

关于周期应力平面弹性基本問題*

路 見 可
(武汉大学)

提 要

本文考虑了一般的平面弹性問題,只假定应力是周期的而且有界。除此之外,無論对一个周期带中所含孔的个数或其边界的形状以及对孔边或无穷远处的应力,都不作其他限制。文中把 Колосов 函数的多值部分与非周期部分分离出来,得到了它們的一般表达式;证明了这时位移必定是准周期的,并指出了第一、第二基本問題的一般提法。对于有周期直綫裂縫(在与周期方向平行的一直綫上)的情况,本文利用周期 Riemann 边值問題的解法作出了解答;并对一个周期带中只有一个裂縫的特殊情况,把解写成了完全确定的有限形式。

关于周期应力平面弹性問題,过去已做过不少工作。其中关于周期圓孔的情形,研究的人更多,例如文献[1—3]。对于任意形状周期孔的情况,Савин^[4]最初作了研究,并把問題化为 Fredholm 积分方程(或参看文献[5])。所有这些工作,或者孔形比較特殊,或者边值条件比較特殊,且在一个周期带內只假定有一个孔,对位移的可能情况也很少討論。这方面的工作情况可参看綜合論文[6]。本文則只假定了应力是周期的并且有界,通过找出 Колосов 函数的一般表达式,证明了这时位移总是准周期的,并指出了第一、第二基本問題的正确提法。

关于平面中有双周期排列的孔的类似問題,过去也曾有过研究^[7,8]。Koiter 指出,当一个周期趋于无穷时,問題便成为单周期情况。但是,在双周期情况下,一个周期四边形中孔边外应力主矢量必然为零,并且也不产生无穷远处的应力問題。因此,双周期問題并不能概括单周期情况。

此外,本文用前文[9]中的結果,求解了弹性平面中有周期直綫裂縫时的基本問題,所用方法系由 Мухелишвили 的方法(見文献[10], § 120)轉化而来。

一、Колосов 函数的一般表达式

設弹性平面中有一列以 $a\pi$ 为周期的孔,其边界为 L_j , $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 并且

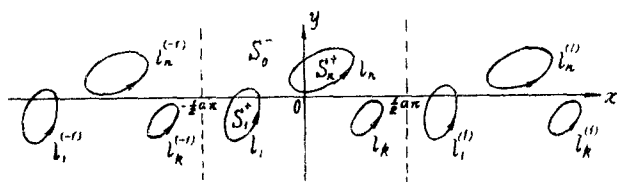


图 1

* 1962年7月1日收到。

每一 L_j 中含有 n 条逐段光滑封闭曲线 $l_k^{(j)}$, $k = 1, 2, \dots, n$ (图 1); 而对于同一 k , $l_k^{(j)}$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是周期地排列的. 把 $l_k^{(0)}$ 簡記为 l_k . 取所有曲线的反时针向为正向, 把弹性体所占区域記作 S^- , 把 $l_k^{(j)}$ 所围区域記作 $S_k^{(j)+}$. $S_k^{(0)+}$ 則簡記为 S_k^+ , 并記 $S_0^+ = \sum_{k=1}^n S_k^+$. 带形区域 $|x| < \frac{1}{2}a\pi$ 記作 S_0 , 并記 $S_0^- = S_0 - S_0^+$.

記 S^- 中任何点 $z = x + iy$ 处的应力状态为 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, 位移为 $D(z) = u + iv$, 大家知道, 它們可表作

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}], \quad (1.1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \quad (1.2)$$

$$2\mu D = 2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (1.3)$$

其中 μ 为弹性体的剪切弹性模数, κ 是与 Poisson 比 σ 有关的一个常数 ($1 < \kappa < 3$); 而 $\varphi(z), \psi(z)$ 是 S^- 中(一般是多值的)解析函数, 并且 $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z)$ 在 S^- 中全純.

我們假定: 应力是以 $a\pi$ 为周期的, 且在 $z = \pm\infty i$ 处保持有界. 根据这个假定, 只需指出 L_0 上的外应力就足以說明所有孔边上的应力. 把 l_k 上的外应力主矢量記作 $X_k + iY_k$, 这时 L_0 上的外应力主矢量就是

$$X + iY = \sum_{k=1}^n (X_k + iY_k). \quad (1.4)$$

把 $z = \pm\infty i$ 处的应力記为

$$\sigma_{\pm} = \sigma_y(\pm\infty i), \quad \tau_{\pm} = \tau_{xy}(\pm\infty i), \quad h_{\pm} = \sigma_x(\pm\infty i). \quad (1.5)$$

