第7卷 第2期 力 学 学 报 Vol. 7, No. 2
1964 年 6 月 ACTA MECHANICA SINICA June, 1964

經典力学基本微分原理与不完整力学組的运动方程*

牛 青 萍
(山 东 工 学 院)

提　　要

本文引入坐标空間、速度空間和加速度空間三个基本空間概念,給出了各个空間所对应的約束和虛位移的定义. 以此作为基础,对經典力学的三个基本微分原理(D'Alembert-Lagrange 原理, Bertrand 原理以及 Gauss 原理)給出了統一的表述. 此外,又从 Bertrand 原理出发,导出了关于不完整力学組的一系列运动方程.

一、引　言

随着工程技术的进展,近年来在工程領域內发現了一些关于不完整力学組的例子,如摩擦无級变速器的理論以及 Kron 的旋轉电机理論[1]等等. 因此,以前人們認为仅仅具有理論价值的討論就逐漸应用到工程技术中来了.

以前有許多学者曾利用 D'Alembert-Lagrange 原理,导出了綫性不完整力学組运动方程的一些表达式,例如 Routh 方程[2], Appell 方程[3],以及 Чаплыгин 方程[4,5]等. 此外, Volterra, Boltzmann 和 Hamel 等曾相継引入"准坐标"概念[6],并导出了相应的运动方程. 近年来又有些学者[7,8]把 Appell 方程和 Чаплыгин 方程也表示成准坐标的形式了.

然而,在更普遍的情形下,也就是当力学組的約束是非綫性不完整約束时,由于根据通常的定义已經得不到对虛位移 δx^i 为綫性的关系式,利用 D'Alembert-Lagrange 原理来推导运动方程就产生了困难,这就要求推广"虛位移"概念. Четаев[9] 曾对这类力学組的虛位移引入公理性的定义,使得 δx^i 可以綫性地以 δq^i 来表示,而其系数則是 $\dot{x}^i$ 对广义速度 $\dot{q}^i$ 的偏导数. 在这个定义的基础上,他还闡明了 D'Alembert-Lagrange 原理与 Gauss 原理的等价性. 值得指出, Gauss 原理[10]也曾引起許多学者的注意[11,12].

另外,过去曾有許多学者广泛运用几何方法研究了力学組的运动. 例如 Nǒgička[13] 曾經把由 n 个質点組成的并具有 m 个自由度的完整力学組的运动解释成为一个几何点的运动,而这个点是处在属于 $3n$ 維 Euclid 空間中 m 維正則流形的某一条曲綫上的.

本文試图利用新的观点来导出不完整力学組的运动方程. 先从几何方面詳細論証了經典力学的三个基本微分原理,給出了統一的表述方法. 其次从 Bertrand 原理出发,导出了关于不完整力学組的一系列运动方程.

---

* 1962 年 11 月 6 日收到.

二、經典力学的基本微分原理

1. 三类空間的基本概念

設在 $3n$ 維 Euclid 空間中給定一組正交标架 $\mathfrak{R}(O, \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{3n})$，其中任一点的向径 $\mathbf{X}$ 可按标架向量展成

$$\mathbf{X} = \sum_i x^i \mathbf{e}_i \quad (i = 1, \cdots, 3n), \tag{1}$$

x^i 为該点的直角坐标．這个 Euclid 空間称为"坐标空間 E_{3n}"，其中 x^i 是自变量．若在 E_{3n} 中給出实变量 t 的 $3n$ 个实函数 $x^i = x^i(t)$，并使它們满足下列条件[14]：

1）对参量 t 变化的某一区間 I（閉的、开的或半开的）中的每一个 t 值，函数 $x^i(t)$ 都具有一阶和二阶連續导数；

2）导数 $\dot{x}^i = \dfrac{dx^i}{dt}$ 对任何 $t \in I$ 都不同时为零．这时，我們称 $x^i = x^i(t)$ 是 E_{3n} 中的正則曲綫．

在正則曲綫 $x^i(t)$ 上任一点 O' 处的切向向量 $\dot{\mathbf{X}} = \dfrac{d\mathbf{X}}{dt}$ 具有下列形式：

$$\dot{\mathbf{X}} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \sum_i \frac{dx^i}{dt} \mathbf{X}_i, \tag{2}$$

