第7卷 第3期 力学学报 Vol. 7, No. 3
1964年9月 ACTA MECHANICA SINICA Sept., 1964

升力螺旋桨在桨盘上的誘导速度分布*

王适存
(西北工业大学)

提要

直升机在前飞时，其升力桨周围的誘导速度分布是一个不易算出的問題. 本文試图根据渦流理論导出的精确公式，通过簡化，获得适于工程計算的近似公式. 在簡化过程中，把原来的表达式設法用 Fourier 級数来表示，但只取二阶諧波为限；同时，又找到两个代数式来代替两个椭圓积分. 最后，为了提供誘导速度分布的物理图象，以典型环量載荷为例，計算了几个情况，并繪成曲綫. 与相应的实驗数据比較，本文結果可以反映升力桨誘导速度的一般变化.

一、

根据文献[1]的广义渦流理論，升力桨的誘导速度是由附着渦系、縱向自由渦系和横向自由渦系三种渦系的誘导速度迭加而得，它的軸向分量为

$$\bar{v}_y = (\bar{v}_{附着})_y + (\bar{v}_{縱向})_y + (\bar{v}_{横向})_y. \tag{1}$$

上式右端各項都表現为下列形式的双重积分:

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} f(\bar{\rho}, \theta)\cdot F(\bar{\rho}, \theta, \bar{y}, \bar{r}, \psi)d\theta\, d\bar{\rho}, \tag{2}$$

式中 $(\bar{\rho}, \theta)$ 是桨盘上渦流所在的那点 A_0 的坐标，$(\bar{y}, \bar{r}, \psi)$ 是空間內需要确定速度的那点M的坐标，f 是与环量 $\bar{\Gamma}$ 有关的函数，F 是与点 A_0 及点M的相互位置有关的函数.

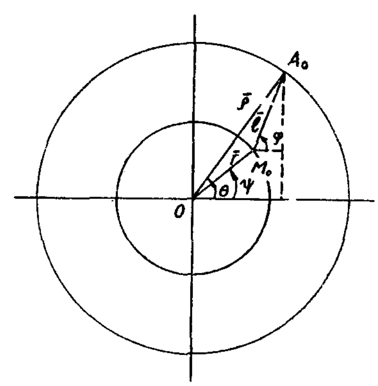


图 1

因为环量的分布暂时还不知道，除非預先給定或根据具体的几何参数及飞行条件設法算出环量，式(1)右端任何一項的双重积分一般都是无法求出的.

按照 Вильдгрубе 的經驗及文献[2]的分析，在直升机的通常使用范围內，可以認为环量与方位角 θ 的关系很小，因而假定 $\bar{\Gamma}$ 仅是 $\bar{\rho}$ 的函数，于是

$$(\bar{v}_{附着})_y = 0, \quad (\bar{v}_{横向})_y = 0.$$

这时，如果所感兴趣的是桨盘平面处 $(\bar{y} = 0)$ 的誘导速度，那末，根据文献[1]并采用其中的符号，就有

$$\bar{v}_y = \frac{k}{4\pi\bar{V}_1}\int_0^1 \frac{d\bar{\Gamma}}{d\bar{\rho}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\bar{V}_1\cos\alpha_1\sin\varphi}{\bar{l}(1+\cos\varphi\cos\alpha_1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\bar{\rho}\cos(\varphi-\theta)}{\bar{l}} + \frac{\cos\alpha_1\bar{\rho}\sin(\varphi-\theta)\sin\varphi}{\bar{l}(1+\cos\varphi\cos\alpha_1)}\right]d\theta\, d\bar{\rho}, \tag{3}$$

* 1963年4月16日收到.

式中 k 是桨叶数目，$\bar{V}_1$ 是桨盘平面处的气流速度，α_1 是涡系对桨盘的傾角.

容易看出，即使 $\bar{\Gamma}$ 仅是 $\bar{\rho}$ 的函数，要把式(3)积分出来，也是非常困难的. Проскуряков[3] 曾在 $\alpha_1=0$ 的情况下对 θ 进行积分，但得出的結果仍不便用于工程計算.

本文把 $\bar{v}_y$ 近似地写成 Fourier 級数的形式:

$$\bar{v}_y=\bar{v}_0(\bar{r})+\bar{v}_{1c}(\bar{r})\cos\psi+\bar{v}_{1s}(\bar{r})\sin\psi+\bar{v}_{2c}(\bar{r})\cos 2\psi+\bar{v}_{2s}(\bar{r})\sin 2\psi+\cdots, \tag{4}$$

并只算到二阶諧波为止(Payne[4] 已指明，在实用上只要算到一阶已足够准确). 这时

$$\left.\begin{aligned}\bar{v}_0&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bar{v}_y\,d\psi,\\ \bar{v}_{1c}&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\bar{v}_y\cos\psi\,d\psi,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

上列各式都是三重积分，可以象文献[2]那样調换积分次序而先对 θ 及 ψ 进行积分.

