarrow 0$ 时的时间 $t \approx 0.05\text{h}$, 连同所求得的 $kM, d/k_0$ 和 ϕ 值代入式(26)求解 S , 因为此时的 $R = 738\text{m}$, 故得

$$S = 1.61 \times 10^{-2}.$$

最后, 以所求得的各参数分别代入式(14), (25)和(26), 计算 $R, (H - h_m)$ 和 $(H - \bar{h})$ 与时间的关系, 其结果分别绘于图 4 中. 由图看出, 算得的与实测的 $(H - h_m) - \log t$ 曲线非常接近. 因此, 再次证明了本文采用的近似方法的有效性.

三、结 论

假若已知地层参数, 则可直接应用式(14), (25)和(26)计算影响半径及上下两层的压力下降值随时间的变化. 否则, 先要进行野外试验, 但只需在下层布置一个观察孔, 量测下降值与时间的关系, 并绘于半对数纸上, 即可仿照以上使用的程序来确定所有的参数.

参 考 文 献

- [1] Jacob, C. E., Radial flow in a leaky artesian aquifer, *Trans. Amer. Geoph. Union*, **27**, 1946, 198—208.
- [2] Hantush, M. S. and Jacob, C. E., Non-steady radial flow in an infinite leaky aquifer, *Trans. Amer. Geoph. Union*, **36**, 1955, 95—100.
- [3] Чарный, И. А., Фильтрация в пласте с непроницаемыми кровлей и подошвой, разделенном слабопроницаемой перемычкой, "Подземная гидродинамика", Труды МИНХ и ГП им. Губкина, вып. 33, 1961.
- [4] Полубаринова-Кочина, П. Я., Теория движения грунтовых вод, Гостехиздат, Москва, 1952. (波卢巴里诺娃-柯琴娜, П. Я., 地下水运动原理, 地质出版社, 北京, 1957).
- [5] Чарный, И. А., Подземная Гидродинамика, Гостехиздат, Москва, 1963.
- [6] Ligon, J. T., Kirkham, D. and Johnson, H. P., The falling water table between open ditch drains, *Soil Science*, **97**, 2, 1964, 113—118.
- [7] Hildebrand, F. B., *Advanced Calculus for Engineers*, Prentice-Hall, New York, 1954, 357.
- [8] Theis, C. V., The relation between the lowering of piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using ground water storage, *Trans. Amer. Geoph. Union*, **16**, 1935, 519—524.
- [9] Cooper, H. H., Jr. and Jacob, C. E., A generalized graphical method for evaluating formation constants and summarizing well-field history, *Trans. Amer. Geoph. Union*, **27**, 1946, 526—534.
- [10] Todd, D. K., *Ground Water Hydrology*, John Wiley and Sons, New York, 1959, 92.
- [11] Hantush, M. S., Analysis of data from pumping tests in leaky aquifers, *Trans. Amer. Geoph. Union*, **37**, 1956, 702—714.

NON-STEADY FLOW TOWARD A WELL IN STRATIFIED SYSTEMS WITH CROSSFLOW

LOO HUAN-YEN

(Institute of Geology, Academia Sinica)

ABSTRACT

An investigation has been made of non-steady flow of slightly compressible fluid during depletion of stratified porous systems with crossflow through a thin semi-impervious bed lying between two pervious layers. Approximate expressions have been developed for the variation of drawdown distribution in both layers and of influence radius with time, induced by a well discharging constantly from and screening only in the lower layer. These solutions have been verified with field data, and they are very useful for the arrangement of multiple-well systems and the determination of formation constants in layered oil or ground water reservoirs.