第 8 卷 第 4 期　　力 学 学 报　　Vol. 8, No. 4
1965 年 12 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Dec., 1965

具有任意閉口截面的中长柱壳的应力状态和解法分类*

高玉臣　黄克智
(清华大学)

提　　要

本文用渐近方法对闭口中长柱壳的应力状态进行了分类，并且给出了各种可能边界条件下的合理求解步骤．最后，为了说明问题，给出了一个例子．

符　　号

α, β 为无量纲坐标，α 沿母线，β 沿周线；ds 为弧长，$ds^2 = R^{*2}(d\alpha^2 + d\beta^2)$；$R$ 为曲率半径，$r = \frac{R}{R^*}$；R^* 代表 R 的尺度量级，我们可根据方便而任意选择；L 为壳长，$l = \frac{L}{R^*}$；$\lambda = \frac{h}{2\sqrt{3}R^*}$，$h$ 为壳体厚度；E 为杨氏模量，ν 为 Poisson 比；EhT_1, EhT_2, EhS_1, EhS_2 为膜力；EhR^*G_1, EhR^*G_2, EhR^*H 为內矩；EhN_1, EhN_2 为横向力，$Eh\widetilde{N}_1$ 为广义 Kirchhoff 横向力；R^*u, R^*v, R^*w 为位移；ε_1, ε_2, ω 为应变分量；$\frac{\kappa_1}{R^*}$, $\frac{\kappa_2}{R^*}$, $\frac{\tau}{R^*}$ 为中面曲率变化量；$Eh\frac{F_1}{R^*}$, $Eh\frac{F_2}{R^*}$, $Eh\frac{F_n}{R^*}$ 为面载荷；$\sim$ 为量级等号，表示左右端量级相同．

引　　言

柱壳的特点在于长度可能远远大于横断面的尺度．当 $l \gg r$ 时（确切些说是 $l \sim r\lambda^{-\frac{1}{2}}$），应力状态已不能分为纯弯和无矩．这时再谈是否允许纯弯就是沒有意义的了，因为卽使在两端加上种种限制，一般说来壳內仍然会产生遍布全身的弯曲应力(不只是在两端的狭窄地带)．这种壳体称为中长壳，它的应力状态除包含沿长度方向缓慢变化的半无矩状态外，通常两端还会有边界效应．边界效应和半无矩两种应力状态的具体比重决定于两端的边界条件和外载．弄清这种中长柱壳的应力状态特点和寻求簡捷可靠的求解步骤，不只是对较长的壳体计算有意义，而且这些结果可直接应用到不太长的壳体的稳定性问题中去[1)]．

本文将以量级分析(取小参数 λ 为量级标准)为基础，对各种边界条件下的中长壳求

* 1964 年 7 月 25 日收到．

1) 例如，在圆柱壳受外压或扭转作用时的稳定性问题中，失稳形态沿轴向的波长远远大于沿周向的波长．

解步骤进行讨论.

在一般壳体问题中，为了方便，常把求解分为两步. 第一步是考虑到面载荷求解非齐次微分方程；而边界条件可以改换或放松为对我们最方便的形式. 第二步是解沒有面载荷的齐次问题；而其边界条件则应弥补和修正第一步求解之不足. 第一步应从哪儿开始，要由问题的特点来决定. 例如，当 $l \sim r$ 时，总是希望先求无矩解，让它和面载平衡. 而在我们的问题中，$l \sim r\lambda^{-\frac{1}{2}}$，如前所述，无矩和纯弯解分不开，所以就希望先求半无矩状态，让它和面载平衡；第二步则希望借助于边界效应来弥补边界条件之不足. 至于这样做法的可能性问题，则需通过下面的研究给出回答.

一、基 本 方 程

（一）第一类型基本方程

1）力的平衡

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial S_2}{\partial\beta}+F_1=0,\\&\frac{\partial S_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial T_2}{\partial\beta}+\frac{N_2}{r}+F_2=0,\\&\frac{\partial N_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial N_2}{\partial\beta}-\frac{T_2}{r}+F_n=0;\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

2）力矩的平衡

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial G_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial H}{\partial\beta}=N_1,\\&\frac{\partial H}{\partial\alpha}+\frac{\partial G_2}{\partial\beta}=N_2;\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

3）弹性关系（Новожилов-Балабух 方案）

$$\left.\begin{aligned}&T_1=\frac{1}{1-\nu^2}(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2),\qquad T_2=\frac{1}{1-\nu^2}(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1),\\&S_1=\frac{\omega}{2(1+\nu)}+\frac{\lambda^2}{1+\nu}\frac{\tau}{r},\ S_2=\frac{\omega}{2(1+\nu)},\\&G_1=\frac{\lambda^2}{1-\nu^2}(\kappa_1+\nu\kappa_2),\qquad G_2=\frac{\lambda^2}{1-\nu^2}(\kappa_2+\nu\kappa_1),\\&H=\frac{\lambda^2}{1+\nu}\tau;\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

4）几何关系

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial\alpha},\quad \varepsilon_2=\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{w}{r},\quad \omega=\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial v}{\partial\alpha},\\&\kappa_1=-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2},\quad \kappa_2=-\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{v}{r}\right),\quad \tau=-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\alpha}.\end{aligned}\right\}\tag{1.4}$$

因为在 $S_1=\dfrac{\omega}{2(1+\nu)}+\dfrac{\lambda^2}{1+\nu}\dfrac{\tau}{r}$ 中，$\dfrac{\lambda^2}{1+\nu}\dfrac{\tau}{r}$ 这项一般可以略去，所以我们以后

通常只注意量 $S = S_2 = S_1 - \frac{\lambda^2}{1+\nu}\frac{\tau}{r}$.

（二）第二类型基本方程

为了比较量级时方便起见，我们从平衡方程和协调方程出发，只把 T_1, T_2, S, κ_1, κ_2, τ 看成独立未知量.

1）平衡方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial S}{\partial\beta}+F_1=0,\\&\frac{\partial S}{\partial\alpha}+\frac{\partial T_2}{\partial\beta}+\frac{\lambda^2}{r}\left[\frac{2}{1+\nu}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial\alpha}+\frac{1}{1-\nu^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}(\kappa_2+\nu\kappa_1)\right]+F_2=0,\\&\lambda^2\left[\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(\kappa_1+\nu\kappa_2)+\frac{2}{1+\nu}\frac{\partial^2\tau}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(\kappa_2+\nu\kappa_1)\right]-\\&\qquad-\frac{T_2}{r}+F_n=0;\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

2）协调方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\kappa_2}{\partial\alpha}-\frac{\partial\tau}{\partial\beta}=0,\\&\frac{\partial\kappa_1}{\partial\beta}-\frac{\partial\tau}{\partial\alpha}+\frac{1}{r}\left[2(1+\nu)\frac{\partial S}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\beta}(T_1-\nu T_2)\right]=0,\\&\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(T_2-\nu T_1)-2(1+\nu)\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(T_1-\nu T_2)+\frac{\kappa_1}{r}=0.\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

二、变化指数的确定

为了不致遗漏中长壳的任何一种应力状态，必须先作一般的讨论．设 $\frac{\partial}{\partial\alpha}\sim\lambda^{-k_1}$, $\frac{\partial}{\partial\beta}\sim\lambda^{-k_2}$, 即 $\frac{\partial f}{\partial\alpha}\sim\lambda^{-k_1}\cdot f$, $\frac{\partial f}{\partial\beta}\sim\lambda^{-k_2}\cdot f$ (f 代表任一物理量), k_1, k_2 称为变化指数．当壳体充分薄，即 λ 充分小时，k_1, k_2 只有以下几种情形才能满足方程(1.5)和(1.6)的量级协调要求．而对每种情形，应力状态又具有自己的特点.

1. $k_1 = k_2 = 0$.

由方程(1.5)和(1.6)前二式各项同量级的要求，分别得到：

$$T_1\sim S\sim T_2\sim T,\quad \kappa_1\sim\tau\sim\kappa_2\sim\kappa.\tag{2.1}$$

进一步可分为两种情况来讨论：

1）如果在方程(1.6)第三式中各项同量级，那么，$\kappa\sim T$，这称为无矩应力状态.

