

研究简报

有轴向扩散的层流扩散火焰*

楊文熊

(上海交通大学)

在研究层流扩散火焰时,很多人都忽略了轴向扩散作用^[1]. 而一般的层流扩散火焰应该具有轴向扩散现象,尤其是在研究短火焰时更不应该加以忽略. 本文在扩散的意义上既考虑了一般的径向扩散,又考虑了轴向扩散,推广了文献[1]的理论. 此外还计算了几个例子,初步作了一些分析,说明忽略轴向扩散时所造成的误差.

一、层流扩散火焰的几何形状

在由两个圆管组成的同心圆管中,化学成分不同的 n 种流体,在定常运动情况下,其扩散与进行化学反应是按下列方程^[1,2]

$$U \frac{\partial Y_K}{\partial x} = D_{l,K} \left(\frac{\partial^2 Y_K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_K}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y_K}{\partial r} \right) + \frac{\omega_K}{\rho} \quad (K = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

进行的,式中等号右端第一项与文献[1,2]不同,它就是轴向扩散项. 式(1)中的符号 U 表示组分的平均流速, Y_K 表示第 K 组分的重量百分比(相当于浓度), $D_{l,K}$ 表示第 K 组分的扩散系数, ω_K 表示第 K 组分在单位时间、单位体积内化学反应引起的质量产生率, ρ 代表密度.

在这里,只考虑燃料与氧化剂,并使它们分别在內圆管和外圆管中流动,因此式(1)应该是:

$$\begin{aligned} U \frac{\partial Y_F}{\partial x} &= D_{l,F} \left(\frac{\partial^2 Y_F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y_F}{\partial r} \right) + \frac{\omega_F}{\rho}, \\ U \frac{\partial Y_O}{\partial x} &= D_{l,O} \left(\frac{\partial^2 Y_O}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_O}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y_O}{\partial r} \right) + \frac{\omega_O}{\rho}, \end{aligned}$$

其中下标 F, O 分别代表燃料和氧化剂, $D_{l,O} = D_{l,F} = D$.

由于

$$\omega_F = \nu_O \omega_O,$$

可以引进

$$Y = Y_F - \nu_O Y_O,$$

它满足微分方程

$$U \frac{\partial Y}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial r} \right). \quad (2)$$

* 1962年6月22日收到.

对于层流扩散火焰,如果仍采用文献[1]或[2]的假定,则在下列边界条件下可以得出方程(2)的解:

$$\left. \begin{aligned} Y &= Y_{F,o}, & \text{当 } 0 \leq r < d/2, & & x = 0 \text{ 时;} \\ Y &= -\nu_o Y_{O,o}, & \text{当 } d/2 < r \leq d'/2, & & x = 0 \text{ 时;} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} &= 0, & \text{当 } r = 0, & & r = d'/2 \text{ (绝缘) 时,} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 ν_o 是燃料克分子数与氧化剂克分子数之比, $Y_{F,o}$ 和 $Y_{O,o}$ 分别是燃料和氧化剂的初始重量百分比, d' 和 d 分别是外管和内管的直径.

于是用分离变量法可以求得

$$Y = \frac{4d(Y_{F,o} + \nu_o Y_{O,o})}{d'^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_n} \frac{J_1(K_n d/2) J_0(K_n r)}{J_0(K_n d'/2)^2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{U}{D} - \sqrt{\left(\frac{U}{D} \right)^2 + 4K_n^2} \right] x \right\} + (Y_{F,o} + \nu_o Y_{O,o})(d/d')^2 - \nu_o Y_{O,o}. \quad (4)$$

对于火焰面来讲,

$$Y = 0, \quad \text{当 } r = r_f \text{ 时}, \quad (5)$$

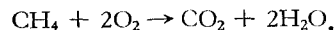
其中 r_f 指火焰面的径向距离. 因此上式的火焰面的几何形状是

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_n} \frac{J_1(K_n d/2) J_0(K_n r_f)}{J_0(K_n d'/2)^2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{U}{D} - \sqrt{\left(\frac{U}{D} \right)^2 + 4K_n^2} \right] x \right\} = \\ = \frac{d'^2 \nu_o Y_{O,o}}{4d(Y_{F,o} + \nu_o Y_{O,o})} - \frac{d}{4}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中 J_1, J_0 是第一类 Bessel 函数, K_n 指 $J_1(K d'/2) = 0$ 的一切正实数值的根. 从式(6)可以看出, 火焰面的形状与很多参数有关, 但更重要的是取决于燃料与氧化剂的初始值.