这里 $\mathbf{X}_i$ 代表 $3n$ 个綫性无关的向量，它們在曲綫 $x^i(t)$ 的任一点 O' 处构成一个完全确定的局部标架．考虑到式（1），式（2）可写为

$$\dot{\mathbf{X}} = \sum_i \frac{dx^i}{dt} \mathbf{e}_i = \sum_i \dot{x}^i \mathbf{e}_i. \tag{3}$$

比較式（3）与式（1），我們也可取 $\dot{x}^i$ 作为 Euclid 空間中点的直角坐标，这个空間称为"速度空間 E'_{3n}"，其中 $\dot{x}^i$ 是自变量．在这个空間里的一組正交标架为 $\mathfrak{R}'(O', \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{3n})$，其中点 O' 是曲綫 $x^i(t)$ 上的任一点．应当指出，限制点 O' 在正則曲綫 $x^i(t)$ 上并不影响选择点 O' 的任意性．实际上，如果在坐标空間中任取一点作为点 O'，那末，通过点 O' 总能引出某一条正則曲綫 $x^i(t)$，这样就仍然能够把点 O' 看作是某一正則曲綫 $x^i(t)$ 上的一点．

与前面完全类似，在速度空間 E'_{3n} 中也可以定义正則曲綫 $\dot{x}^i = \dot{x}^i(t)$，在其上任选一点 O'' 后，同样可定义一个加速度空間 E''_{3n}，其中 $\ddot{x}^i$ 是自变量，而这个空間的一組正交标架为 $\mathfrak{R}''(O'', \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{3n})$．

不难看出，上述三类空間标架 $\mathfrak{R}(O, \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{3n})$，$\mathfrak{R}'(O', \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{3n})$ 以及 $\mathfrak{R}''(O'', \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{3n})$ 的区别，仅仅是它們的坐标原点不同，而标架向量却是完全相同的．因此，某一向量的分量就不会随着空間的轉換而有所改变．

假定在坐标空間 E_{3n} 中給出一个超曲面，它的方程是

$$\phi(x^i, t) = 0, \tag{4}$$

其中时間 t 被当作参数处理．这时，向量

$$A_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \tag{5}$$

将确定超曲面 (4) 上某一点处的法向向量.

完全类似地，在速度空間 E'_{3n} 中可以給出超曲面

$$\xi(x^i, \dot{x}^i, t) = 0, \tag{6}$$

但其中除时間 t 外，x^i 也被当作参数处理，这是由于空間 E'_{3n} 的标架 $\mathfrak{R}'(O', \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{3n})$ 的坐标原点 O' 可以在坐标空間中任意选取，而选定了点 O' 以后，坐标 x^i 就被固定了[1)]. 这时，向量

$$B_i = \frac{\partial \xi}{\partial \dot{x}^i} \tag{7}$$

将确定超曲面 (6) 上某一点处的法向向量. 作为一种特殊情况，方程

$$\sum_i a_i \dot{x}^i + b = 0 \tag{8}$$

确定空間 E'_{3n} 中的一个超平面，其中 a_i 和 b 都是 x^i 和 t 的函数. 按普遍定义(7)，超平面 (8) 上某一点处的法向向量为

$$C_i = a_i. \tag{9}$$

由于 a_i 不包含 $\dot{x}^i$，因此，超平面上各点处的法向向量是相同的. 但在加速度空間 E''_{3n} 中，除了 x^i 和 t 以外，$\dot{x}^i$ 也被当作参数处理，其理由与 x^i 是速度空間中的参数相同. 由此可見，方程

$$\pi(x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i, t) = 0 \tag{10}$$

将确定空間 E''_{3n} 中的超曲面，而向量

$$D_i = \frac{\partial \pi}{\partial \ddot{x}^i} \tag{11}$$

将确定超曲面(10)上某一点处的法向向量. 此外，同样可以考虑空間 E''_{3n} 中的超平面

$$\sum_i h_i \ddot{x}^i + g = 0, \tag{12}$$

其中 h_i 和 g 都是 $\dot{x}^i$, x^i 和 t 的函数. 按普遍定义(11)，超平面(12)上某一点处的法向向量为

$$G_i = h_i, \tag{13}$$

并且由于 h_i 不包含 $\ddot{x}^i$，因此，超平面上各点处的法向向量也是相同的.