2）如果在方程(1.5)第三式中各项同量级，那么，$\kappa\lambda^2\sim T$，这称为纯弯应力状态.

2. $k_1 > 0$, $k_2 \geqslant 0$, 且 $k_1 - k_2 = k > 0$.

由方程(1.5)和(1.6)前二式各项同量级的要求，分别得到：

$$T_1\sim\lambda^k S\sim\lambda^{2k}T_2,\quad \kappa_2\sim\lambda^k\tau\sim\lambda^{2k}\kappa_1.\tag{2.2}$$

由方程(1.5)和(1.6)的第三式各项同量级的要求，分别得到：

$$\kappa_1\lambda^2 \sim T_2\lambda^{2k_1}, \quad \kappa_1 \sim \lambda^{-2k_1}T_2. \tag{2.3}$$

所以，$k_1 = 1/2$. 当 $k_2 = 0$ 时称为简单边界效应.

3. $k_2 \geqslant k_1$，即 $k_2 - k_1 = k \geqslant 0$.

由方程(1.5)和(1.6)的前二式各项同量级的要求，分别得到：

$$T_2 \sim \lambda^k S \sim \lambda^{2k}T_1, \quad \kappa_1 \sim \lambda^k\tau \sim \lambda^{2k}\kappa_2. \tag{2.4}$$

由方程(1.5)和(1.6)的第三式量级协调的要求，分别得到：

$$\kappa_2\lambda^2 \sim T_2\lambda^{2k_2}, \quad \kappa_1 \sim T_1\lambda^{-2k_2}. \tag{2.5}$$

所以，$k_2 = 1/4 + k_1/2$.

1) $k_1 < 0$ 时，$k_2 < 1/4$. 特殊情况：$k_1 = -1/2$ 时，$k_2 = 0$，这称为半无矩应力状态.

2) $k_1 = 0$ 时，$k_2 = 1/4$，这称为广义边界效应.

3) $k_1 > 0$ 时，$k_2 > 1/4$. 特殊情况：$k_1 = 1/2$ 时，$k_2 = 1/2$，这称为扁壳.

前面得到的变化指数 k_1, k_2 的 1，2，3 三种类型包括了所有可能的情况(因为 $k_2 < 0$ 是不可能在实际中遇到的). 此外，从 $k_2 = 1/4 + k_1/2$ 还可以看出，当 $k_1 < -1/2$ 时，不可能满足所有方程中各物理量同量级的要求(因为 $k_2 \geqslant 0$)，所以方程中还会有一些量可以略去，因而问题还能进一步简化.

三、中长柱壳渐近方程的推导

前面讨论了 $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}$, $\dfrac{\partial}{\partial\beta}$ 的各种可能量级. 对每种情况，基本方程可以分别得到简化. 我们用的方法是将各物理量按小参数 λ^σ (σ 由每种情况具体决定)的幂级数展开，然后在方程中比较 λ^σ 各次幂的系数，于是得到各次渐近方程. 限于篇幅，我们只对中长柱壳中遇到的应力状态进行讨论. 闭口中长柱壳，由于其长度特点($l \sim \lambda^{-\frac{1}{2}}r$)，决定了它只能有以下两种应力状态.

(一) 简单边界效应 ($k_1=1/2, k_2=0$)

令

$$\left.\begin{aligned}
&\xi = \alpha\lambda^{-\frac{1}{2}}, \quad \eta = \beta \quad (\text{取 } \sigma = 1/2),\\
&T_2 = T_2^0 + \lambda T_2^1 + \lambda^2 T_2^2 + \cdots, \quad S = \lambda^{\frac{1}{2}}(S^0 + \lambda S^1 + \cdots),\\
&T_1 = \lambda(T_1^0 + \cdots), \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + \cdots, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + \cdots,\\
&\omega = \lambda^{\frac{1}{2}}(\omega^0 + \cdots), \quad \kappa_1 = \lambda^{-1}(\kappa_1^0 + \cdots), \quad \kappa_2 = \kappa_2^0 + \cdots,\\
&\tau = \lambda^{-\frac{1}{2}}(\tau^0 + \cdots), \quad G_1 = \lambda(G_1^0 + \cdots), \quad G_2 = \lambda(G_2^0 + \cdots),\\
&H = \lambda^{\frac{3}{2}}(H^0 + \cdots), \quad N_1 = \lambda^{\frac{1}{2}}(N_1^0 + \cdots),\\
&\widetilde{N}_1 = \lambda^{\frac{1}{2}}(\widetilde{N}_1^0 + \cdots), \quad N_2 = \lambda(N_2^0 + \cdots),\\
&u = \lambda^{\frac{1}{2}}(u^0 + \cdots), \quad v = \lambda(v^0 + \cdots), \quad w = w^0 + \cdots,\\
&F_1 = \lambda^{\frac{1}{2}}(F_1^0 + \cdots), \quad F_2 = F_2^0 + \cdots, \quad F_n = F_n^0 + \cdots,
\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

代入方程(1.1)—(1.4)并比较 λ 各幂的系数，我们有(第一次近似)：

力的平衡

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_1^0}{\partial \xi} + \frac{\partial S^0}{\partial \eta} + F_1^0 = 0, \\
&\frac{\partial S^0}{\partial \xi} + \frac{\partial T_2^0}{\partial \eta} + F_2^0 = 0, \\
&\frac{\partial N_1^0}{\partial \xi} - \frac{T_2^0}{r} + F_n^0 = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{3.2}
$$

力矩的平衡

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial G_1^0}{\partial \xi} = N_1^0, \\
&\frac{\partial G_2^0}{\partial \eta} + \frac{\partial H^0}{\partial \xi} = N_2^0 \quad (\widetilde{N}_1^0 = N_1^0);
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}
$$

弹性关系

$$
\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_1^0 + \nu\varepsilon_2^0 = 0, \quad T_2^0 = \frac{1}{1-\nu^2}(\varepsilon_2^0 + \nu\varepsilon_1^0) = \varepsilon_2^0, \quad S_1^0 = S_2^0 = S^0 = \frac{\omega^0}{2(1+\nu)}, \\
&G_1^0 = \frac{\kappa_1^0}{1-\nu^2}, \quad G_2^0 = \frac{\nu\kappa_2^0}{1-\nu^2}, \quad H^0 = \frac{\tau^0}{1+\nu};
\end{aligned}\right\} \tag{3.4}
$$

几何关系

$$
\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_1^0 = \frac{\partial u^0}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_2^0 = \frac{w^0}{r}, \quad \omega^0 = \frac{\partial u^0}{\partial \eta} + \frac{\partial v^0}{\partial \xi}, \\
&\kappa_1^0 = -\frac{\partial^2 w^0}{\partial \xi^2}, \quad \kappa_2^0 = -\frac{\partial^2 w^0}{\partial \eta^2}, \quad \tau^0 = -\frac{\partial^2 w^0}{\partial \xi \partial \eta}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.5}
$$

我们这里只做第一次近似，因为第二次近似只引起 λ 级小量的修正，而这种修正已和薄壳原始方程的误差同级了．当然，对于非柱壳二级近似将是必要的，因为它引起的修正为 $\lambda^{\frac{1}{2}}$ 级小量．