二、

现在試求 $\bar{v}_0$, $\bar{v}_{1c}$, $\bar{v}_{1s}$, $\bar{v}_{2c}$, $\bar{v}_{2s}$ 等的値. 把式(3)代入式(5)，得到

$$\left.\begin{aligned}\bar{v}_0&=\frac{k}{4\pi\bar{V}_1}\int_0^1\frac{d\bar{\Gamma}}{d\bar{\rho}}I_0\,d\bar{\rho},\\ \bar{v}_{1c}&=\frac{k}{2\pi\bar{V}_1}\int_0^1\frac{d\bar{\Gamma}}{d\bar{\rho}}I_{1c}\,d\bar{\rho},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}I_0&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\bar{V}_1\cos\alpha_1\sin\varphi}{\bar{l}(1+\cos\varphi\cos\alpha_1)}+\right.\\ &\quad\left.+\frac{\bar{\rho}\cos(\varphi-\theta)}{\bar{l}}+\frac{\cos\alpha_1\bar{\rho}\sin(\varphi-\theta)\sin\varphi}{\bar{l}(1+\cos\varphi\cos\alpha_1)}\right]d\theta\,d\psi=\\ &=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[F_1+F_2+F_3]d\theta d\psi,\\ I_{1c}&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[F_1+F_2+F_3]\cos\psi\,d\theta\,d\psi,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

积分后得到

$$I_0=\begin{cases}0 & (\bar{\rho}<\bar{r}),\\ 1 & (\bar{\rho}>\bar{r});\end{cases} \tag{8}$$

$$I_{1c}=\frac{\cos\alpha_1}{1+\sin\alpha_1}\bar{r}\frac{2}{\pi(\bar{\rho}+\bar{r})}\left[\frac{\bar{\rho}^2+\bar{r}^2}{2\bar{r}^2}K-\frac{(\bar{\rho}+\bar{r})^2}{2\bar{r}^2}E\right]; \tag{9}$$

$$I_{1s}=\begin{cases}\dfrac{-\bar{V}_1\cos\alpha_1}{\bar{r}(1+\sin\alpha_1)} & (\bar{\rho}<\bar{r}),\\ 0 & (\bar{\rho}>\bar{r});\end{cases} \tag{10}$$

$$I_{2c}=\begin{cases}\dfrac{1-\sin\alpha_1}{1+\sin\alpha_1}\dfrac{\bar{\rho}^2}{\bar{r}^2} & (\bar{\rho}<\bar{r}),\\ 0 & (\bar{\rho}>\bar{r});\end{cases} \tag{11}$$

$$I_{2s}=\frac{\bar{V}_1(1-\sin\alpha_1)}{(1+\sin\alpha_1)}\frac{2}{\pi(\bar{\rho}+\bar{r})}\left[\frac{\bar{\rho}^2}{\bar{r}^2}K-\frac{(\bar{\rho}+\bar{r})^2}{\bar{r}^2}E\right]. \tag{12}$$

式（9）和式（12）含有模数为

$$\bar{k}=\frac{\sqrt{4\bar{\rho}\bar{r}}}{(\bar{\rho}+\bar{r})}$$

的完全椭圆积分K及E，所以进一步对$\bar{\rho}$积分就有困难．因此，本文从K及E的級数展开式中选用下列簡单的近似式来代替K及E：

$$K\approx\frac{\pi}{2}\frac{1}{(1-\bar{k}^2)^{\frac{1}{4}}}, \tag{13}$$

$$E\approx\frac{\pi}{2}\sqrt{1-\frac{\bar{k}^2}{2}}. \tag{14}$$

表1和图2对K及E本身与其近似式作了比较．可以看出，它們在很大范圍内非常接近；但当$\bar{k}\to1$时，誤差稍大（K的誤差可超过30%，E的誤差可达10%），这将影响$\bar{r}\to\bar{\rho}$时的誘导速度值．

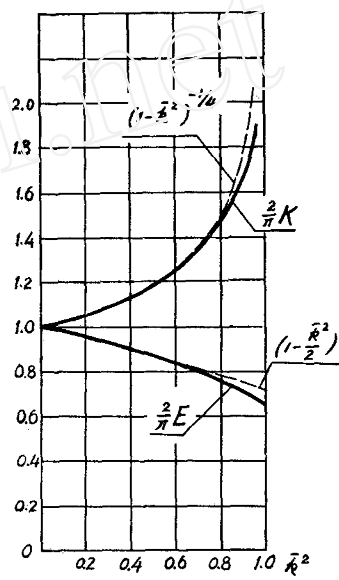


图　2

經过代換后，式（9）和式（12）可以写成

$$I_{1c}=\frac{\cos\alpha_1}{1+\sin\alpha_1}\frac{1}{2\bar{r}}\left[\frac{\bar{\rho}^2+\bar{r}^2}{\sqrt{\bar{\rho}^2-\bar{r}^2}}-\sqrt{\bar{\rho}^2+\bar{r}^2}\right]$$
$$(\bar{\rho}>\bar{r}), \tag{15}$$

$$I_{2s}=\frac{\bar{V}_1(1-\sin\alpha_1)}{1+\sin\alpha_1}\frac{1}{\bar{r}^2}\left[\frac{\bar{\rho}^2}{\sqrt{\bar{\rho}^2-\bar{r}^2}}-\sqrt{\bar{\rho}^2+\bar{r}^2}\right]$$
$$(\bar{\rho}>\bar{r}). \tag{16}$$

表　1

$\bar{k}^2$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.99	1.0
$\frac{2}{\pi}K$	1.180	1.241	1.331	1.447	1.651	2.357	∞
$\frac{1}{(1-\bar{k}^2)^{1/4}}$	1.203	1.257	1.351	1.495	1.778	3.162	∞
$\frac{2}{\pi}E$	0.860	0.827	0.791	0.750	0.703	—	0.637
$\sqrt{1-\frac{\bar{k}^2}{2}}$	0.866	0.837	0.806	0.775	0.742	—	0.707