由应力周期性条件, 考察周期带 S_0^- 上的平衡, 立刻可知

$$\sigma_- - \sigma_+ = Y/a\pi, \quad \tau_- - \tau_+ = X/a\pi. \quad (1.6)$$

此外須注意, 因为应力在 $z = \pm\infty i$ 处有界, 由式(1.1)可知, $\operatorname{Re} \Phi(z)$ 在 $z = \pm\infty i$ 处有界. 設 $\zeta = \operatorname{tg} z/a$ 时, $\Phi(z)$ 变成 $\Phi_*(\zeta)$, 于是 $\operatorname{Re} \Phi_*(\zeta)$ 在 $\zeta = \pm i$ 处有界, 由此可見 $\zeta = \pm i$ 是 $\Phi_*(\zeta)$ 的正則点, 从而 $\Phi(z)$ 在 $z = \pm\infty i$ 处有界. 又因

$$\Phi'(z) = \Phi'_*(\zeta) \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\Phi'_*(\zeta)}{a \cos^2 \frac{z}{a}},$$

所以

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty i} z\Phi'(z) = 0. \quad (1.7)$$

又由式(1.2)可知, $\Psi(\pm\infty i)$ 也是有界的.

我們希望找出 $\varphi(z), \psi(z)$ 的一般表达式, 使它們的多值部分和非周期部分都分离出来.

在每一 S_k^+ 內任取一点 z_k . 大家知道, $\varphi(z)$ 繞过洞 $S_k^{(j)+}$ 的多值性部分是

$$-\frac{1}{2\pi(\kappa+1)}(X_k + iY_k) \lg(z - z_k - ja\pi).$$

为了分离出 $\varphi(z)$ 的整个多值部分, 这里不能直接把上式对 k, j 求和, 因为这样会得到

发散级数。由于把上式中的对数因子改为

$$\lg\left(1 - \frac{z - z_k}{ja\pi}\right) \quad (j \neq 0)$$

时并不改变多值特征,于是,利用 $\sin[(z - z_k)/a]$ 的无穷乘积表示式,立刻知道,

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi(\kappa + 1)} \sum_{k=1}^n (X_k + iY_k) \lg \sin \frac{z - z_k}{a} + \varphi^*(z), \quad (1.8)$$

其中 $\varphi^*(z)$ 已是 S^- 内的全纯函数。同理可得

$$\psi(z) = \frac{\kappa}{2\pi(\kappa + 1)} \sum_{k=1}^n (X_k - iY_k) \lg \sin \frac{z - z_k}{a} + \psi^*(z), \quad (1.9)$$

其中 $\psi^*(z)$ 也在 S^- 内全纯,从而

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2a\pi(\kappa + 1)} \sum_{k=1}^n (X_k + iY_k) \operatorname{ctg} \frac{z - z_k}{a} + \Phi^*(z), \quad (1.10)$$

$$\Psi(z) = \frac{\kappa}{2a\pi(\kappa + 1)} \sum_{k=1}^n (X_k - iY_k) \operatorname{ctg} \frac{z - z_k}{a} + \Psi^*(z), \quad (1.11)$$

这里已令 $\Phi^*(z) = \varphi^*(z)$, $\Psi^*(z) = \psi^*(z)$ 。

根据文献[5] § 55 中的结果,由应力的周期性可知,

$$\Phi(z + a\pi) = \Phi(z) + i\alpha, \quad \Psi(z + a\pi) = \Psi(z) - a\pi\Phi'(z),$$

其中 α 是某实数。但由于 $\Phi(\pm\infty i)$ 有界,立刻知道 $\alpha = 0$ 。因此对应地便有

$$\Phi^*(z + a\pi) = \Phi^*(z),$$

$$\Psi^*(z + a\pi) = \Psi^*(z) - a\pi\Phi'(z) =$$

$$= \Psi^*(z) - \frac{1}{a\pi(\kappa + 1)} \sum_{k=1}^n \frac{X_k + iY_k}{\sin^2 \frac{z - z_k}{a}} - a\pi\Phi^*(z).$$

把这两式积分,注意 φ^* , ψ^* 都是单值的,便有

$$\left. \begin{aligned} \varphi^*(z + a\pi) &= \varphi^*(z) + a\pi\beta, \\ \psi^*(z + a\pi) &= \psi^*(z) - a\pi\varphi'(z) + \gamma = \\ &= \psi^*(z) + \frac{1}{2\pi(\kappa + 1)} \sum_{k=1}^n (X_k - iY_k) \operatorname{ctg} \frac{z - z_k}{a} - a\pi\Phi^*(z) + \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

其中 β , γ 是某二复数。

把式(1.3)中的 z 改为 $z + a\pi$, 再与式(1.3)相减,以式(1.9),(1.10)代入,并利用式(1.12),使得

$$2\mu[D(z + a\pi) - D(z)] = a\pi\kappa\beta - \bar{\gamma}.$$

如果不计弹性体的刚性旋转,则还可认为上式右边是一实数。由此可见,这时位移必定是准周期的,即

$$2\mu[u(z + a\pi) - u(z)] = a\pi q, \quad v(z + a\pi) - v(z) = 0, \quad (1.13)$$

其中 q 为某实常数。由前式可知,

$$\gamma = a\pi(\kappa\bar{\beta} - q). \quad (1.14)$$

这样,式(1.12)就成为

$$\begin{aligned}\varphi^*(z + a\pi) &= \varphi^*(z) + a\pi\beta, \\ \psi^*(z + a\pi) &= \psi^*(z) - a\pi\varphi'(z) + a\pi(\kappa\bar{\beta} - q).\end{aligned}$$

再令

$$\left. \begin{aligned}\varphi_0(z) &= \varphi^*(z) - \beta z, \\ \psi_0(z) &= \psi^*(z) + z\varphi'(z) - (\kappa\bar{\beta} - q)z,\end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

易見它們已是以 $a\pi$ 为周期的在 S^- 中全純的函数.