（二）半无矩（$k_1 = -1/2,\ k_2 = 0$）

令

$$
\left.\begin{aligned}
&\xi = \alpha\lambda^{\frac{1}{2}}, \quad \eta = \beta, \quad (\text{取 } \sigma = 1/2), \\
&T_1 = T_1^0 + \lambda T_1^1 + \cdots, \quad S = \lambda^{\frac{1}{2}}(S^0 + \cdots), \quad T_2 = \lambda(T_2^0 + \cdots), \\
&\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + \cdots, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + \cdots, \quad \omega = \lambda^{\frac{1}{2}}(\omega^0 + \cdots), \\
&\kappa_1 = \kappa_1^0 + \cdots, \quad \kappa_2 = \lambda^{-1}(\kappa_2^0 + \cdots), \quad \tau = \lambda^{-\frac{1}{2}}(\tau^0 + \cdots), \\
&G_1 = \lambda(G_1^0 + \cdots), \quad G_2 = \lambda(G_2^0 + \cdots), \quad H = \lambda^{\frac{3}{2}}(H^0 + \cdots), \\
&N_1 = \lambda^{\frac{3}{2}}(N_1^0 + \cdots), \quad \widetilde{N}_1 = \lambda^{\frac{3}{2}}(\widetilde{N}_1^0 + \cdots), \quad N_2 = \lambda(N_2^0 + \cdots), \\
&u = \lambda^{-\frac{1}{2}}(u^0 + \cdots), \quad v = \lambda^{-1}(v^0 + \cdots), \quad w = \lambda^{-1}(w^0 + \cdots), \\
&F_1 = \lambda^{\frac{1}{2}}(F_1^0 + \cdots), \quad F_2 = \lambda(F_2^0 + \cdots), \quad F_n = \lambda(F_n^0 + \cdots),
\end{aligned}\right\} \tag{3.6}
$$

代入方程(1.1)—(1.4)并比较 λ 各次幂的系数，我们有(第一次近似)：

力的平衡

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T_1^0}{\partial \xi}+\frac{\partial S^0}{\partial \eta}+F_1^0=0,\\&\frac{\partial S^0}{\partial \xi}+\frac{\partial T_2^0}{\partial \eta}+\frac{N_2^0}{r}+F_2^0=0,\\&\frac{\partial N_2^0}{\partial \eta}-\frac{T_2^0}{r}+F_n^0=0;\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

力矩的平衡

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial G_1^0}{\partial \xi}+\frac{\partial H^0}{\partial \eta}=N_1^0,\\&\frac{\partial G_2^0}{\partial \eta}=N_2^0,\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

$$\widetilde{N}_1^0=-\frac{2-\nu}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial^3 w^0}{\partial \xi\partial \eta^2}-\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \eta}\left(\frac{v^0}{r}\right)\right];\tag{3.9}$$

弹性关系

$$\left.\begin{aligned}&T_1^0=\frac{1}{1-\nu^2}(\varepsilon_1^0+\nu\varepsilon_2^0)=\varepsilon_1^0,\quad \varepsilon_2^0+\nu\varepsilon_1^0=0,\quad S^0=S_1^0=S_2^0=\frac{\omega^0}{2(1+\nu)},\\&G_1^0=\frac{\nu}{1-\nu^2}\kappa_2^0,\quad G_2^0=\frac{\kappa_2^0}{1-\nu^2},\quad H^0=\frac{\tau^0}{1+\nu};\end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

几何关系

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_1^0=\frac{\partial u^0}{\partial \xi},\quad \frac{\partial v^0}{\partial \eta}+\frac{w^0}{r}=0,\quad \frac{\partial u^0}{\partial \eta}+\frac{\partial v^0}{\partial \xi}=0,\\&\kappa_1^0=-\frac{\partial^2 w^0}{\partial \xi^2},\quad \kappa_2^0=-\frac{\partial^2 w^0}{\partial \eta^2}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{v^0}{r}\right),\quad \tau^0=-\frac{\partial^2 w^0}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{r}\frac{\partial v^0}{\partial \xi}.\end{aligned}\right\}\tag{3.11}$$

二级近似只引起 λ 级小量的修正，不必去做.

四、簡单边界效应的解

第三节(一)的解已经有一般的显表达式，为了以后使用方便，我们这里再给出更为适用的形式. 我们假定沒有面载荷(被其他应力状态平衡掉了)，这样便可把第三节(一)的方程组化为只有 w 的一个含参数的常微分方程：

$$\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4}+\frac{w}{r^2}=0,\quad r=r(\eta),\tag{4.1}$$

η 可看成是参数，$0\leqslant\eta\leqslant\eta_0$.

这里省略了标志第一次近似的上标 0，因为以后我们只做第一次近似. 此后所有的量也都省去上标 0.

w 的解有四个独立函数：

$$\phi_1 e^{-g\xi}\cos g\xi,\quad \phi_2 e^{-g\xi}\sin g\xi,\quad \phi_3 e^{g\xi}\cos g\xi,\quad \phi_4 e^{g\xi}\sin g\xi,\tag{4.2}$$

这里，

$$g=g(\eta)=\frac{\sqrt[4]{1-\nu^2}}{\sqrt{2r}};\quad \phi_i=\phi_i(\eta)\quad (i=1,2,3,4).\tag{4.3}$$

但是对壳体的每一端，只有向内部衰减的解才是我们所需要的．所以，对 $\xi=0$ 一端就采用 ϕ_1,ϕ_2 所对应的解；对 $\xi=l_1$ 一端（$l_1=l\lambda^{-\frac{1}{2}}$）则采用 ϕ_3,ϕ_4 所对应的解，并且把 ξ 改为 $\xi-l_1$.

在求得了 w 的四个独立函数之后，很容易写出相应的其他量（边界条件中用到的）：

1. $(\phi_{1,3})$ 对应的解

$$\left.\begin{aligned}
&w=\phi_{1,3}\,e^{\mp g\xi}\cos g\xi,\quad \frac{\partial w}{\partial \xi}=-g\phi_{1,3}\,e^{\mp g\xi}(\pm\cos g\xi+\sin g\xi),\\
&\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}=-(1-\nu^2)G_1=\pm 2g^2\phi_{1,3}\,e^{\mp g\xi}\sin g\xi,\\
&\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3}=-(1-\nu^2)\tilde{N}_1=2g^3\phi_{1,3}\,e^{\mp g\xi}(\pm\cos g\xi-\sin g\xi),\\
&S=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\phi_{1,3}}{2gr}e^{\mp g\xi}(\pm\cos g\xi-\sin g\xi)\right],\\
&T_1=\mp\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(\phi_{1,3}\,e^{\mp g\xi}\sin g\xi),\\
&u=\frac{\nu\phi_{1,3}}{2gr}e^{\mp g\xi}(\pm\cos g\xi-\sin g\xi),\\
&v=\pm\frac{2+\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}\frac{\partial}{\partial\eta}(\phi_{1,3}\,e^{\mp g\xi}\sin g\xi).
\end{aligned}\right\}\tag{4.4}$$

2. $(\phi_{2,4})$ 对应的解

$$\left.\begin{aligned}
&w=\phi_{2,4}\,e^{\mp g\xi}\sin g\xi,\quad \frac{\partial w}{\partial \xi}=g\phi_{2,4}\,e^{\mp g\xi}(\cos g\xi\mp\sin g\xi),\\
&\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}=-(1-\nu^2)G_1=\mp 2g^2\phi_{2,4}\,e^{\mp g\xi}\cos g\xi,\\
&\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3}=-(1-\nu^2)\tilde{N}_1=2g^3\phi_{2,4}\,e^{\mp g\xi}(\cos g\xi\pm\sin g\xi),\\
&S=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\phi_{2,4}}{2gr}e^{\mp g\xi}(\cos g\xi\pm\sin g\xi)\right],\\
&T_1=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(\phi_{2,4}\,e^{\mp g\xi}\cos g\xi),\\
&u=\frac{\nu\phi_{2,4}}{2gr}e^{\mp g\xi}(\cos g\xi\pm\sin g\xi),\\
&v=\mp\frac{2+\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}\frac{\partial}{\partial\eta}(\phi_{2,4}\,e^{\mp g\xi}\cos g\xi).
\end{aligned}\right\}\tag{4.5}$$

