第8卷 第2期　　力学学报　　Vol. 8, No. 2
1965年6月　　ACTA MECHANICA SINICA　　June, 1965

軸对称变形的弹性圓板和圓扁壳問題的联合解法*

褚宗良
(东北工学院)

复杂載荷作用下圓板和圓扁壳的大撓度和稳定問題，目前还缺少工程上的有效解法．下面我們給出，在定常温度和軸对称径向力、横向力的作用下，弹性圓板和圓扁壳問題的差分法与摄动法[1](或逐次逼近法[2])的联合解法．

一、基本方程和边界条件

按照 Kármán 大撓度理論[3]，在軸对称径向載荷 f 和横向載荷 q 的作用下，圓扁壳的平衡方程为：

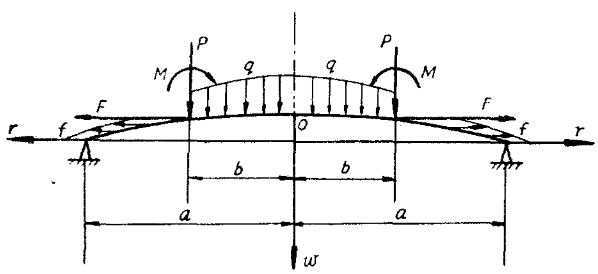

图 1

$$N_r - N_t + r\frac{dN_r}{dr} + rf = 0, \quad (1)$$

$$M_r - M_t + r\frac{dM_r}{dr} + rQ = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dr}(rQ) = rq + \frac{d}{dr}[rN_r(\bar{\theta}+\theta)]; \quad (\text{II}-1)$$

設温差函数 $T(r, z) = T_1(r) + T_2(r)z$ 是 r 的分段連續函数，并設材料的弹性模量 E，Poisson 比 μ 和綫膨胀系数 α 都是常数，則內力与位移間的关系为：

$$N_r = D_1\left[\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r} + \bar{\theta}\theta + \frac{\theta^2}{2} - \alpha(1+\mu)T_1\right], \quad (3)$$

$$N_t = D_1\left[\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr} + \mu\bar{\theta}\theta + \mu\frac{\theta^2}{2} - \alpha(1+\mu)T_1\right], \quad (4)$$

$$M_r = -D_2\left[\frac{d\theta}{dr} + \mu\frac{\theta}{r} + \alpha(1+\mu)T_2\right], \quad (5)$$

$$M_t = -D_2\left[\frac{\theta}{r} + \mu\frac{d\theta}{dr} + \alpha(1+\mu)T_2\right], \quad (6)$$

以上諸式中，N_r 和 N_t 是径向和切向薄膜內力，M_r 和 M_t 是径向和切向弯矩，Q 是径向剪力，θ 是变形后扁壳中面法綫的轉角，$\bar{\theta} = \frac{d\bar{w}}{dr}$ 是变形前扁壳中面法綫的傾角，$\bar{w}$ 是变形前中面的撓度，$D_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}$ 是拉压刚度，$D_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ 是弯曲刚度，u 是扁壳中面

* 1963年8月28日收到．

的径向位移.

定义薄膜內力差为 $N_- = N_r - N_t$，薄膜內力和为 $N_+ = N_r + N_t$，弯矩差为 $M_- = M_r - M_t$，弯矩和为 $M_+ = M_r + M_t$，由以上諸式可得:

$$\frac{d}{dr}(r^2N_-) = r^2\left[-(1-\mu)f + \alpha D_1(1-\mu^2)\frac{dT_1}{dr} + D_1(1-\mu^2)\frac{1}{r}\left(\bar{\theta}\theta + \frac{\theta^2}{2}\right)\right], \tag{I-1}$$

$$\frac{dN_+}{dr} = -(1+\mu)f - \alpha D_1(1-\mu^2)\frac{dT_1}{dr} - D_1(1-\mu^2)\frac{1}{r}\left(\bar{\theta}\theta + \frac{\theta^2}{2}\right), \tag{I-2}$$

$$\frac{d}{dr}(ru) = r\left[\frac{N_+}{D_1(1+\mu)} + 2\alpha T_1 - \bar{\theta}\theta - \frac{\theta^2}{2}\right], \tag{I-3}$$

$$\frac{d}{dr}(r^2M_-) = r^2\left[-(1-\mu)Q + \alpha D_2(1-\mu^2)\frac{dT_2}{dr}\right], \tag{II-1}$$

$$\frac{dM_+}{dr} = -(1+\mu)Q - \alpha D_2(1-\mu^2)\frac{dT_2}{dr}, \tag{II-2}$$

$$\frac{d}{dr}(r\theta) = -r\left[\frac{M_+}{D_2(1+\mu)} + 2\alpha T_2\right]. \tag{II-3}$$

轉角 θ 与挠度 w 間的关系为

$$\frac{dw}{dr} = \theta. \tag{II-4}$$

以上微分关系 (I-1), (I-2), (I-3), (II-1), $\cdots$, (II-4) 便是我們的基本方程.