現在利用 $z = \pm\infty i$ 处的应力来决定 β 和 q , 由式(1.10), (1.11),

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2a\pi(\kappa+1)} \sum_{k=1}^n (X_k + iY_k) \operatorname{ctg} \frac{z - z_k}{a} + \varphi'_0(z) + \beta, \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \frac{\kappa}{2a\pi(\kappa+1)} \sum_{k=1}^n (X_k - iY_k) \operatorname{ctg} \frac{z - z_k}{a} + \psi'_0(z) + \\ &+ \frac{1}{2a\pi(\kappa+1)} \sum_{k=1}^n (X_k + iY_k) \left(\operatorname{ctg} \frac{z - z_k}{a} - \frac{z}{a \sin^2 \frac{z - z_k}{a}} \right) - \\ &- \varphi'_0(z) - z\varphi''_0(z) - (\beta - \kappa\bar{\beta} + q).\end{aligned} \quad (1.17)$$

由于 $\Phi(\pm\infty i)$, $\Psi(\pm\infty i)$ 有界, 所以 $\varphi'_0(z) = \Phi_0(z)$, $\psi'_0(z) = \Psi_0(z)$ 也有界. 再由式(1.8), 便知道

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty i} z\varphi'_0(z) = 0. \quad (1.18)$$

此外, 注意 $\varphi_0(z)$ 是周期函数, 故

$$0 = \frac{1}{a\pi} [\varphi_0(z + a\pi) - \varphi_0(z)] = \frac{1}{a\pi} \int_z^{z+a\pi} \Phi_0(z) dz = \Phi_0(\pm\infty i),$$

其中最后的等式是这样得到的: 把积分路径看成从 z 到 $z + a\pi$ 的直线段, 把 $\Phi_0(z)$ 的实部与虚部分开, 分别应用积分中值定理, 然后令 $z \rightarrow \pm\infty i$ 即得. 同理, $\Psi_0(\pm\infty i) = 0$. 由此也易知 $\varphi_0(\pm\infty i)$, $\psi_0(\pm\infty i)$ 有界.

在式(1.1), (1.2)中消去 $\sigma_{\pm}$, 并令 $z \rightarrow \pm\infty i$, 由以上說明以及式(1.16), (1.17), 便得

$$\sigma_{\pm} + i\tau_{\pm} = \mp \frac{Y - iX}{2a\pi} + (\kappa + 1)\bar{\beta} - q. \quad (1.19)$$

把这两式相減, 便再次得到平衡条件(1.6); 把这两式相加, 取共軛值, 得

$$(\kappa + 1)\beta - q = \frac{\sigma_- + \sigma_+}{2} - i \frac{\tau_- + \tau_+}{2}. \quad (1.20)$$

另一方面, 由式(1.16), (1.17), 有

$$\Phi(\pm\infty i) = \mp \frac{X - iY}{2a\pi(\kappa + 1)} + \beta.$$

于是由式(1.1)立刻知道,

$$h_{\pm} + \sigma_{\pm} = \mp \frac{2Y}{a\pi(\kappa + 1)} + 2(\beta + \bar{\beta}). \quad (1.21)$$

由此式可以看出, $h_{\pm}$ 不是任意的, 必須滿足条件

$$h_+ + \sigma_+ + \frac{2Y}{a\pi(\kappa + 1)} = h_- + \sigma_- - \frac{2Y}{a\pi(\kappa + 1)},$$

再由式(1.6)可以看出,也就是必须满足条件

$$h_- - h_+ = \frac{3 - \kappa}{\kappa + 1} \frac{Y}{a\pi}. \quad (1.22)$$

最后,由式(1.20),(1.21)便容易算出

$$q = \frac{1}{4} [(\kappa + 1)h_+ - (3 - \kappa)\sigma_+] = \frac{1}{4} [(\kappa + 1)h_- - (3 - \kappa)\sigma_-]. \quad (1.23)$$

再把它代回式(1.20),便可求得

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{4} (h_+ + \sigma_+) + \frac{Y - iX}{2a\pi(\kappa + 1)} - \frac{i\tau_+}{\kappa + 1} = \\ &= \frac{1}{4} (h_- + \sigma_-) - \frac{Y - iX}{2a\pi(\kappa + 1)} - \frac{i\tau_-}{\kappa + 1}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

这样, β, q 都由 $z = \pm \infty i$ 处的应力状况和一个周期带内孔边外应力主矢量决定,而与孔边外应力分布状况无关.