为了比较量级时方便起见，我们对 w 的四个独立函数再给出另外一种等价的写法，同时也给出边界条件中用到的其他量的相应式子：

3. $(\tilde{\phi}_{1,3})$ 对应的解

$$
\left.\begin{aligned}
&w=\tilde{\phi}_{1,3}\,e^{\mp g\xi}(\cos g\xi\pm\sin g\xi),\quad \frac{\partial w}{\partial\xi}=-2g\tilde{\phi}_{1,3}\,e^{\mp g\xi}\sin g\xi,\\
&\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}=-(1-\nu^2)G_1=-2g^2\tilde{\phi}_{1,3}\,e^{\mp g\xi}(\cos g\xi\mp\sin g\xi),\\
&\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^3}=-(1-\nu^2)\tilde{N}_1=\pm 4g^3\tilde{\phi}_{1,3}\,e^{\mp g\xi}\cos g\xi,\\
&S=\pm\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\tilde{\phi}_{1,3}}{gr}e^{\mp g\xi}\cos g\xi\right),\\
&T_1=\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}[\tilde{\phi}_{1,3}\,e^{\mp g\xi}(\cos g\xi\mp\sin g\xi)],\\
&u=\pm\frac{\nu\tilde{\phi}_{1,3}}{gr}e^{\mp g\xi}\cos g\xi,\\
&v=\frac{2+\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}\frac{\partial}{\partial\eta}[\tilde{\phi}_{1,3}\,e^{\mp g\xi}(-\cos g\xi\pm\sin g\xi)].
\end{aligned}\right\}\tag{4.6}
$$

4. $(\tilde{\phi}_{2,4})$ 所对应的解

$$
\left.\begin{aligned}
&w=\tilde{\phi}_{2,4}\,e^{\mp g\xi}(\cos g\xi\mp\sin g\xi),\quad \frac{\partial w}{\partial\xi}=\mp 2g\tilde{\phi}_{2,4}\,e^{\mp g\xi}\cos g\xi,\\
&\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}=-(1-\nu^2)G_1=2g^2\tilde{\phi}_{2,4}\,e^{\mp g\xi}(\cos g\xi\pm\sin g\xi),\\
&\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^3}=-(1-\nu^2)\tilde{N}_1=-4g^3\tilde{\phi}_{2,4}\,e^{\mp g\xi}\sin g\xi,\\
&S=-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\tilde{\phi}_{2,4}}{gr}e^{\mp g\xi}\sin g\xi\right),\\
&T_1=\frac{-1}{\sqrt{1-\nu^2}}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}[\tilde{\phi}_{2,4}\,e^{\mp g\xi}(\cos g\xi\pm\sin g\xi)],\\
&u=-\frac{\nu\tilde{\phi}_{2,4}}{gr}e^{\mp g\xi}\sin g\xi,\\
&v=\frac{2+\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}\frac{\partial}{\partial\eta}[\tilde{\phi}_{2,4}e^{\mp g\xi}(\cos g\xi\pm\sin g\xi)].
\end{aligned}\right\}\tag{4.7}
$$

对壳体的每一端，从上面给出的解的四种形式中任取两个都是独立的，至于到底取哪两个配合使用，要看具体边界条件的提法而定．例如，对于简支端，取 $(\phi_{1,3})$，$(\phi_{2,4})$ 配合将是方便的，因为在边界上 $(\phi_{1,3})$ 中的 $G_1=0$，而 $(\phi_{2,4})$ 中的 $w=0$；对于固定端，取 $(\phi_{2,4})$，$(\tilde{\phi}_{1,3})$ 配合将是方便的，因为在边界上 $(\phi_{2,4})$ 中的 $w=0$，而 $(\tilde{\phi}_{1,3})$ 中的 $\frac{\partial w}{\partial\xi}=0$.

五、半无矩状态的解

从第三节(二)的各式中消去其余未知量，便可得到只含 u 的偏微分方程(称为预解方程)

$$
\frac{\partial^4 u}{\partial\xi^4}+\frac{1}{1-\nu^2}\Omega\Omega u+p=0,\tag{5.1}
$$

其中，

$$
\left.\begin{aligned}
&\Omega(\cdots)=\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left[r\frac{\partial^2(\cdots)}{\partial\eta^2}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(\cdots)}{\partial\eta}\right],\\
&p=\frac{\partial^2F_1}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2F_2}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial^3(rF_n)}{\partial\xi\partial\eta^2}.
\end{aligned}\right\}\tag{5.2}
$$

如果从这里求得了 u，那么就不难利用第三节(二)中各式求出其他量：

$$
\left.\begin{aligned}
&T_1=\frac{\partial u}{\partial\xi},\quad S=-\int_0^\eta\left(\frac{\partial T_1}{\partial\xi}+F_1\right)d\eta+S_0(\xi),\\
&v=-\int_0^\xi\frac{\partial u}{\partial\eta}d\xi+v_0(\eta),\quad \kappa_2=\Omega_2v,\\
&N_2=\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\Omega_2v,\quad T_2=rF_n+\frac{r}{1-\nu^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Omega_2v.
\end{aligned}\right\}\tag{5.3}
$$

这里，

$$
\Omega_2(\cdots)=\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left[r\frac{\partial(\cdots)}{\partial\eta}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\cdots)}{r}\right].\tag{5.4}
$$

但是由于预解方程本身过于复杂，不用说直接求解和讨论解的性质很困难，就连应该提哪些边界条件也是不清楚的(因为半无矩状态仅是全体应力状态的一部分，所以不能满足全部边界条件)。这样就迫使我们采用分离变量法。

(一) 分离变量法、方程的通解

首先看特征値问题：

$$
\left.\begin{aligned}
&\Omega\Omega\varphi(\eta)=a\varphi(\eta),\\
&\varphi(\eta)\ \text{满足所有的周期性条件;}
\end{aligned}\right\}\tag{5.5}
$$

$$
\Omega(\cdots)=\frac{d^2}{d\eta^2}\left[r\frac{d^2}{d\eta^2}(\cdots)\right]+\frac{d}{d\eta}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{d\eta}(\cdots)\right].\tag{5.6}
$$

由于 Ω 是自共轭算子，所以 Ω 的特征值为实数。Ω 的平方 $\Omega\Omega$ 也是自共轭算子，而且 $\Omega\Omega$ 的特征値是 Ω 的特征値的平方[1)]，所以 $\Omega\Omega$ 的特征値应该是正数或零。

把特征値记为 a_i(由小及大排列)，其相应的特征函数记为 φ_{ij}，$j=1,2,\cdots,j(i)$。应该指出，$a=0$ 也是特征値(我们把它记为 a_0)，而且仅有三个特征函数：

$$
\varphi_{01}=1,\quad \varphi_{02}=x,\quad \varphi_{03}=y,\tag{5.7}
$$

这里 x, y 是断面内的无量纲直角坐标，即 R^*x, R^*y 代表对形心惯性主轴的眞正直角坐标。

为了方便，我们假定 φ_{ij} 是已经正交化了的，即

$$
\int_0^{\eta_0}\varphi_{ij}\varphi_{kl}d\eta=0,\quad \text{当}\ |i-k|+|j-l|\neq0\ \text{时},\tag{5.8}
$$

$$
i=0,1,2,3,\cdots\quad j=1,2,\cdots,j(i),
$$

$$
k=0,1,2,3,\cdots\quad l=1,2,\cdots,l(k),
$$

1) 因为提的是周期性条件，所以 Ω 的特征函数(只要充分光滑)都是 $\Omega\Omega$ 的特征函数，再利用 Ω 特征函数的完备性，不难证明此论断。

这里 η_0 表示 η 的最大值，即绕一周的值.

现在我们来看方程(5.1)的解. 由于 $\Omega\Omega$ 的特征函数是完备的，所以 η 的任意一个充分光滑的周期函数都可按 φ_{ij} 展开[1]. 我们假定 F_1, F_2, F_n 都是充分多次光滑的函数，于是 $F_1, \frac{\partial F_2}{\partial\eta}, \frac{\partial^2(rF_n)}{\partial\eta^2}$ 便都可按 φ_{ij} 展为级数：

$$\left.\begin{aligned}&F_1=\sum f_1^{ij}(\xi)\varphi_{ij},\\&\frac{\partial F_2}{\partial\eta}=\sum f_2^{\prime ij}(\xi)\varphi_{ij},\qquad\frac{\partial^2(rF_n)}{\partial\eta^2}=\sum f_n^{\prime ij}(\xi)\varphi_{ij},\end{aligned}\right\}\tag{5.9}$$

这里撇号 ′ 表示对 ξ 求微商.

显然，令 $f_2^{ij}(0)=f_n^{ij}(0)=0$ 是可以的.