現在把式（6）的$\bar{v}_0$，$\bar{v}_{1c}$，···代入式（4），得到

$$\bar{v}_y=\frac{k}{4\pi\bar{V}_1}\int_0^1\frac{d\bar{\Gamma}}{d\bar{\rho}}Id\bar{\rho}, \tag{17}$$

式中

$$I=I_0+2I_{1c}\cos\psi+2I_{1s}\sin\psi+2I_{2c}\cos2\psi+2I_{2s}\sin2\psi. \tag{18}$$

这个I有一定的物理意义：在桨盘半径为$\bar{\rho}$的圓周上，单位环量的涡流对桨盘平面处任

一点 $(\bar{r}, \psi)$ 所激起的軸向誘导速度便是 I. Castles 等曾用数值积分法对几个 α_1 計算了沿縱向平面的一些具体数据[5]，后来用电子計算机計算了沿横向平面的数据[6]，最近又用电磁比拟法測出了 $\alpha_1 = \text{arc tg}\,(1/10)$ 时沿 $\psi = 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°$ 这几个平面的一些結果[7]. 利用本文的近似公式进行計算要容易得多. 以 $\bar{V}_1 = 0.2$, $\alpha_1 = \text{arc tg}\,(1/10)$ 为例，按 $\bar{r} = 1$ 对縱向軸綫 ($\psi = 0°$ 及 $180°$) 和横向軸綫 ($\psi = 90°$ 及 $270°$) 的情况进行計算，得到的結果表示在表 2 和图 3 及图 4 上. 与文献[7]的結果比較，