把以上结果代回式(1.8),(1.9),最终便得

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi(\kappa + 1)} \sum_{k=1}^n (X_k + iY_k) \lg \sin \frac{z - z_k}{a} + \beta z + \varphi_0(z), \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{\kappa}{2\pi(\kappa + 1)} \sum_{k=1}^n (X_k - iY_k) \lg \sin \frac{z - z_k}{a} + \\ &+ \frac{z}{2a\pi(\kappa + 1)} \sum_{k=1}^n (X_k + iY_k) \operatorname{ctg} \frac{z - z_k}{a} + (\kappa\bar{\beta} - \beta + q)z - \\ &- z\varphi'_0(z) + \psi_0(z), \end{aligned} \quad (1.26)$$

其中 q, β 分别由式(1.23),(1.24)给出,而 $\varphi_0(z), \psi_0(z)$ 是两个以 $a\pi$ 为周期的在 S^- 中全纯的函数. 这样,我们便分离出了 φ, ψ 的多值部分与非周期部分.

文献[11] § 10 也给出了周期应力条件下 φ, ψ 的一般表达式,但没有分离出多值部分;又由于没有假定应力有界,表达式中一些常数间的联系也就没有了.

二、基本问题的提法

第一基本问题 已知孔边 L 上的周期应力 $X_n(t) + iY_n(t)$ 以及在 $z = -\infty i$ (或 $z = +\infty i$) 处的应力状态,求弹性平衡. 这是在应力为周期并且有界的条件下问题的最一般的提法. 这时,由式(1.6),(1.22)知,在 $z = +\infty i$ (或 $z = -\infty i$) 处的应力也是已知的,从而由式(1.23),(1.24), β 和 q 也是已知的.

这问题可化为下列边值问题:

$$\varphi(t) + \overline{t\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + C(t), \quad t \in L, \quad (2.1)$$

其中 $C(t)$ 在各孔边上待定常数,而

$$f(t) = -i \int_0^t (X_n + iY_n) ds^{(1)}, \quad t \in L.$$

1) 与文献[10] § 41 相比较,等式右边多了一个负号,这是因为弹性体在 L 正向右侧的缘故.

把式(1.25), (1.26)代入式(2.1), 使得

$$\varphi_0(t) + (t - \bar{t})\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\varphi_0(t)} = f_0(t) + C(t), \quad (2.2)$$

其中已令

$$\begin{aligned} f_0(t) = & \frac{1}{2\pi(\kappa + 1)} \sum_{k=1}^n (X_k + iY_k) \lg \sin \frac{z - z_k}{a} - \\ & - \frac{\kappa}{2\pi(\kappa + 1)} \sum_{k=1}^n (X_k + iY_k) \lg \sin \frac{\bar{t} - \bar{z}_k}{a} + \\ & + \frac{t - \bar{t}}{2a\pi(\kappa + 1)} \sum_{k=1}^n (X_k + iY_k) \operatorname{ctg} \frac{t - z_k}{a} - \\ & - (\beta + \bar{\beta})t - (\kappa\beta - \bar{\beta} + q)\bar{t} + f(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

这里 $f_0(t)$ 显然已是 L 上的单值函数. 至于 $C(t)$, 当 $t \in L_k^{(j)}$ 时, 所取常数不都是独立的, 它們間的关系如何要看式(2.3)中各对数所取的分支間的关系而定. 例如, 先取定 l_k 上的 $\lg \sin(t - z_k)/a$ 的一确定分支, 然后认为, 当 $t + ja\pi \in l_k^{(j)}$ 时,

$$\lg \sin \frac{t + ja\pi - z_k}{a} = \lg \sin \frac{t - z_k}{a} + j\pi i,$$

则由式(2.3)易見,

$$f_0(t + a\pi) - f_0(t) = -\frac{Y - iX}{2} - [(\kappa + 1)\beta + q]a\pi,$$

于是,

$$C(t + a\pi) - C(t) = \frac{Y - iX}{2} + [(\kappa + 1)\beta + q]a\pi = a\pi(\sigma_- - i\tau_- + 2q).$$

总之, 式(2.1)中待定常数实际上只有 n 个: 相应于每一 $l_k (k = 1, \dots, n)$ 上有一个. 此外, 还要注意, 在解式(2.2)时, 应该要求 $\varphi_0(\pm\infty i)$, $\psi_0(\pm\infty i)$ 有界.

上述边值問題可化为 Fredholm 积分方程来求解, 方法見文献 [5] § 55, 不过那里假定了一周期带中只有一孔. 对于多孔情况, 可采用文献 [10] § 102 处理非周期情况时的方法.