由级数(5.9)的后二式又可得到

$$F_2=f_2(\xi)+\sum f_2^{\prime ij}\Phi_{ij},\quad\frac{\partial}{\partial\eta}(rF_n)=f_n(\xi)+\sum f_n^{\prime ij}\Phi_{ij},\tag{5.10}$$

这里 $\Phi_{ij}=\int_0^\eta\varphi_{ij}d\eta$（除 Φ_{01} 外都是周期函数）.

由于 F_2 和 $\frac{\partial}{\partial\eta}(rF_n)$ 都是周期函数，所以

$$f_2^{01}=f_n^{01}\equiv 0.\tag{5.11}$$

将级数(5.9)代入式(5.2)，有

$$P=\sum p_{ij}(\xi)\varphi_{ij},\quad p_{ij}=f_1^{\prime\prime ij}-f_2^{\prime\prime ij}-f_n^{\prime\prime ij}.\tag{5.12}$$

令

$$u=\sum u_{ij}(\xi)\varphi_{ij},\tag{5.13}$$

便得到：

$$u_{ij}^{\prime\prime\prime\prime}+\frac{a_i}{1-\nu^2}u_{ij}+p_{ij}=0.\tag{5.14}$$

对于零特征值情形（$i=0$）：

$$u_{0j}^{\prime\prime\prime\prime}+p_{0j}=0\quad(j=1,2,3),\tag{5.15}$$

$$u_{0j}=\sum_{k=0}^{3}C_{0j}^k\xi^k\frac{1}{k!}-\int_0^\xi(\xi-\zeta)[f_1^{0j}(\zeta)-f_2^{0j}(\zeta)-f_n^{0j}(\zeta)]d\zeta.\tag{5.16}$$

对于非零特征值情形（$i\geqslant 1$）：

$$u_{ij}^{\prime\prime\prime\prime}+4\mu_i^4u_{ij}+p_{ij}=0,\tag{5.17}$$

这里 $4\mu_i^4=\frac{a_i}{1-\nu^2}$. 所以

$$u_{ij}=\sum_{k=1}^{4}C_{ij}^k\chi_k(\mu_i\xi)-\frac{1}{2\mu_i}\int_0^\xi\chi_2[\mu_i(\xi-\zeta)]\cdot[f_1^{ij}(\zeta)-f_2^{ij}(\zeta)-f_n^{ij}(\zeta)]d\zeta,\tag{5.18}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}&\chi_1(\mu_i\xi)=\operatorname{ch}\mu_i\xi\cdot\cos\mu_i\xi,\quad\chi_2(\mu_i\xi)=\operatorname{ch}\mu_i\xi\sin\mu_i\xi+\operatorname{sh}\mu_i\xi\cos\mu_i\xi,\\&\chi_3(\mu_i\xi)=\operatorname{sh}\mu_i\xi\cdot\sin\mu_i\xi,\quad\chi_4(\mu_i\xi)=\operatorname{ch}\mu_i\xi\sin\mu_i\xi-\operatorname{sh}\mu_i\xi\cdot\cos\mu_i\xi.\end{aligned}\right\}\tag{5.19}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{d\xi}\chi_2(\mu_i\xi)=2\mu_i\chi_1(\mu_i\xi),\quad \frac{d}{d\xi}\chi_3(\mu_i\xi)=\mu_i\chi_2(\mu_i\xi),\\&\frac{d}{d\xi}\chi_4(\mu_i\xi)=2\mu_i\chi_3(\mu_i\xi),\quad \frac{d}{d\xi}\chi_1(\mu_i\xi)=-\mu_i\chi_4(\mu_i\xi).\end{aligned}\right\}\tag{5.20}$$

利用式(5.3)容易得到

$$\left.\begin{aligned}&T_1=\sum T_1^{ij}\varphi_{ij},\quad S=\sum S^{ij}\Phi_{ij}+S_0(\xi),\\&v=\sum v^{ij}\varphi'_{ij}+v_0(\eta),\end{aligned}\right\}\tag{5.21}$$

这里 $\varphi'_{ij}=\frac{d}{d\eta}\varphi_{ij}$.

当 $i=0$ 时,

$$T_1^{0j}=\sum_{k=0}^{3}C_{0j}^k\xi^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}-\int_0^\xi[f_1^{0j}(\zeta)-f_2^{0j}(\zeta)-f_n^{0j}(\zeta)]d\zeta,\tag{5.22}$$

此处 $j=1,2,3$. 特别当 $j=1$ 时,由式(5.11)可得:

$$T_1^{01}=\sum_{k=1}^{3}C_{11}^k\zeta^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}-\int_0^\xi f_1^{01}(\zeta)d\zeta;\tag{5.23}$$

$$S^{0j}=-\sum_{k=2}^{3}C_{0j}^k\xi^{k-2}\frac{1}{(k-2)!}-f_2^{0j}-f_n^{0j},\tag{5.24}$$

而由于 $\Phi_{01}=\eta$ 不满足周期条件,所以要求 $S^{01}\equiv 0$,注意到式(5.11),便得到:

$$C_{01}^2=C_{01}^3=0;\tag{5.25}$$

$$v^{0j}=-\sum_{k=0}^{3}C_{0j}^k\xi^{k+1}\frac{1}{(k+1)!}+\int_0^\xi\frac{(\xi-\zeta)^2}{2}[f_1^{0j}(\zeta)-f_2^{0j}(\zeta)-f_n^{0j}(\zeta)]d\zeta,\tag{5.26}$$

这里的 $j=2,3$(因为 $\varphi'_{01}=0$).

当 $i\neq 0$ 时,

$$T_1^{ij}=\sum_{k=1}^{4}C_{ij}^k\chi'_k(\mu_i\xi)-\int_0^\xi\chi_1[\mu_i(\xi-\zeta)]\cdot[f_1^{ij}(\zeta)-f_2^{ij}(\zeta)-f_n^{ij}(\zeta)]d\zeta,\tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}S^{ij}=&-\sum_{k=1}^{4}C_{ij}^k\chi''_k(\mu\xi)-\mu_i\int_0^\xi\chi_4[\mu_i(\xi-\zeta)]\cdot[f_1^{ij}(\zeta)-f_2^{ij}(\zeta)-\\&-f_n^{ij}(\zeta)]d\zeta-f_2^{ij}(\xi)-f_n^{ij}(\xi).\end{aligned}\tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}v^{ij}=&-\sum_{k=1}^{4}C_{ij}^k\int_0^\xi\chi_k(\mu_i\zeta)d\zeta+\frac{1}{2\mu_i^2}\int_0^\xi\chi_3[\mu_i(\xi-\zeta)]\times\\&\times[f_1^{ij}(\zeta)-f_2^{ij}(\zeta)-f_n^{ij}(\zeta)]d\zeta.\end{aligned}\tag{5.29}$$

其余各量不列举.

容易看出,采用了式(5.3)之后,第三节(二)中各方程除了第二个平衡方程以外全部得到满足. 而第二个平衡方程变为

$$\begin{aligned}&S'_0(\xi)-\int_0^\eta\frac{\partial^3u}{\partial\xi^3}d\eta-\int_0^\eta\frac{\partial F_1}{\partial\xi}d\eta-\frac{1}{1-\nu^2}\Omega_1\Omega\int_0^\xi ud\xi+\\&+\frac{1}{1-\nu^2}\Omega_1\Omega_2v_0(\eta)+\frac{\partial}{\partial\eta}(rF_n)+F_2=0,\end{aligned}\tag{5.30}$$

这里

$$\Omega_1(\cdots) = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[r \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(\cdots)\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \eta}(\cdots). \tag{5.31}$$