二、例题及讨论

现在取甲烷和氧气的层流扩散火焰为例, 其化学反应式为



假定在第一个例子中所取参数完全与文献[1]相同: $U_{\text{CH}_4} = U_{\text{O}_2} = 1.55(\text{cm/s})$, $d' = 5.10(\text{cm})$, $d = 2.54(\text{cm})$, $D = 0.493(\text{cm}^2/\text{s})$, $\nu_o = 1/2$, $Y_{F,o} = 1$, $Y_{O,o} = 1$; 第二个例子中除 $U_{\text{CH}_4} = U_{\text{O}_2} = 0.493(\text{cm/s})$ 外, 其他参数不变.

经过详细计算, 得到火焰面的几何形状如图 1 所示.

1. 第一个例子的计算表明, 考虑了轴向扩散以后, 火焰的长度比文献[1]的结果增加了 20%;

第二个例子的计算表明, 短火焰的长度与文献[1]的结果相差更大. 这就表明, 对于短火

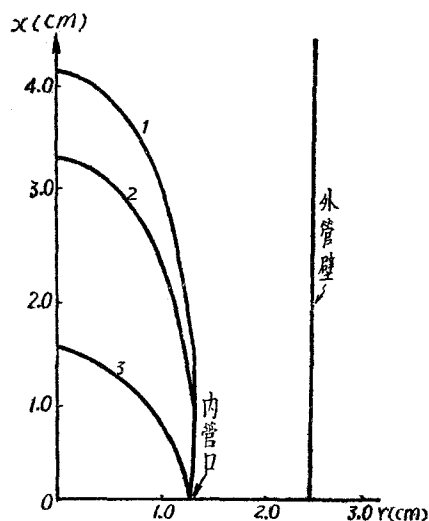


图 1 火焰的形状

1. 本文公式(6), $U = 1.55(\text{cm/s})$;
2. 文献[1];
3. 本文公式(6), $U = 0.493(\text{cm/s})$.

焰來講, 軸向擴散因素顯得是十分重要的^[3]。

2. 公式(6)與文獻[1]中相應的公式的差別, 僅在以 e 為底的指數值上。如果流動速度很大, 二者的結果將是一致的, 因為當 $D^2 K_n^2 / U^2 \ll 1$ 時, 有

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{U}{D} - \sqrt{\left(\frac{U}{D} \right)^2 + 4K_n^2} \right] x \right\} &\approx \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{U}{D} - \frac{U}{D} \left(1 + K_n^2 \frac{D^2}{U^2} \right) \right] x \right\} = \\ &= \exp \left\{ -K_n^2 \frac{D}{U} x \right\}, \end{aligned}$$

由此可見, 當 $D^2 K_n^2 / U^2 \ll 1$ 時, 公式(2)中的擴散項是可以忽略的。可是, 這時的流動速度很可能已越出層流流動的範圍了。

3. 如果令 $x/L = \zeta$, $2r_f/d = \eta$, $d'/d = \Phi$, $\varphi_n = K_n d'/d$, $UL/D = R_L$, $Ud'/D = R_{d'}$, $K = v_o Y_{o,o} / (Y_{F,o} + v_o Y_{o,o})$, 則公式(6)可化為

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n} \frac{J_1(\varphi_n/\Phi) J_0(\varphi_n \eta / \Phi)}{J_0(\varphi_n)^2} \exp \left\{ \frac{1}{2} R_L^2 \left[1 - \sqrt{1 + (4\varphi_n/R_{d'})^2} \right] \right\} = \\ = \frac{1}{2} \left(\Phi K - \frac{1}{\Phi} \right), \end{aligned}$$

其中 L 可取作焰長。由此可見, 要想使兩個系統相似, 必須使 $\Phi = \text{const.}$, $R_L = \text{const.}$, $R_{d'} = \text{const.}$, $K = \text{const.}$

4. 本文僅僅考慮濃度(或重量百分比)的因素, 其他因素如流動中的湍流, 火焰的溫度, 流動中的速度分布, 熱輻射, 管端的热傳導等均十分複雜, 這裡均未加以考慮, 故所得的結果當然是近似的。

參 考 文 獻

- [1] Burke, S.P. and Schumann, T. E., Diffusion flames, *Ind. Eng. Chem.*, **20**, 10, 1928, 998—1004.
- [2] Penner, S. S., Chemistry problem in jet propulsion, Pergamon Press, New York, 1957, 267.
- [3] Barr, J., Fourth Symposium on Combustion, The Williams & Wilkins Company, Baltimore, 1953, 765—771.

THE LAMINAR DIFFUSION FLAME WITH AXIAL DIFFUSION

YANG WÉN-XIÓNG

(Shanghai Chiao-tong University)