第一基本問題还有另一种提法, 即除已知 $X_n + iY_n$ 外, 还已知 σ_-, τ_- (或 σ_+, τ_+) 以及 q , 求弹性平衡. 因为由式(1.23), 立刻可算出 $h_{\pm}$, 所以結果还是一样. 例如, 如果要求位移也是周期的, 即 $q = 0$, 則用不着解边值問題, 便可确定 $h_{\pm}$.

第二基本問題 已知各周期孔边的相对位移以及一个周期带內孔边的外应力主矢量 $X + iY$, 还知道 $z = -\infty i$ (或 $z = +\infty i$) 处的应力, 求弹性平衡. 或者, 已知各周期孔边的相对位移及常数 q , 以及 $X + iY$, σ_-, τ_- (或 σ_+, τ_+), 求弹性平衡. 这种問題也可以象第一基本問題那样化为积分方程求解.

三、有水平裂縫的周期应力平面弹性問題

設周期裂縫都在 x 軸上, 而在一个周期带 $|x| < \frac{1}{2}a\pi$ 內, 有 n 条裂縫

$$l_k: a_k \leq t \leq b_k \quad (a_{k+1} > b_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

自 a_k 到 b_k 的方向取作 l_k 的正向, 仍记 $L_0 = \sum_{k=1}^n l_k$. l_k 及其周期合同裂缝 $l_k^{(j)}$ 上的外应力主矢量记为 $X_k + iY_k$. 现在弹性域记作 S , 其他记号同前.

对于一般周期曲线裂缝问题, 表达式(1.25), (1.26)并不适用, 其一般讨论将另文给出. 在现在的特殊情况下, 可用文献[10] § 120 中的方法类似地处理如下.

引进函数

$$\left. \begin{aligned} \omega(z) &= z\bar{\Phi}(z) + \bar{\Psi}(z), \\ \Omega(z) &= \omega'(z) = \bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}'(z), \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

易见

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}. \quad (3.2)$$

由 $\Phi(z)$ 的周期性, 可知 $\Omega(z)$ 也以 $a\pi$ 为周期.

在各 l_k 的端点附近, 我们假定 $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ 至多无界可积, 且

$$\lim_{z \rightarrow t} y\Phi'(z) = 0 \quad (z = x + iy, z \in S, t \in L). \quad (3.3)$$

在 l_k (或其周期合同裂缝) 上, 显然有

$$\left. \begin{aligned} X_k &= \int_{a_k}^{b_k} [\tau_{xy}^-(t) - \tau_{xy}^+(t)] dt, \\ Y_k &= \int_{a_k}^{b_k} [\sigma_y^-(t) - \sigma_y^+(t)] dt, \end{aligned} \right\} \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

其中 $\sigma_y^\pm + i\tau_{xy}^\pm$ 表示在 l_k 上岸和下岸的应力. 于是,

$$\left. \begin{aligned} X &= \int_{L_0} [\tau_{xy}^-(t) - \tau_{xy}^+(t)] dt, \\ Y &= \int_{L_0} [\sigma_y^-(t) - \sigma_y^+(t)] dt. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

由式(1.16), (1.17)以及 $\Phi_0(\pm\infty i) = \Psi_0(\pm\infty i) = 0^{(1)}$, 易见

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\pm\infty i) &= \mp \frac{Y - iX}{2a\pi(\kappa + 1)} + \beta, \\ \Psi(\pm\infty i) &= \mp \frac{(\kappa - 1)Y + i(\kappa + 1)X}{2a\pi(\kappa + 1)} - \beta + \kappa\bar{\beta} - q; \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

再从式(3.1), 便知

$$\Omega(\pm\infty i) = \pm \frac{\kappa(Y - iX)}{2a\pi(\kappa + 1)} + \kappa\beta - q. \quad (3.7)$$

下面我们考虑第一基本问题. 设已知 $\sigma_y^\pm(t)$, $\tau_{xy}^\pm(t)$, 且设它们都满足 Hölder 条件. 又设 σ_+ , τ_+ , h_+ , 从而 σ_+ , τ_+ , h_+ , β , q 均已知. 求弹性平衡. 这问题容易化为下列边值问题(见文献[10] § 120):

$$[\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- = 2p(t), \quad (3.8)$$

$$[\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- = 2q(t), \quad (3.9)$$

1) 在裂缝情况下, 上节中有关 $z = \pm\infty i$ 处的公式仍成立, 这是因为可用封闭曲线围住裂缝, 而围线上外应力主矢量与裂缝上的相同.