再利用式(5.16),(5.18)及(5.10),便得到

$$\begin{aligned} &S_0'(\xi) - C_{02}^3 \int_0^\eta x d\eta - C_{03}^3 \int_0^\eta y d\eta + f_2(\xi) + f_n(\xi) + \frac{1}{1-\nu^2}\Omega_1\Omega_2 v_0(\eta) - \\ &- \sum_{i>0}\left\{\sum_{k=1}^4 C_{ij}^k \chi_k'''(\mu_i\xi) + 2\mu_i^2 \int_0^\xi \chi_3[\mu_i(\xi-\zeta)]\cdot[f_1^{ij}(\zeta) - f_2^{ij}(\zeta) - f_n^{ij}(\zeta)]d\zeta\right\}\Phi_{ij} - \\ &- \sum_{i>0}\left\{\sum_{k=1}^4 C_{ij}^k \int_0^\xi \chi_k(\mu_i\xi)d\xi - \frac{1}{2\mu_i^2}\int_0^\xi \chi_3[\mu_i(\xi-\zeta)] \times \right. \\ &\left. \times [f_1^{ij}(\zeta) - f_2^{ij}(\zeta) - f_n^{ij}(\zeta)]d\zeta\right\}\frac{1}{1-\nu^2}\Omega_1\Omega\varphi_{ij} = 0. \end{aligned} \tag{5.32}$$

令 $\Phi_{ij} = \frac{1}{a_i}\Omega_1\Omega\varphi_{ij} + \Phi_{ij}^*$ ($\Phi^* = \text{const.}$),并且注意到式(5.19)和(5.20),有

$$\begin{aligned} &S_0'(\xi) - C_{02}^3 \int x d\eta - C_{03}^3 \int y d\eta + f_2(\xi) + f_n(\xi) + \frac{1}{1-\nu^2}\Omega_1\Omega_2 v_0(\eta) - \\ &- \sum_{i>0} C_{ij}^4 \frac{1}{a_i}\Omega_1\Omega\varphi_{ij}\cdot 4\mu_i^3 - \sum_{i>0}\left\{\sum_{k=1}^4 C_{ij}^k \chi_k'''(\mu_i\xi) + 2\mu_i^2\int_0^\xi \chi_3[\mu_i(\xi-\zeta)] \times \right. \\ &\left. \times [f_1^{ij}(\zeta) - f_2^{ij}(\zeta) - f_n^{ij}(\zeta)]d\zeta\right\}\Phi_{ij}^* = 0. \end{aligned} \tag{5.33}$$

此方程对 $v_0(\eta)$ 有解的充分必要条件[1]是

$$\left.\begin{aligned} &C_{02}^3 = C_{03}^3 = 0, \\ &S_0'(\xi) + f_2(\xi) + f_n(\xi) - \sum_{i>0}\left\{\sum_{k=1}^4 C_{ij}^k \chi_k'''(\mu_i\xi) + 2\mu_i^2 \times \right. \\ &\left. \times \int_0^\xi \chi_3[\mu_i(\xi-\zeta)]\cdot[f_1^{ij}(\zeta) - f_2^{ij}(\zeta) - f_n^{ij}(\zeta)]d\zeta\right\}\Phi_{ij}^* = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

即

$$\begin{aligned} S_0(\xi) = &\int_0^\xi \sum_{i>0}\left\{\sum_{k=1}^4 C_{ij}^k \chi_k'''(\mu_i\xi) + 2\mu_i^2\int_0^\xi \chi_3[\mu_i(\xi-\zeta)][f_1^{ij}(\zeta) - f_2^{ij}(\zeta) - \right. \\ &\left. - f_n^{ij}(\zeta)]d\zeta\right\}\Phi_{ij}^* d\xi - \int_0^\xi [f_2(\xi) + f_n(\xi)]d\xi + S_0(0). \end{aligned} \tag{5.35}$$

并且最后求得

$$v_0(\eta) = b_1\rho + b_2\cos\theta + b_3\sin\theta + \sum C_{ij}^4 \varphi_{ij}' \frac{1}{\mu_i}, \tag{5.36}$$

这里 $\rho = x\sin\theta - y\cos\theta$, $\sin\theta = \frac{dy}{d\eta}$, $\cos\theta = \frac{dx}{d\eta}$, 而 b_1, b_2, b_3 为任意常数.

至此,半无矩状态的全部方程得到满足.

---

1) 方程 $\Omega_1\Omega_2 v_0(\eta) = q(\eta)$ 有解的充分必要条件是:

$$\int_0^{\eta_0} q(\eta)d\eta = 0, \quad \int_0^{\eta_0}\frac{dx}{d\eta}q(\eta)d\eta = 0, \quad \int_0^{\eta_0}\frac{dy}{d\eta}q(\eta)d\eta = 0.$$

（二）边界条件、积分常数的确定

前面求得的解在满足了所有方程之后，u 中还有积分常数 C_{01}^0, C_{01}^1, C_{02}^0, C_{02}^1, C_{02}^2, C_{03}^0, C_{03}^1, C_{03}^2, $C_{ij}^k(i \neq 0,\ k = 1, 2, 3, 4)$，此外 v 中还有新的积分常数 b_1, b_2, b_3, S 中有 $S_0(0)$. 为了确定它们，必须利用边界条件. 在做出严格证明之前，我们还不知道半无矩状态到底能满足哪些边界条件. 但是我们知道，从量级上看，半无矩状态的面向物理量是占优势的，所以我们自然会料想对它提面向边界条件. 下面就列出面向边界条件的可能提法，并证明解的存在性.

1. 边界条件的提法

对壳体的每一端，面向边界条件有四种提法，即给定：1）u, v; 2）u, S; 3）T_1, v; 4）T_1, S. 这样，两端配合起来，面向边界条件共有十种提法：① $uv—uv$, ② $uv—uS$, ③ $uv—T_1S$, ④ $uv—T_1v$, ⑤ $uS—T_1v$, ⑥ $T_1v—T_1v$, ⑦ $uS—uS$, ⑧ $T_1S—uS$, ⑨ $T_1S—T_1v$, ⑩ $T_1S—T_1S$. 为了讨论方便，我们把这些边界条件全都化为对 u 的边界条件. 因为 $u = u$, $\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = T_1$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -\dfrac{\partial S}{\partial \eta} - F_1$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = \dfrac{1}{1-\nu^2}\Omega \cdot \Omega_2 v - \dfrac{\partial F_1}{\partial \xi} + \dfrac{\partial F_2}{\partial \eta} + \dfrac{\partial^2}{\partial \eta^2}(rF_n)$，所以这是可能的.

这样，无论在两端给定的是 u, T_1, S, v 中的哪一个，我们都认为给定的是 u, $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial \xi^3}$. 进一步把 u 及其微商在两端的给定值按 φ_{ij} 展开：

$$\left.\begin{array}{l} u|_{\xi=0} = \sum \bar{C}_u^{ij}\varphi_{ij}, \qquad u|_{\xi=l_1} = \sum \bar{\bar{C}}_u^{ij}\varphi_{ij}, \quad (l_1 = l\lambda^{\frac{1}{2}}), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \sum \bar{C}_{u'}^{ij}\varphi_{ij}, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\xi=l_1} = \sum \bar{\bar{C}}_{u'}^{ij}\varphi_{ij}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{5.37}$$

再利用 u 及其微商在 $\xi = 0$ 和 $\xi = l_1$ 的表达式，比较 φ_{ij} 的系数，便得到一系列方程组.

2. C_{ij}^k 的确定（$i \neq 0$）

$i \neq 0$ 的情形，对固定的 i, j, 利用面向边界条件便得到 $C_{ij}^k(k = 1, 2, 3, 4)$ 的方程组. 如果注意到式(5.19)和(5.20)的特点，首先由 $\xi = 0$ 处的边界条件可以确定两个常数，而留下的另两个积分常数则由 $\xi = l_1$ 处的边界条件确定. 我们不难直接验证，对所有十种面向边界条件而言，确定后二常数的方程组的系数行列式(二阶)永远不为零. 所以 $C_{ij}^k(i \neq 0)$ 永远有解且唯一.