現在来看边界条件. 根据变形的軸对称性,在板心 $r = 0$ 处,有:

$$(N_-)_0 = 0,\ u_0 = 0,\ Q_0 = 0,\ (M_-)_0 = 0,\ \theta_0 = 0. \tag{III-1—5}$$

根据变形的連續条件,在載荷(温度)改变的 $r = b$ 处,有:

$$[u]_b = 0,\ [\theta]_b = 0,\ [w]_b = 0, \tag{III-6, 7, 8}$$

式中 [　] 表示有关各量的突变値.

利用式(3), (5), (III-6, 7) 及力的平衡条件 $[N_r]_b = -F$, $[M_r]_b = -M$, 有:

$$\begin{aligned}
[N_+]_b &= -(1+\mu)F - \alpha D_1(1-\mu^2)[T_1]_b,\\
[N_-]_b &= -(1-\mu)F + \alpha D_1(1-\mu^2)[T_1]_b,\\
[Q]_b &= P - F\theta_b,\\
[M_+]_b &= -(1+\mu)M - \alpha D_2(1-\mu^2)[T_2]_b,\\
[M_-]_b &= -(1-\mu)M + \alpha D_2(1-\mu^2)[T_2]_b,
\end{aligned} \tag{III-9—13}$$

式中 F, P 和 M 是作用在 $r = b$ 处的圓周径向力、横向力和力偶.

設板边 $r = a$ 处的水平位移和轉动均受弹性約束，其刚度系数分别为 k_1 和 k_2, 则由式(3)和(5),有

$$(N_+)_a = \frac{k_1(1+\mu)a - Eh}{k_1(1-\mu)a + Eh}(N_-)_a - \frac{2k_1\alpha Eha}{k_1(1-\mu)a + Eh}(T_1)_a, \tag{III-14}$$

$$(M_+)_a = \frac{12k_2(1+\mu)a + Eh^3}{12k_2(1-\mu)a - Eh^3}(M_-)_a - \frac{2k_2\alpha Eh^3a}{12k_2(1-\mu)a - Eh^3}(T_2)_a. \tag{III-15}$$

設板边 $r = a$ 处的鉛直位移受刚性約束,这时有

$$w_b = 0. \tag{III-16}$$

二、联合解法及例

现在以板壳的大挠度問題为例,說明联合解法的步驟如下:

1. 設 $\theta = 0$,从径向載荷 f 开始,根据微分关系式(I),按 N_-, N_+ 和 u 的次序,考慮相应的边界条件(III),应用差分法进行数值計算,得到第一次近似值 N_{-1}, N_{+1} 和 u_1,从而得到 N_{r1} 和 N_{t1}.

2. 設 $N_r = 0$,从横向載荷 q 开始,根据微分关系式(II),按 Q, M_-, M_+, θ 和 w 的次序,考慮相应的边界条件(III),应用差分法进行数值計算,得到第一次近似值 Q_1, M_{-1}, $\cdots$, w_1.

对中心作用集中力以及圓周力和圓周力偶距中心較近的情形,最好应用其他方法.

3. 第二次近似值是在第一次近似值上再加校正值 N_{r2}^*, $\cdots$, w_2^*. 然后,把它們代入各量間的微分关系式,显然看出,对各綫性微分关系式,校正值間仍保留着簡单关系,即

$$\frac{dM_{+2}^*}{dr} = -(1+\mu)Q_2^*, \cdots, \frac{dw_2^*}{dr} = \theta_2^*.$$

但对非綫性微分关系式,还应略去高次項,这就得到

$$\frac{d}{dr}(r^2 N_{-2}^*) = D_1(1-\mu^2) r \left(\bar{\theta}\theta_1 + \frac{\theta_1^2}{2}\right),$$

$$\frac{dN_{+2}^*}{dr} = -D_1(1-\mu^2)\frac{1}{r}\left(\bar{\theta}\theta_1 + \frac{\theta_1^2}{2}\right),$$

$$Q_2^* = N_{r1}(\bar{\theta} + \theta_1).$$

这样,就可以根据已求得的 θ_1 和 N_{r1},按照第一、二步的方法,利用上述微分关系式,求出各量的第二次校正值,从而得到第二次近似值.

4. 类似地計算第三、四、……次近似值,直至滿足精度要求为止.

对于穩定問題則是应用逐次逼近法[2]与差分法联合求解,其步驟与上述的类似.

我們这里用联合解法算了两个例子,結果还比較好.

第一个例子是求簡支定位圓板的最大内力和挠度,圓板所受的力为圓周力偶 $M = qa^2/2$,圓周力 $P = qa$,分布載荷 q(图 2).