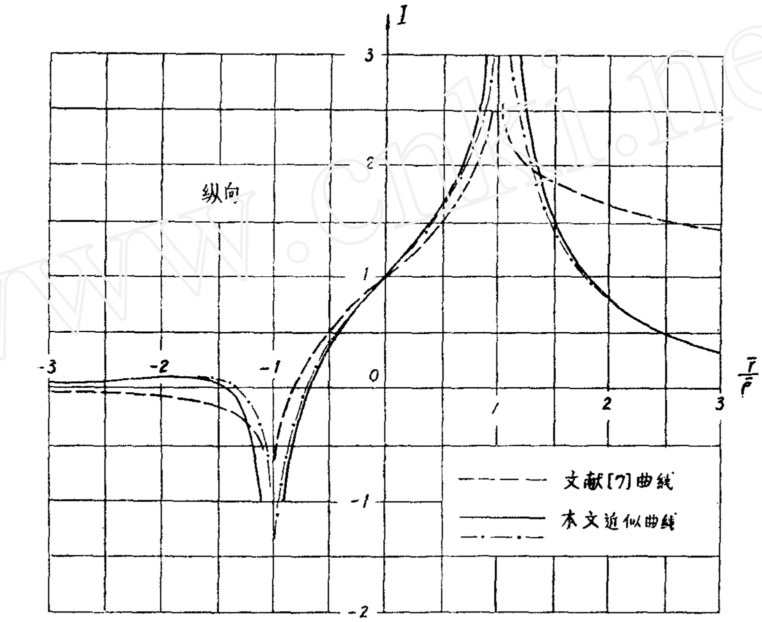


图 3

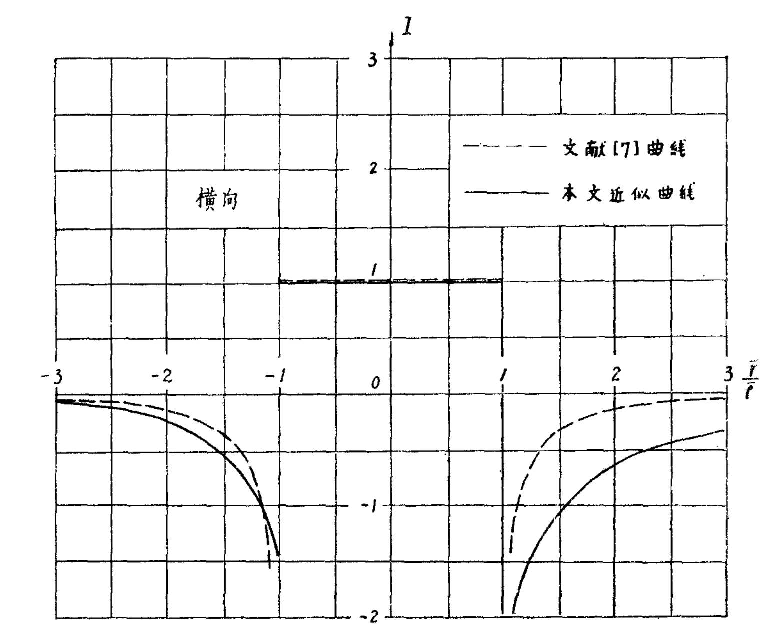


图 4

表 2

$\bar{r}/\bar{\rho}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0
文献[7]的 $I(0°)$ 本文的 $I(0°)$	1.000 1.000 (1.000)	1.181 1.207 (1.206)	1.377 1.466 (1.463)	1.609 1.881 (1.837)	1.936 2.788 (2.422)	2.215 4.088 (2.831)	∞ ∞ (3.352)
文献[7]的 $I(180°)$ 本文的 $I(180°)$	1.000 1.000 (1.000)	0.819 0.793 (0.794)	0.623 0.534 (0.537)	0.391 0.119 (0.163)	0.064 −0.788 (−0.422)	−0.215 −2.088 (−0.331)	−∞ −∞ (−1.352)
文献[7]的 $I(90°)$ 本文的 $I(90°)$	1.000 1.000	1.000 1.000	1.000 1.000	1.000 1.000	1.000 1.000	1.000 1.000	— —
本文的 $I(270°)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	—
$\bar{r}/\bar{\rho}$	1.1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	3.0
文献[7]的 $I(0°)$ 本文的 $I(0°)$	2.262 4.536 (3.192)	2.072 2.990 (2.538)	1.910 1.834 (1.730)	1.810 1.299 (1.263)	1.737 0.992 (0.964)	1.678 0.772 (0.765)	1.452 0.334 (0.323)
文献[7]的 $I(180°)$ 本文的 $I(180°)$	−0.478 −1.560 (−0.274)	−0.316 −0.491 (−0.038)	−0.186 0.003 (0.106)	−0.128 0.107 (0.143)	−0.094 0.118 (0.146)	−0.074 0.128 (0.135)	−0.030 0.066 (0.077)
文献[7]的 $I(90°)$ 本文的 $I(90°)$	−1.352 −1.841	−0.790 −1.580	−0.423 −1.202	−0.278 −0.951	−0.201 −0.775	−0.154 −0.648	−0.061 −0.332
本文的 $I(270°)$	−1.131	−0.920	−0.635	−0.456	−0.335	−0.252	−0.068

可以看出，在縱向軸上，当 $\bar{r}$ 接近 $\bar{\rho}$ 时，本文的数据偏大，这主要是用近似式代替橢圓积分而产生的影响；其他地方的誤差，主要是略去三阶及三阶以上諧波带来的。应当指出，文献 [5—7] 的結果也不完全正确。它們的 I 并不包括 $\bar{V}_1$。因为它們在基本假定中用圓环渦流代替螺旋渦流[8]，从而略去了各正弦項，所以在橫向軸上就得出不符合实际情况的左右对称的分布。

三、

有了以上的 I_0, I_{1c}, I_{1s}, I_{2c}, I_{2s}，如果再知道了函数 $\bar{\Gamma}(\bar{\rho})$ 的具体形式，就可以进一步把式(6)对 $\bar{\rho}$ 积分，求出 $\bar{v}_0$, $\bar{v}_{1c}$, $\bar{v}_{1s}$, $\bar{v}_{2c}$, $\bar{v}_{2s}$ 諸值。按照 Мельц 的建議，采用下列环量典型載荷(图 5 的实綫)：

$$\bar{\Gamma}(\bar{\rho}) = \bar{\Gamma}_0 \bar{\rho}^2 (1 - \bar{\rho}^2), \tag{19}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_0 &= \frac{k}{4\pi \bar{V}_1} J_0, \\ \bar{v}_{1c} &= \frac{k}{4\pi \bar{V}_1} 2J_{1c}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

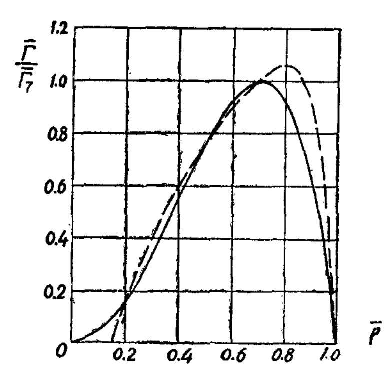


图 5

—— 本文采用　　- - - 文献 [9] 采用

式中

$$\left.\begin{aligned} J_0 &= \int_0^1 \frac{d\bar{\Gamma}}{d\bar{\rho}} I_0 d\bar{\rho}, \\ J_{1c} &= \int_0^1 \frac{d\bar{\Gamma}}{d\bar{\rho}} I_{1c} d\bar{\rho}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

积分后得到，当 $\bar{r} < 1$ 时，

$$J_0 = -\bar{\Gamma}_0 \bar{r}^2 (1 - \bar{r}^2) = -\bar{\Gamma}(\bar{r}), \tag{22}$$

$$\begin{aligned} J_{1c} = \frac{\cos\alpha_1}{1 + \sin\alpha_1} \bar{\Gamma}_0 \Big\{ \frac{1}{\bar{r}} \Big[& \frac{1}{3} (\sqrt{(1 - \bar{r}^2)^3} - \bar{r}^3) + \\ & + 2\bar{r}^2 (\sqrt{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}) - \frac{1}{3} (\sqrt{(1 + \bar{r}^2)^3} - \bar{r}^3) \Big] - \\ & - \frac{2}{\bar{r}} \Big[\frac{1}{5} (\sqrt{(1 - \bar{r}^2)^5} + \bar{r}^5) + \bar{r}^2 (\sqrt{(1 - \bar{r}^2)^3} - \bar{r}^3) + \\ & + 2\bar{r}^4 (\sqrt{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}) - \frac{1}{5} (\sqrt{(1 + \bar{r}^2)^5} - \bar{r}^5) + \\ & + \frac{\bar{r}^2}{3} (\sqrt{(1 + \bar{r}^2)^3} - \bar{r}^3) \Big] \Big\}, \end{aligned} \tag{23}$$