其中已令

$$p(t) = \frac{1}{2} [\sigma_y^+(t) + \sigma_y^-(t)] - \frac{i}{2} [\tau_{xy}^+(t) + \tau_{xy}^-(t)], \quad (3.10)$$

$$q(t) = \frac{1}{2} [\sigma_y^+(t) - \sigma_y^-(t)] - \frac{i}{2} [\tau_{xy}^+(t) - \tau_{xy}^-(t)]. \quad (3.11)$$

由式(3.5)知,

$$\int_{L_0} q(t) dt = -\frac{1}{2} (Y - iX). \quad (3.12)$$

先求式(3.8)的解(参看文献[9]),得

$$\Phi(z) - \Omega(z) = \frac{i}{\pi a} \int_{L_0} q(t) \operatorname{ctg} \frac{t-z}{a} dt + 2C, \quad (3.13)$$

其中 C 为其常数. 为了决定 C , 在式(3.13)中分别令 $z = \pm \infty i$, 相加, 并利用式(3.6), (3.7), 得到

$$C = \frac{1}{2} [q - (\kappa - 1)\beta]. \quad (3.14)$$

再求式(3.9)在 h_0 类中的解(按文献[9]中記号), 得

$$\Phi(z) + \Omega(z) = \frac{X(z)}{\pi a i} \int_{L_0} \frac{p(t)}{X^+(t)} \operatorname{ctg} \frac{t-z}{a} dt + 2X(z) P_n \left(\operatorname{tg} \frac{z}{a} \right), \quad (3.15)$$

其中

$$P_n(\xi) = C_0 \xi^n + \cdots + C_n \quad (3.16)$$

是系数待定的 n 次多项式, 而

$$X(z) = \prod_{k=1}^n \left(\operatorname{tg} \frac{z}{a} - \operatorname{tg} \frac{a_k}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{z}{a} - \operatorname{tg} \frac{b_k}{a} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.17)$$

其中根式可任意取定一支, 例如

$$\lim_{z \rightarrow \pm \frac{a\pi}{2}} \operatorname{tg}^n \frac{z}{a} X(z) = 1.$$

把式(3.13), (3.15)相加相减, 得

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{X(z)}{2\pi a i} \int_{L_0} \frac{p(t)}{X^+(t)} \operatorname{ctg} \frac{t-z}{a} dt + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi a i} \int_{L_0} q(t) \operatorname{ctg} \frac{t-z}{a} dt + X(z) P_n \left(\operatorname{tg} \frac{z}{a} \right) + C, \\ \Omega(z) &= \frac{X(z)}{2\pi a i} \int_{L_0} \frac{p(t)}{X^+(t)} \operatorname{ctg} \frac{t-z}{a} dt - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi a i} \int_{L_0} q(t) \operatorname{ctg} \frac{t-z}{a} dt + X(z) P_n \left(\operatorname{tg} \frac{z}{a} \right) - C. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

剩下的問題是要决定 $C_0, \cdots, C_n$. 現在

$$2\mu(u + iv) = \kappa \varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi(z)} + \text{const.},$$

利用位移单值性条件, 便知

$$\begin{aligned} 2\mu\{u + iv\}_{l_k} &= \kappa\{\varphi(z)\}_{l_k} - \{\omega(\bar{z})\}_{l_k} = \\ &= \kappa \int_{l_k} \Phi(z) dz - \int_{l_k} \Omega(\bar{z}) d\bar{z} = 0, \quad k = 1, \cdots, n. \end{aligned} \quad (3.19)$$

由此可得关于 $C_0, \dots, C_n$ 的 n 个线性方程. 此外, 利用位移的准周期性, 例如, 取 A_+ 和 A_- 是 z 到 $z + a\pi$ 的直线段, 且 z 已分别充分接近于 $+\infty i$ 和 $-\infty i$, 又可得两个方程:

$$\begin{aligned} 2\mu\{u + iv\}_z^{z+a\pi} &= \kappa[\varphi(z+a\pi) - \varphi(z)] - [\omega(\bar{z}+a\pi) - \omega(\bar{z})] = \\ &= \kappa \int_{A_+} \Phi(z) dz - \int_{A_-} \Omega(z) dz = a\pi q. \end{aligned} \quad (3.20)$$

由位移的单值性, 立刻可知式(3.20)中的一个方程可从另一个推出, 因此, 式(3.19), (3.20)中恰有 $n+1$ 个独立的方程, 这就正好用来决定 $C_0, \dots, C_n$ (它们的可解性, 从力学观点看很明显). 问题至此已完全解决.

作为一个特例, 考察 $n=1$ 的情形: 设 L_0 中只有一个线段 $-l \leq t \leq l$. 这时, 式(3.18)成为

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2a\pi i \sqrt{R(z)}} \int_{-l}^l p(t) \sqrt{R(t)} \operatorname{ctg} \frac{t-z}{a} dt + \\ &\quad + \frac{1}{2a\pi i} \int_{-l}^l q(t) \operatorname{ctg} \frac{t-z}{a} dt + \frac{C_0 \operatorname{tg} \frac{z}{a} + C_1}{\sqrt{R(z)}} + C, \\ \Omega(z) &= \frac{1}{2a\pi i \sqrt{R(z)}} \int_{-l}^l p(t) \sqrt{R(t)} \operatorname{ctg} \frac{t-z}{a} dt - \\ &\quad - \frac{1}{2a\pi i} \int_{-l}^l q(t) \operatorname{ctg} \frac{t-z}{a} dt + \frac{C_0 \operatorname{tg} \frac{z}{a} + C_1}{\sqrt{R(z)}} - C, \end{aligned} \right\} \quad (3.18)'$$