3. C_{0j}^k, b_1, b_2, b_3 和 $S_0(0)$ 的确定

与 $C_{ij}^k(i \neq 0)$ 的情况不同，这里的常数并不是在 u 及其各次微商中全出现，所以要确定它们必须直接利用 u, T_1, S, v 在边界上的给定值. 此外，这些常数也并不是对所有可能的面向边界条件提法都存在且唯一. 在各种面向边界条件下建立确定这些常数的方程组，然后再由方程组讨论解的存在性，这并不困难. 但是为了避免赘述，我们只要指出以下事实便够了：

本段所讨论的常数都具有明显的意义．例如，u_{01} 相应于材料力学中杆的拉伸问题[1]，因而其中有两个常数 C_{01}^0 和 C_{01}^1；v^{02} 和 v^{03} 相应于材料力学中梁的弯曲问题(挠度)[2]，因而其中包含八个常数 b_2，b_3，C_{02}^0，C_{02}^1，C_{02}^2，C_{03}^0，C_{03}^1，C_{03}^2；最后，$S_0(\xi)$ 相应于杆的扭转问题，而其中的 $S_0(0)$ 代表自由扭转，b_1 代表绕轴线的刚体转动．

注意 1：在确定本段的常数时，如果位移边界条件提得太少，而力的边界条件提得太多，那就必须(且只需)刚体平衡条件得到满足时才能有解，而且此时会有相应的任意刚体位移出现．

注意 2：如果两端同时出现位移边界条件 v，那么一般说来还要考虑自由扭转所对应的位移 u，v，w．这是因为，如果只考虑半无矩状态的位移，那么由式(5.21)及(5.36)得到 $\int_0^{\eta_0} v\,d\eta=\dfrac{2Ab_1}{R^{*2}}$，$A$ 是断面面积．但是靠一个常数 b_1 未必能对两端给定的 v 值同时使这个条件满足．当然，如果位移中需要计入自由扭转，那么自由扭转的 S 与半无矩状态的 S 相比，将是 λ^{-1} 级的量了．

六、中长壳求解步骤

我们把第五节中的解称为应力状态(C)，它分布于壳体内部．此外，在端头还可能有边界效应($\phi_{1,2}$)，($\phi_{3,4}$)，($\tilde{\phi}_{1,2}$)，($\tilde{\phi}_{3,4}$)，我们把它们统一记为(ϕ)． 现在就讨论如何把(ϕ)和(C)迭加起来使所有边界条件满足，同时还分析，在不同边界条件下，应该按怎样的步骤求解这些应力状态．

第五节证明了状态(C)的存在性．从那里可以看出，只要刚体平衡条件不受破坏，我们总可以求出(C)使之与面载荷平衡且满足面向边界条件．但是我们还不能断言：对一切问题都可以先着手解(C)． 这是因为(C)一般不能满足非面向边界条件． 为了满足非面向边界条件，必须借助于(ϕ)来修正．只有这种修正不会破坏原来已经满足了的面向边界条件时，先着手解(C)才是合理的．

(一) 各物理量中所要保留的应力状态

因为(C)和(ϕ)的能否分步求解，以及求解的次序，都决定于边界条件，所以必须先分析(C)和(ϕ)中的量在边界条件中的作用．为了不使问题过于烦琐，我们暂时仅限于讨论非面向边界条件为齐次的情形，即在边界上给定的非面向物理量全部是零的情形．下面就对每端的十六种可能的边界条件分别讨论，以 $\xi=0$ 一端为例．

1) $uvG_1\tilde{N}_1$(即在此端给定 $uvG_1\tilde{N}_1$)

---

1) 将 u_{01} 求微商两次便得到

$$\frac{d^2u_{01}}{d\xi^2}=-f_1^{01}(\xi)=-\frac{1}{\eta_0}\int_0^{\eta_0}F_1d\eta.$$

2) 将 v^{02} 和 v^{03} 求微商四次，再利用 $\dfrac{d\theta}{d\eta}=\dfrac{1}{r}$，便得到：

$$\frac{d^4v^{02}}{d\xi^4}=\frac{1}{I_y}\int_0^{\eta_0}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\xi}x+F_2\cos\theta+F_n\sin\theta\right)d\eta\quad\left(I_y=\int_0^{\eta_0}x^2d\eta\right),$$

$$\frac{d^4v^{03}}{d\xi^4}=\frac{1}{I_x}\int_0^{\eta_0}\left(\frac{\partial F_1}{\partial\xi}y+F_2\sin\theta-F_n\cos\theta\right)d\eta\quad\left(I_x=\int_0^{\eta_0}y^2d\eta\right).$$

取 (ϕ_1) 和 $(\tilde{\phi}_2)$ 为边界效应的独立应力状态. 由于非面向边界条件是齐次的，所以，G_1 中 $(\tilde{\phi}_2)$ 和 (C) 同量级，$\tilde{N}_1$ 中 (ϕ_1) 和 (C) 同量级. 再利用式(3.1)和(3.6)便知：u、v 中只要 (C)，而 (ϕ_1) 和 $(\tilde{\phi}_2)$ 是高阶小量.

2) $T_1vG_1\tilde{N}_1$

取 (ϕ_1) 和 $(\tilde{\phi}_2)$. G_1 中 $(\tilde{\phi}_2)$ 和 (C) 同级，$\tilde{N}_1$ 中 (ϕ_1) 和 (C) 同级，T_1，v 中只要 (C).

3) $T_1vw'\tilde{N}_1$

取 $(\tilde{\phi}_1)$ 和 $(\tilde{\phi}_2)$. w' 中 $(\tilde{\phi}_2)$ 和 (C) 同级，$\tilde{N}_1$ 中 $(\tilde{\phi}_1)$ 和 (C) 同级，T_1，v 中只要 (C).

4) $uvw'\tilde{N}_1$

取 $(\tilde{\phi}_1)$ 和 $(\tilde{\phi}_2)$. w' 中 $(\tilde{\phi}_2)$ 和 (C) 同级，$\tilde{N}_1$ 中 $(\tilde{\phi}_1)$ 和 (C) 同级，u，v 中只要 (C).

5) $T_1SG_1\tilde{N}_1$

取 $(\tilde{\phi}_2)$，(ϕ_1). G_1 中 $(\tilde{\phi}_2)$ 和 (C) 同级，$\tilde{N}_1$ 中 (ϕ_1) 和 (C) 同级，T_1，S 中只要 (C) [因 $(\tilde{\phi}_2)$ 中，边界上 $S=0$].

6) $uSG_1\tilde{N}_1$

取 $(\tilde{\phi}_2)$，(ϕ_1). G_1 中 $(\tilde{\phi}_2)$ 和 (C) 同级，$\tilde{N}_1$ 中 (ϕ_1) 和 (C) 同级，u，S 中只要 (C) [因 $(\tilde{\phi}_2)$ 中，边界上 $S=0$].

7) $T_1Sw'\tilde{N}_1$

取 $(\tilde{\phi}_1)$，$(\tilde{\phi}_2)$. w' 中 $(\tilde{\phi}_2)$ 和 (C) 同级，$\tilde{N}_1$ 中 $(\tilde{\phi}_1)$ 和 (C) 同级，T_1，S 中只要 (C) [因 $(\tilde{\phi}_2)$ 中，边界上 $S=0$].

8) $uSw'\tilde{N}_1$

取 $(\tilde{\phi}_1)$，$(\tilde{\phi}_2)$. w' 中 $(\tilde{\phi}_2)$ 和 (C) 同级，$\tilde{N}_1$ 中 $(\tilde{\phi}_1)$ 和 (C) 同级，u，S 中只要 (C) [因 $(\tilde{\phi}_2)$ 中，边界上 $S=0$].

9) T_1vG_1w

取 (ϕ_1)，(ϕ_2). G_1 中 (ϕ_2) 和 (C) 同级，w 中 (ϕ_1) 和 (C) 同级，v，T_1 中只要 (C) [因 (ϕ_1) 中，边界上 $T_1=0$].

10) uvG_1w

取 (ϕ_1)，(ϕ_2). G_1 中 (ϕ_2) 和 (C) 同级，w 中 (ϕ_1) 和 (C) 同级，u 中 (ϕ_1) 和 (C) 同级，v 中只要 (C).

11) $T_1vw'w$

取 (ϕ_2)，$(\tilde{\phi}_1)$. w' 中 (ϕ_2) 和 (C) 同级，w 中 $(\tilde{\phi}_1)$ 和 (C) 同级，T_1 中 $(\tilde{\phi}_1)$ 和 (C) 同级，v 中只要 (C).