$$J_{1s} = \frac{-\bar{V}_1 \cos\alpha_1}{1 + \sin\alpha_1} \frac{1}{\bar{r}} \bar{\Gamma}_0 \bar{r}^2 (1 - \bar{r}^2), \tag{24}$$

$$J_{2c} = \frac{1 - \sin\alpha_1}{1 + \sin\alpha_1} \bar{\Gamma}_0 \left(\frac{\bar{r}^2}{2} - \frac{2}{3} \bar{r}^4 \right), \tag{25}$$

$$\begin{aligned} J_{2s} = \frac{\bar{V}_1 (1 - \sin\alpha_1)}{1 + \sin\alpha_1} \bar{\Gamma}_0 \Big\{ \frac{2}{\bar{r}^2} \Big[& \frac{1}{3} (\sqrt{(1 - \bar{r}^2)^3} - \bar{r}^3) + \\ & + \bar{r}^2 (\sqrt{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}) - \frac{1}{3} (\sqrt{(1 + \bar{r}^2)^3} - \bar{r}^3) \Big] - \\ & - \frac{4}{\bar{r}^2} \Big[\frac{1}{5} (\sqrt{(1 - \bar{r}^2)^5} + \bar{r}^5) + \frac{2}{3} \bar{r}^2 (\sqrt{(1 - \bar{r}^2)^3} - \bar{r}^3) + \\ & + \bar{r}^4 (\sqrt{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}) - \frac{1}{5} (\sqrt{(1 + \bar{r}^2)^5} - \bar{r}^5) + \\ & + \frac{\bar{r}^2}{3} (\sqrt{(1 + \bar{r}^2)^3} - \bar{r}^3) \Big] \Big\}; \end{aligned} \tag{26}$$

当 $\bar{r} > 1$ 时，

$$J_0 = 0, \tag{22'}$$

$$\begin{aligned} J_{1c} = \frac{\cos\alpha_1}{1 + \sin\alpha_1} \bar{\Gamma}_0 \Big\{ \frac{1}{\bar{r}} \Big[& \frac{1}{3} (\sqrt{(\bar{r}^2 - 1)^3} - \bar{r}^3) - \\ & - 2\bar{r}^2 (\sqrt{\bar{r}^2 - 1} - \bar{r}) - \frac{1}{3} (\sqrt{(\bar{r}^2 + 1)^3} - \bar{r}^3) \Big] - \\ & - \frac{2}{\bar{r}} \Big[-\frac{1}{5} (\sqrt{(\bar{r}^2 - 1)^5} - \bar{r}^5) + \bar{r}^2 (\sqrt{(\bar{r}^2 - 1)^3} - \bar{r}^3) - \\ & - 2\bar{r}^4 (\sqrt{\bar{r}^2 - 1} - \bar{r}) - \frac{1}{5} (\sqrt{(\bar{r}^2 + 1)^5} - \bar{r}^5) + \\ & + \frac{\bar{r}^2}{3} (\sqrt{(\bar{r}^2 + 1)^3} - \bar{r}^3) \Big] \Big\}, \end{aligned} \tag{23'}$$

$$J_{1s}=0, \tag{24'}$$

$$J_{2c}=\frac{1-\sin\alpha_1}{1+\sin\alpha_1}\bar{\Gamma}_0\frac{1}{\bar{r}^2}\left(-\frac{1}{6}\right), \tag{25'}$$

$$\begin{aligned}J_{2s}=\frac{\bar{V}_1(1-\sin\alpha_1)}{1+\sin\alpha_1}\bar{\Gamma}_0\Bigg\{&\frac{2}{\bar{r}^2}\bigg[\frac{1}{3}\left(\sqrt{(\bar{r}^2-1)^3}-\bar{r}^3\right)-\\&-\bar{r}^2\left(\sqrt{\bar{r}^2-1}-\bar{r}\right)-\frac{1}{3}\left(\sqrt{(\bar{r}^2+1)^3}-\bar{r}^3\right)\bigg]-\\&-\frac{4}{\bar{r}^2}\bigg[-\frac{1}{5}\left(\sqrt{(\bar{r}^2-1)^5}-\bar{r}^5\right)+\frac{2}{3}\left(\sqrt{(\bar{r}^2-1)^3}-\bar{r}^3\right)-\\&-\bar{r}^4\left(\sqrt{\bar{r}^2-1}-\bar{r}\right)-\frac{1}{5}\left(\sqrt{(\bar{r}^2+1)^5}-\bar{r}^5\right)+\\&+\frac{\bar{r}^2}{3}\left(\sqrt{(\bar{r}^2+1)^3}-\bar{r}^3\right)\bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{26'}$$

这样一来，軸向誘导速度的表达式为

$$\bar{v}_y=\frac{k}{4\pi\bar{V}_1}[J_0+2J_{1c}\cos\psi+2J_{1s}\sin\psi+2J_{2c}\cos\psi+2J_{2s}\sin 2\psi]. \tag{27}$$