其中

$$R(z) = \operatorname{tg}^2 \frac{l}{a} - \operatorname{tg}^2 \frac{z}{a}, \quad (3.21)$$

且 $\sqrt{R(z)}$ 已取定例如这样的一分支:

$$\lim_{z \rightarrow \pm \infty i} \sqrt{R(z)} = \pm 1 / \cos \frac{l}{a}, \quad (3.22)$$

或即, 当 z 在上半平面趋于 $t \in L_0$ 时, $\sqrt{R(z)}$ 取正值的那一支, 亦即, 在式(3.18)'中, $\sqrt{R(t)}$ 要理解为取正值.

为了决定 C_0, C_1 , 最简单的办法是: 在式(3.18)'的前一式中以 $z = \pm \infty i$ 代入, 并相加相减. 再以式(3.6), (3.12), (3.14)代入, 并注意到式(1.20), 即得

$$C_0 = -\frac{1}{2a\pi i} \int_{-l}^l p(t) \sqrt{R(t)} dt - \frac{(\tau_- + \tau_+) + i(\sigma_- + \sigma_+)}{4 \cos \frac{l}{a}}, \quad (3.23)$$

$$C_1 = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{Y - iX}{4a\pi \cos \frac{l}{a}}. \quad (3.24)$$

特别, 在一个裂缝的周期情况下, 如果 $X = Y = 0$, 而记 $\sigma_\infty = \sigma_\pm$, $\tau_\infty = \tau_\pm$, $h_\infty = h_\pm$, 则

$$\beta = \frac{1}{4} (h_\infty + \sigma_\infty) - \frac{i\tau_\infty}{\kappa + 1}, \quad q = \frac{\kappa + 1}{4} h_\infty - \frac{3 - \kappa}{4} \sigma_\infty, \quad (3.25)$$

代入式(3.14), (3.23), (3.24)后, 由式(3.18)'最后可得

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{(\tau_{\infty} + i\sigma_{\infty}) \sin \frac{z}{a}}{2\sqrt{\sin \frac{l+z}{a} \sin \frac{l-z}{a}}} + \frac{h_{\infty} - \sigma_{\infty}}{4} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{i\tau_{\infty}}{2}, \\ \Omega(z) &= -\frac{(\tau_{\infty} + i\sigma_{\infty}) \sin \frac{z}{a}}{2\sqrt{\sin \frac{l+z}{a} \sin \frac{l-z}{a}}} - \frac{h_{\infty} - \sigma_{\infty}}{4} - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{i\tau_{\infty}}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

其中根式要这样理解: 当 z 从上半平面趋于 $t \in L_0$ 时取正值.

容易看出, 要想位移是周期的, 即 $q = 0$, 由式(3.25), 应令

$$h_{\infty} = \frac{3 - \kappa}{\kappa + 1} \sigma_{\infty}.$$

这可这样来理解: 当 $\sigma_{\infty} > 0$ 即在和周期方向作垂直的拉伸时, 为了要保持位移的周期性, 必須在 $z = \pm \infty i$ 处作和周期方向一致的拉伸, 且其强度为原拉伸强度的 $\frac{3 - \kappa}{\kappa + 1} (> 0)$ 倍.

如果在式(3.26)中令 $a \rightarrow +\infty$, 則得到一个水平裂縫时的下列公式:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{(\tau_{\infty} + i\sigma_{\infty})z}{2\sqrt{l^2 - z^2}} + \frac{h_{\infty} - \sigma_{\infty}}{4} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{i\tau_{\infty}}{2}, \\ \Omega(z) &= -\frac{(\tau_{\infty} + i\sigma_{\infty})z}{2\sqrt{l^2 - z^2}} - \frac{h_{\infty} - \sigma_{\infty}}{4} - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{i\tau_{\infty}}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.26)'$$

其中当 z 从上半平面趋于 $t \in L_0$ 时根式取正值. 不难验证, 如果不計刚性旋轉, 此結果与文献[10] § 120 中的結果一样.

这个周期問題($n = 1$ 的情况)在文献[12]中曾討論过, 但是, 那是在裂縫上无外应力情况下得到解答的.

对于水平周期裂縫第二基本問題, 也可类似地求解. 我們在下面只叙述 L_0 只含一个綫段 $-l \leq t \leq l$ 时的結果.