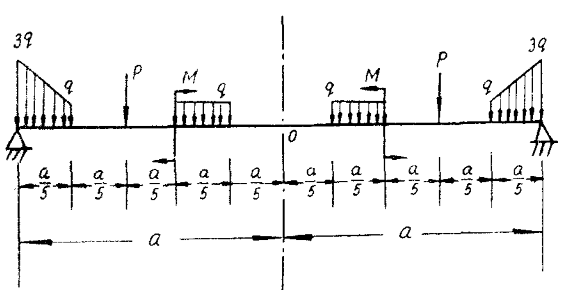

图 2

計算到第三次近似值,当 $\mu = 0.25$ 时,結果給出:

$$N_{\max} = 5.68\frac{q^2a^6}{Eh^2} - 146.3\frac{q^4a^{14}}{E^2h^{10}},$$

$$M_{\max} = 0.739qa^2 - 9.94\frac{q^3a^{10}}{E^2h^8} + 37.05\frac{q^5a^{18}}{E^4h^{16}},$$

$$w_{\max} = 2.62\frac{qa^4}{Eh^3} - 31.9\frac{q^3a^{12}}{E^3h^{11}} + 1214\frac{q^5a^{20}}{E^5h^{19}}.$$

为了驗証此法的可靠性，又对均布載荷作用下簡支定位圓板进行計算，結果是

$$w_{\max} = 0.738\,\frac{qa^4}{Eh^3} - 0.768\,\frac{q^3a^{12}}{E^3h^{11}} + 2.37\,\frac{q^5a^{20}}{E^5h^{19}},$$

与 Vincent 解[1]比較，誤差不超过千分之五.

第二个例子是求簡支可动球面扁壳发生跳跃时的載荷. 扁壳中面方程是

$$\tilde{w} = -H\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right),$$

作用着圓周力 P（图 3）.

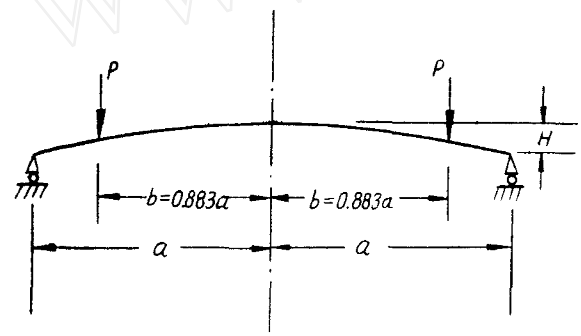

图　3

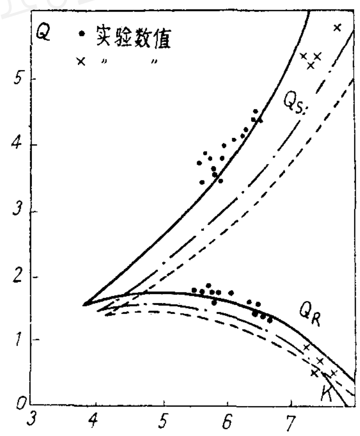

图　4

計算到第二次近似値，再經过适当換算后（参見文献 [3, 4]），得到与跳进載荷相当的 Q_S 和与跳回載荷相当的 Q_R 的表达式:

$$Q_S = (0.351K + 0.000292K^3) + 0.00882(K^2 - 15.25)^{\frac{3}{2}},$$

$$Q_R = (0.351K + 0.000292K^3) - 0.00882(K^2 - 15.25)^{\frac{3}{2}},$$

式中

$$Q = \frac{2bPa^2}{Eh^4}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\left(1 - 0.2453\,\frac{b^2}{a^2}\right), \quad K = \frac{2H}{h}.$$

Q_S, Q_R 与K的关系如图 4 上的点綫所示，而实綫和虚綫分别表示文 [3] 中的半經驗公式和用能量法得到的表达式的曲綫. 可以看出，我們的結果比用能量法得到的結果更接近于实驗結果.

参　考　文　献

[1] Vincent, J. J., The bending of a thin circular plate, *Phil. Mag.*, **12**, 1931, 185—196.
[2] Тимошенко, С. П., Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, Москва, 1946, 97—100.
[3] 胡海昌，球面扁薄圆壳的跳跃问题，弹性圆薄板大挠度问题，中国科学院出版，北京，1954，76—98.
[4] Феодосьев, В. И., К расчету хлопающей мембраны, *ПММ*, **10**, 1946, 295—300.
[5] Григолюк, Э. И., Некоторые задачи устойчивости пластин при неравномерном нагреве, *И. Б. АН СССР*, **6**, 1950.

МЕТОД КОМБИНАЦИИ УПРУГИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Цу Чжун-лян

(Северо-восточный политехнический институт)