在以上各式中，J_0 是与 $\bar{V}_1$ 及 α_1 无关的数值，它等于环量本身；各余弦項所含的 J_{1c} 和 J_{2c} 都是与 $\bar{V}_1$ 无关的数値；各正弦項所含的 J_{1s} 和 J_{2s} 与 $\bar{V}_1$ 成正比。至于 α_1 对 J_{1c} 及 J_{1s} 的影响，則表現为需要乘以 $C_1(\alpha_1)=\cos\alpha_1/(1+\sin\alpha_1)$；而对 J_{2c} 及 J_{2s} 的影响，則表現为需要乘以 $C_2(\alpha_1)=(1-\sin\alpha_1)/(1+\sin\alpha_1)$。

現在，仍取 $\bar{V}_1=0.2$，但取 $\alpha_1=90°, 60°, 30°, 0°$，对 $\psi=0°—180°, 45°—225°$，

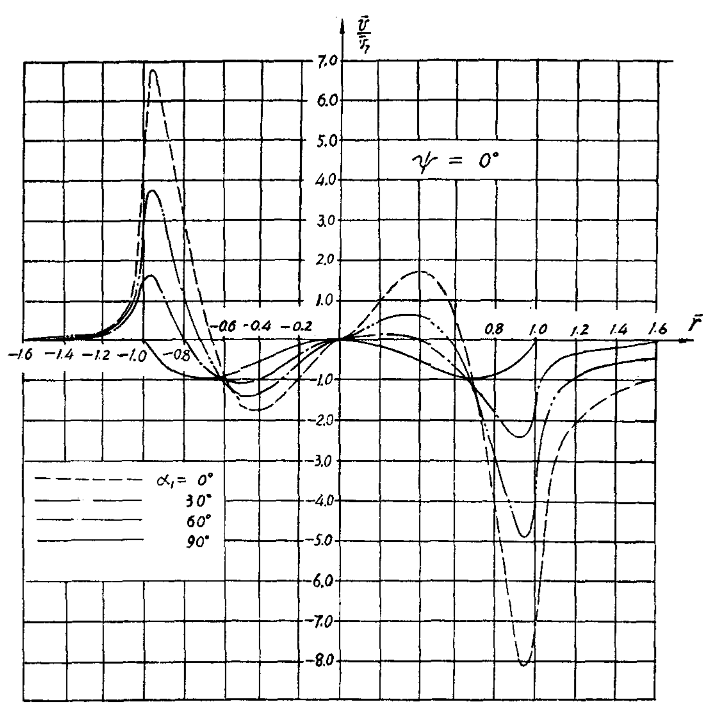


图 6

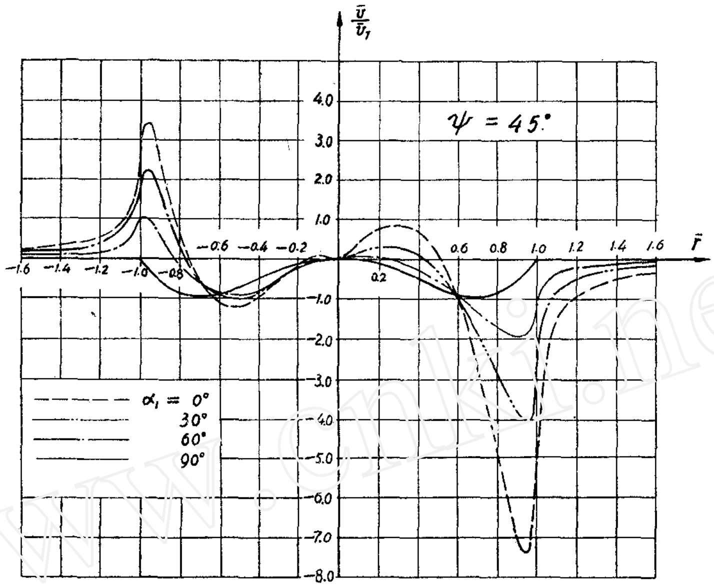


图 7

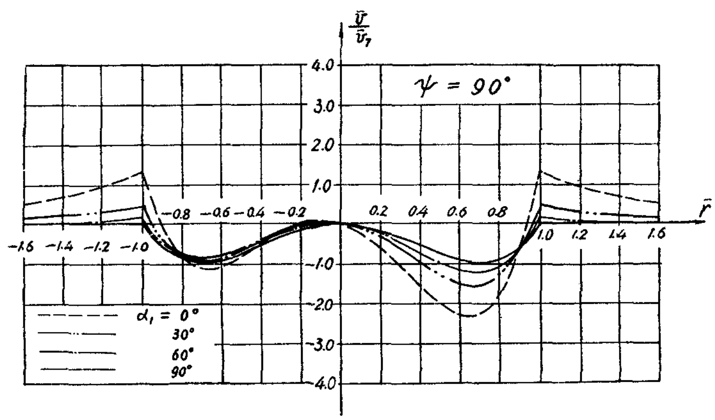
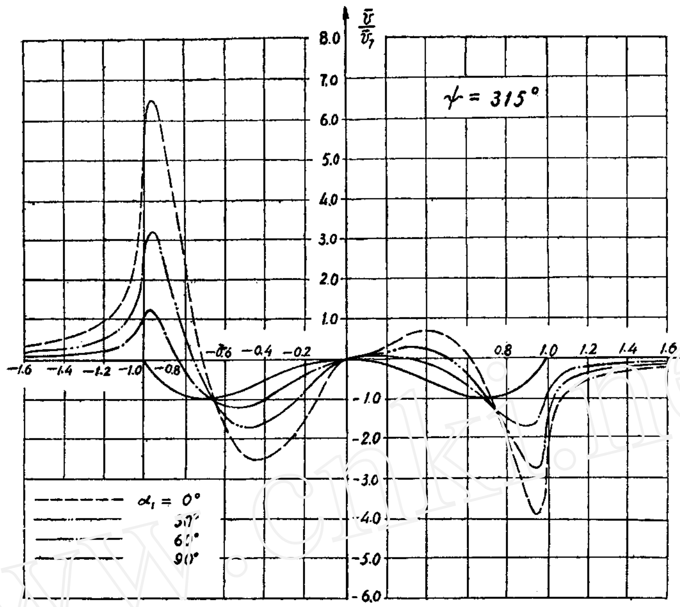