設已知 L_0 上下岸位移的导数为 $u^{\pm'}(t) + iv^{\pm'}(t)$, 它們以 $a\pi$ 为周期, 滿足 Hölder 条件. 在 L_0 上的外应力主矢量 $X + iY$ 也已知, 又已知 $z = -\infty i$ (从而 $z = +\infty i$) 处的应力. 得

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2a\pi\kappa i \sqrt{R(z)}} \int_{-l}^l f(t) \sqrt{R(t)} \operatorname{ctg} \frac{t-z}{a} dt + \\ &\quad + \frac{1}{2a\pi\kappa i} \int_{-l}^l g(t) \operatorname{ctg} \frac{t-z}{a} dt + \frac{C_0 \operatorname{tg} \frac{z}{a} + C_1}{\kappa \sqrt{R(z)}} + \beta - \frac{q}{2\kappa}, \\ \Omega(z) &= -\frac{1}{2a\pi i \sqrt{R(z)}} \int_{-l}^l f(t) \sqrt{R(t)} \operatorname{ctg} \frac{t-z}{a} dt + \\ &\quad + \frac{1}{2a\pi i} \int_{-l}^l g(t) \operatorname{ctg} \frac{t-z}{a} dt - \frac{C_0 \operatorname{tg} \frac{z}{a} + C_1}{\sqrt{R(z)}} + \kappa\beta - \frac{q}{2}, \end{aligned}$$

其中

$$C_0 = -\frac{1}{2a\pi i} \int_{-l}^l f(t) \sqrt{R(t)} dt - \frac{iq}{2 \cos \frac{l}{a}},$$

$$C_1 = -\frac{\kappa(Y - iX)}{2(\kappa + 1)a\pi \cos \frac{l}{a}},$$

这里已令

$$f(t) = \mu\{[u^+(t) + u^-(t)] + i[v^+(t) + v^-(t)]\},$$

$$g(t) = \mu\{[u^+(t) - u^-(t)] + i[v^+(t) - v^-(t)]\}.$$

这问题 ($n=1$ 时) 在文献[13]中曾有不完整的讨论。

对于在文献[10] § 120 中曾讨论过的 Шерман 的混合问题, 用类似方法也可推广到周期应力情况, 这里就不写出具体结果了。

参 考 文 献

- [1] Howland, R. C. J., Stress in a plate containing an infinite row of holes, *Proc. of the Royal Society of London*, ser. A, **148**, 1935, 471—491.
- [2] 唐立民, 弹性平面上相邻几个圆孔的应力分析, *科学纪录*, **10**, 1959, 366—375.
- [3] Isida, M., On some plane problems of an infinite plate containing an infinite row of circular holes, *Bull. JSME*, **3**, 10, 1960, 259—265.
- [4] Савин, Г. Н., Напряжения в упругой плоскости с бесконечным рядом равных вырезов, *ДАН СССР*, **23**, 1939, 515—519.
- [5] Михлин, С. Г. 著 (陈传璋、卢鹤绂译), 积分方程及其应用, 商务印书馆, 上海, 1955.
- [6] Шерман, Д. И., Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах, Труды Всесоюзного Съезда по теоретической и прикладной механике, М.—Л., 1962, 405—467.
- [7] 周承倬等, 弹性平面上无限多网状排列圆孔的应力计算(一), *大连工学院学报*, **1**, 1960, 99—125.
- [8] Koiter, W. T., Stress distribution in an infinite elastic sheet with a doubly-periodic set of equal holes, *Boundary problems in differential equations*, Madison, 1960, 191—213.
- [9] 路见可, 周期 Riemann 边值问题及其在弹性力学中的应用, *数学学报*, **13**, 1963, 343—388.
- [10] Мусхелишвили, Н. И. 著 (赵惠元译), 数学弹性力学的几个基本问题, 科学出版社, 北京, 1958.
- [11] 森口繁一著 (刘亦琦译), 平面弹性论, 上海科学技术出版社, 上海, 1962.
- [12] Koiter, W. T., An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet, *Ingenieur Archiv*, **28**, 1959, 168—172.
- [13] Bueckner, H. F., Some stress singularities and their computation by means of integral equations, *Boundary problems in differential equations*, Madison, 1960, 215—230.

ON FUNDAMENTAL PROBLEMS OF PLANE ELASTICITY WITH PERIODIC STRESSES

LU CHIEN-KE
(Wuhan University)

ABSTRACT

In this paper, we consider the general fundamental problems of plane elasticity with simply periodic stresses. We assume that the stresses are periodic and bounded, but do not make any other restrictions both on the number of holes in a strip of periodicity or the form of their boundaries and on the stresses at infinity or those on the boundaries of holes. Here, we find out the general expressions of Kolosoff functions, in which the multi-valued parts and the non-periodic parts are separated. We show that the displacements now must be quasi-periodic and give the general formulations of the first and the second fundamental problems in such cases, which are easily reduced to the Fredholm integral equations.

On generalizing N. I. Muskhelishvili's method of solving the fundamental problems of an elastic plane with horizontal cracks lying on the same straight line, we solve the similar problems in periodic cases. The solutions in closed form have been obtained in the particular case when there is only one crack in a periodic strip.