12) $uvw'w$

取 (ϕ_2)，$(\tilde{\phi}_1)$. w' 中 (ϕ_2) 和 (C) 同级，w 中 $(\tilde{\phi}_1)$ 和 (C) 同级，u 中 $(\tilde{\phi}_1)$ 和 (C) 同级，v 中只要 (C).

13) T_1SG_1w

取 (ϕ_1)，(ϕ_2). G_1 中 (ϕ_2) 和 (C) 同级，S 中 (ϕ_1)，(ϕ_2) 和 (C) 同级，w，T_1 中只要

(C).

14) uSG_1w

取 (ϕ_1), (ϕ_2). G_1 中 (ϕ_2) 和 (C) 同级, S 中 (ϕ_1), (ϕ_2) 和 (C) 同级, w, u 中只要 (C).

15) $T_1Sw'w$

取 (ϕ_2), $(\tilde{\phi}_1)$. w' 中 (ϕ_2) 和 (C) 同级, S 中 $(\tilde{\phi}_1)$, (ϕ_2) 和 (C) 同级, w, T_1 中只要 (C).

16) $uSw'w$

取 (ϕ_2), $(\tilde{\phi}_1)$. w' 中 (ϕ_2) 和 (C) 同级, S 中 $(\tilde{\phi}_1)$, (ϕ_2) 和 (C) 同级, w, u 中只要 (C).

以上十六种情形中, 1)—8) 属于同类,边界条件中没有 w; 9)—12) 属于同类, 其中 w, v 同时出现; 13)—16) 属于同类,其中 w, S 同时出现.

(二) 求解顺序

根据(一)中各条的讨论可以断言:

(1) 如果两端的边界条件都属于 1)—9) 型[1], 我们就一定可以先在面向边界条件下(暂时放弃非面向边界条件)求 (C), 然后再用边界效应 (ϕ) 来修补非面向边界条件. 这样做法的合理性是由于第二步的进行不会引起第一步结果的破坏.

(2) 只要有一端的边界条件属于 10)—12) 型,一般说来 (1) 中的求解顺序就是行不通的. 例如对 10) 型而言, 当 (ϕ_1) 的 w 与 (C) 的 w 同级时, (ϕ_1) 的 u 也就和 (C) 的 u 同级,这样,在用 (ϕ_1) 修补 w 时又会破坏已经满足了的 u 的边界条件.

(3) 特殊情形: 如果在 10)—12) 型的边界条件中, 边界上 v 和 w 的给定值满足 $\frac{w}{r}+\frac{\partial v}{\partial \eta}=0$ (特别是边界条件全为齐次的时候),那么,当 v 的边界条件得到满足时, w 的边界条件也就自动满足,这样也就不需要 (ϕ) 来修正 w 的边界条件了 (即 (ϕ_1) 或 $(\tilde{\phi}_1)$ 为零). 当两端的边界条件都属于 10)—12) 型的特殊情形时,或者有一端属于 10)—12) 型的特殊情形而另一端属于 1)—9) 型时, (1) 中的求解顺序就有效.

(4) 如果在某端给定的边界条件属于 13)—16) 型, 那就可把 $w=0$ (我们暂限于齐次的) 换成 $v=k$ (k 为待定常数), 并且在面向边界条件 vT_1 或 vu 之下求 (C). 下一步是用边界效应修正 S,但是从 (ϕ) 里 S 的表达式看出,这种修正不是永远能办到的. 要想使这成为可能,充分必要条件是被修正的差额 S^* 满足 $\int_0^{\eta_0} S^* d\eta=0$,由此便得到含有 k 的一个方程. 如果两端都属于 13)—16) 型,那么便产生两个待定常数 k_1 和 k_2, 最后也得到两个方程(对于圆柱壳,由于扭矩平衡条件, 这两个方程将是相关的,因而 k_1, k_2 中只能定出一个来). 总之,如果两端的边界条件都是 13)—16) 型的, 或者一端属于 13)—16) 型而另一端属于 1)—9) 型, 或者一端是 13)—16) 型而另一端是 10)—12) 型的特殊情况,那么求解就可按 (1) 中的顺序进行,但在求解过程中须求出待定常数 k (或 k_1, k_2).

---

[1] 本来 9)—12) 中都有 w 和 v,所以是同一类,但是由于边界上 (ϕ_1) 的 $T_1=0$,所以 1)—9) 算同一类了.

（三）非面向边界条件为非齐次的情形

如果非面向边界条件为非齐次的，那就总可以用适当的边界效应（ϕ）进行修补，把问题的非面向边界条件转化为齐次的．以后的问题讨论同前．

七、例 题

水平放置的圆柱壳内盛满比重为 γ 的液体，壳体自重不计．在 $\xi=0$ 处，$u=v=w=w'=0$；在 $\xi=l_1=\frac{L}{R}\lambda^{\frac{1}{2}}$ 处，$T_1=S=w=w'=0$．求状态（C）．

这个问题的边界条件如图 1 所示，在 $\xi=0$ 处是完全固定的，而在 $\xi=l_1$ 处，壳体是嵌入完全可以滑动的深槽中．因为

$$F_1=F_2=0,\quad F_n=\frac{R^2}{Eh}\lambda^{-1}r(1+\sin\theta),$$

$$R^*=R,\quad r=1,\quad x=\sin\theta,\quad y=-\cos\theta,$$

所以，$F_n^{02}(\zeta)=-\frac{R^2r}{Eh}\lambda^{-1}\zeta$（其余为零）．

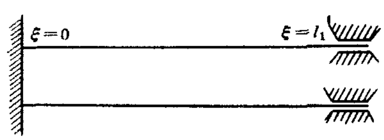

图 1

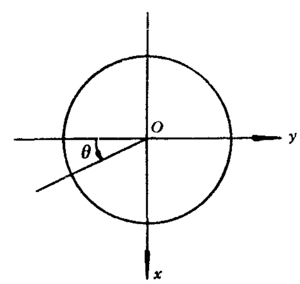

图 2

根据第六节的分析，可以先求状态（C），但是要注意，$\xi=l_1$ 处的面向边界条件应换为 $T_1=0$，$v=\text{const.}=k$．

容易求得：

$$C_{02}^1=-\frac{1}{8}\frac{R^2r}{Eh}\lambda^{-1}l_1^2,\quad C_{02}^2=\frac{5}{8}\frac{R^2r}{Eh}\lambda^{-1}l_1,$$

其余常数全为零．此外，和 k 相对应的还有自由扭转 $v^{(扭)}=\frac{\xi}{l_1}k$，但是由 $\int_0^{2\pi}S^*d\eta=0$ 定出 $k=0$．

值得提出的是，如果错误地在 $\xi=l_1$ 处采用边界条件 $T_1=0$，$S=0$，那么得到的结果将是：

$$C_{02}^1=-\frac{R^2r}{2Eh}\lambda^{-1}l_1^2,\quad C_{02}^2=\frac{R^2r}{Eh}\lambda^{-1}l_1.$$

参 考 文 献

[1] Наймарк, М. А., Линейные дифференциальные операторы, Москва, 1954.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАМКНУТЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ ОЧЕРТАНИЕМ И АНАЛИЗ ЕГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ

Гао Юй-чэнь　　Хуан Кэ-чжи
(Политехнический институт Цинхуа)

Резюме

В предлагаемой работе дан анализ напряженного состояния в цилиндрической оболочке средней длины с произвольным поперечным очертанием и его метода решения. Полубезмоментное напряженное состояние существует по всей длине оболочки, а простой краевой эффект только в узких зонах вблизи краев.

Изучены все возможные случаи граничных условий. В большинстве случаев можно сначала найти полубезмоментное состояние с учетом «Тангенциальных граничных условий» (u, T_1; v, S), а потом краевые эффекты с учетом «нетангенциальных граничных условий» (w, $\tilde{N}_1$; $\partial w/\partial\alpha$, G_1). Исключение представляет случай, например, когда в граничные условия входят как S, так и w. В этом случае, процедур решения состоит в следующем: 1) найти полубезмоментное состояние, заменяя граничное условие для w условием для v при помощи соотношения $\partial v/\partial\eta + w/r = 0$, 2) найти простой краевой эффект с учетом граничного условия для S.