图 8

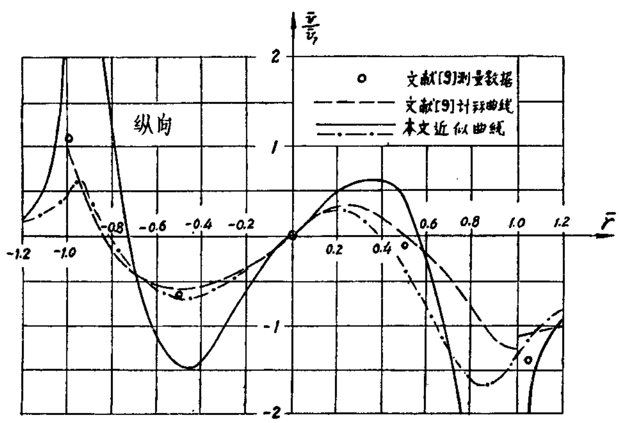
90°—270°，135°—315° 的情况算出 J 值，画成誘导速度分布图 6—9. 从这些图可以看出，桨盘平面处的誘导速度分布是很复杂的，尤其在縱向軸上变化急剧. 文献 [9] 也曾按某一典型的环量載荷（图 5 的虛綫）算出縱向平面及横向平面的誘导速度分布，但也由于采用与文献 [5—7] 同样粗糙的假定而沒有考虑 $\bar{V}_1$ 的效应，得出前进桨叶的半面情况与后退桨叶的半面情况相同的結論[1]. 該文献內还包括了四个斜流状态（$\mu = 0.095$，$\alpha_1 = 25°$；$\mu = 0.139$，$\alpha_1 = 4.2°$；$\mu = 0.140$，$\alpha_1 = 7.7°$；$\mu = 0.232$，$\alpha_1 = 6.1°$）的实驗結果. 本文計算的斜流状态与上述状态不大相同，因而仅取大致相近的状态，即本文的 $\bar{V}_1 = 0.2$，$\alpha_1 = 30°$ 状态与文献 [9] 的 $\mu = 0.095$，$\alpha_1 = 25°$ 状态进行比較（图 10 和图 11）. 与实驗数据对照，本文的結果可以反映升力桨誘导速度分布的基本趋势.

1）文献 [10] 已注意到这种不合理的左右对称的假定，但仍未得出誘导速度的解析式或近似式.



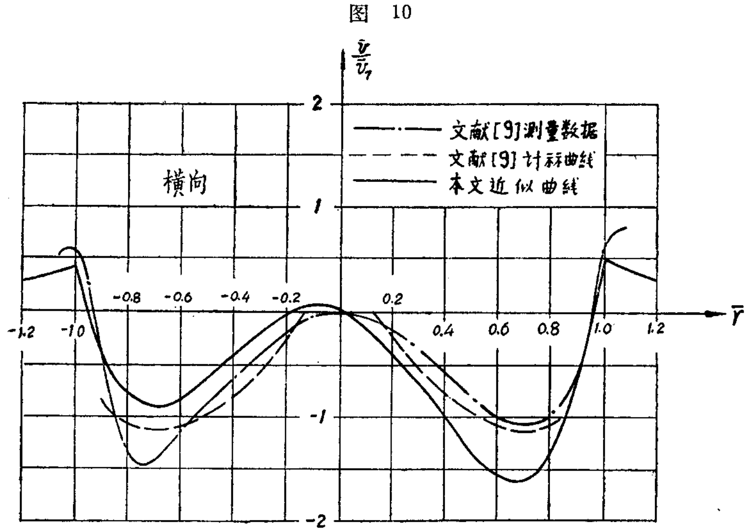
$\psi = 315°$
$\alpha_1 = 0°$
30°
60°
90°

图 9



文献[9]测量数据
文献[9]计算曲线
本文近似曲线
纵向

图 10



文献[9]测量数据
文献[9]计算曲线
本文近似曲线
横向

图 11

四、

本文結果与实驗数据在纵向軸上不很符合的原因，前已説明，主要是計算 I 时代替椭圓积分的近似式当 $\bar{r} \to \bar{\rho}$ 时結果偏大．如果考虑 I 的精确式，那么，当 $\bar{r} \to \bar{\rho}$ 时，卽使按照式（9）及式（12）进行計算，I_{1c} 及 I_{2s} 都将趋于无限大．也就是説，在单位环量涡流的情况中，誘导速度在某些位置将是无限大．这是由于采用理想流体的假定所致，而在实际流动內是不可能出現这种情况的．因此，如果把 I_{1c} 的近似式（15）及 I_{2s} 的近似式（16）进一步簡化如下，看来反而更接近实际情况：

$$I_{1c} = \frac{\cos\alpha_1}{1+\sin\alpha_1}\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{r}}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{r}^3}{\bar{\rho}^3} + \frac{3}{8}\frac{\bar{r}^5}{\bar{\rho}^5}\right) \quad (\bar{\rho} > \bar{r}), \tag{28}$$

$$I_{2s} = \frac{\bar{V}_1(1-\sin\alpha_1)}{1+\sin\alpha_1}\frac{1}{2\bar{r}}\frac{\bar{r}^3}{\bar{\rho}^3} \quad (\bar{\rho} > \bar{r}). \tag{29}$$

根据新的近似式，仍以 $\bar{V}_1 = 0.2$，$\alpha_1 = \operatorname{arc\,tg}(1/10)$ 为例，按 $\bar{r} = 1$ 对纵向軸綫进行相应的計算，結果見表 2 括号內的数据和图 3 的点划綫．这里，当 $\bar{r} = \bar{\rho}$ 时 I 为有限值．

于是，由此进一步求 J_{1c} 及 J_{2s}，代替式（23），（26）和式（23′），（26′），得到，当 $\bar{r} < 1$ 时，

$$J_{1c} = \frac{\cos\alpha_1}{1+\sin\alpha_1}\bar{\Gamma}_0\left[\frac{1}{3}\bar{r} + \frac{113}{192}\bar{r}^2 - 3\bar{r}^3 + \frac{151}{120}\bar{r}^4 + \frac{5}{8}\bar{r}^5\right], \tag{30}$$

$$J_{2s} = \frac{\bar{V}_1(1-\sin\alpha_1)}{1+\sin\alpha_1}\bar{\Gamma}_0\left[\frac{53}{96}\bar{r} - 3\bar{r}^2 + \frac{529}{240}\bar{r}^3\right]; \tag{31}$$

当 $\bar{r} > 1$ 时，

$$J_{1c} = \frac{\cos\alpha_1}{1+\sin\alpha_1}\bar{\Gamma}_0\left[-\frac{1}{12}\frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{1}{12}\frac{1}{\bar{r}^4} - \frac{9}{320}\frac{1}{\bar{r}^6}\right], \tag{30′}$$

$$J_{2s} = \frac{\bar{V}_1(1-\sin\alpha_1)}{1+\sin\alpha_1}\bar{\Gamma}_0\left[-\frac{1}{12}\frac{1}{\bar{r}^3} - \frac{5}{48}\frac{1}{\bar{r}^5} - \frac{9}{160}\frac{1}{\bar{r}^7}\right]. \tag{31′}$$

为了便于比較，根据新的关于 J 的近似式，对 $\bar{V}_1 = 0.2$，$\alpha_1 = 30°$ 的状态进行了計算，結果見图10的点划綫．可以看出，新的結果与实驗数据甚为接近．

参 考 文 献

[1] Ван Ши-цунь (王适存), Обобщенная вихревая теория несущего винта вертолета, *Труды МАИ*, Вып. 142, 1961.

[2] Ван Ши-цунь (王适存), Аэродинамические характеристики несущего винта вертолета с учетом переменности циркуляции по азимуту, *ИВУЗ*, *Авиационная техника*, № 2, 1961.

[3] Проскуряков, А. П., Теория несущего винта при нулевом угле атаке, *ПММ*, **XX**, 4, 1956.

[4] Payne, P. R., Helicopter Dynamics and Aerodynamics, Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd., London, 1959, 50.

[5] Castles, W. and DeLeeuw, J. H., The normal component of the induced velocity in the vicinity of a lifting rotor and some examples of its application, *NACA TR* 1184, 1954.

[6] Castles, W. and Durham, H. L., Distribution of normal component of induced velocity in lateral plane of a lifting rotor, *NACA TN* 3841, 1956.

[7] Castles, W., Durham, H. L. and Kevorkian, J., Normal component of induced velocity for entire field of a uniformly loaded lifting rotor with highly swept wake as determined by electromagnetic analog, *NASA TR* R-41, 1959.

[8] Heyson, H. H., Induced flow near a helicopter rotor, *Aircraft engineering*, **XXXI**, 360, 1959.
[9] Heyson, H. H. and Katzoff, S., Induced velocities near a lifting rotor with nonuniform disk loading, *NACA TR* 1319, 1957.
[10] Miller, R. H., On the computation of airloads acting on rotor blades in forward flight, *Jour. Amer. Hel. Soc.*, **7**, 2, 1962.

THE INDUCED VELOCITY DISTRIBUTION IN THE LIFTING ROTOR DISK PLANE

WÁNG SHÌ-CÚN
(*North-western Institute of Technology*)

ABSTRACT

The study of the induced flow in the vicinity of a lifting rotor in the forward flight is one of the fundamental but rather complicated problems in helicopter aerodynamics. In this paper an attempt is made to derive a practical formula for the induced velocity distribution in the lifting rotor disk plane on the basis of the generalized vortex theory. The distribution is approximated by a Fourier series to the second harmonics, and in order to facilitate integration process, two algebraic expressions are used to replace the complete elliptic integrals of the first and second kinds.

To illustrate the physical nature of the induced velocity field a calculation is carried out for a typical distribution of the circulation, and the results for different azimuth positions are given in curves, which reflect the same general variation pattern as that of the experimental results.