2. 約束及其在三类空間中的几何表現，理想約束的定义

"約束"是分析力学的基本概念之一. 对于由 n 个質点組成的力学組，最早引入的一类約束是"完整約束"，其解析表达式为

$$f_\rho(x^i, t) = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, 3n \\ \rho = 1, \cdots, l \end{pmatrix}. \tag{14}$$

上列每一个方程在坐标空間 E_{3n} 中各自确定一个超曲面，这 l 个超曲面的交构成一个 $3n - l$ 維子空間，这个子空間已不再是平直的 Euclid 空間，而是弯曲的 Riemann 空間. 对具有这类約束的力学組的运动，将由子空間中的一个"代表点"来描写. 为統一起見，我們称方程(14)为坐标空間約束. 我們給出問題的数学条件如下：

1) 应当指出，有人[7]曾用类似的方法处理了不稳定完整約束的情形.

(i) 函数 $f_\rho(x^i, t)$ 在点 $x_0^i \in E_{3n}$ 的某一邻域 $U(x_0^i)$ 中被确定，并在这个邻域內有一阶和二阶偏导数；

(ii) $f_\rho(x_0^i, t) = 0$；

(iii) 矩陣

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x^{3n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_l}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f_l}{\partial x^{3n}} \end{pmatrix}$$

在点 $x_0^i \in E_{3n}$ 具有最大可能的秩 l. 在这些条件下，方程 (14) 将以隐函数的形式在点 $x_0^i \in E_{3n}$ 的邻域內給出一个正則流形 V_{3n-l}，并以 $q^s(s = 1, \cdots, 3n - l)$ 表示該流形的坐标. 近年来，人們又引入非綫性不完整約束，其解析表达式为

$$\varphi_\sigma(x^i, \dot{x}^i, t) = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, 3n \\ \sigma = 1, \cdots, r \end{pmatrix}. \tag{15}$$

与坐标空間的情形完全类似，这些方程在速度空間 E'_{3n} 中确定的 r 个超曲面构成一个 $3n - r$ 維子空間. 我們称方程(15)为速度空間約束. 如果力学組同时具有約束(14)和(15)，那末，采用曲綫坐标 q^s 以后，就可以只考虑約束(15)，这时它可以表示成如下的形式：

$$\varphi_\sigma^*(q^s, \dot{q}^s, t) = 0 \quad \begin{pmatrix} s = 1, \cdots, 3n - l \\ \sigma = 1, \cdots, r \end{pmatrix}. \tag{16}$$

最后，作为理論上的推广，我們还可以考虑下列形式的約束：

$$\psi_\mu(x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i, t) = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, 3n \\ \mu = 1, \cdots, p \end{pmatrix}. \tag{17}$$

和前面完全类似，我們不难在加速度空間 E''_{3n} 中看出这类約束的几何意义，并称之为加速度空間約束. Vâlcovici Victor[15] 曾称約束(17)为"普遍形式的約束"，并作了較詳細的討論. 此外，Киргетов[16] 也曾詳細討論了約束(17)对 $\ddot{x}^i$ 为綫性时的特殊情况. 不过，这类約束的物理意义目前还是不明确的.

下面特别討論一下綫性約束情况. 速度空間的綫性約束

$$\sum_i a_i^k \dot{x}^i + b^k = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, 3n \\ k = 1, \cdots, m \end{pmatrix} \tag{18}$$

确定速度空間中的 m 个超平面，其中 a_i^k 和 b^k 都是 x^i 和 t 的函数. 值得指出，如果将約束(14)对时間微分一次，得到

$$\sum_i \frac{\partial f_\rho}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial f_\rho}{\partial t} = 0, \tag{19}$$

则方程(19)也确定速度空間中的 l 个超平面. 在这个意义上講，它与方程(18)类似. 这里体現了一个十分重要的法則：約束对时間微分一次后，它所处的空間将发生改变. 方程(18)和(19)的类似还使我們有可能直接利用 D'Alembert-Lagrange 原理来推导具有約束(18)的力学組的运动方程. 但須指出，方程(18)和(19)之間也有原則的区别. 方程(19)可以通过积分返回坐标空間，方程(18)在一般情形下則不能积分，因而不可能化为坐标空

間約束的形式.

关于加速度空間的綫性約束，我們也可获得类似的結論．例如将方程(14)和(15)分别对时間微分二次和一次，得到

$$\sum_i \frac{\partial f_\rho}{\partial x^i}\ddot{x}^i + D_\rho(x^i, \dot{x}^i, t) = 0, \tag{20}$$

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i + G_\sigma(x^i, \dot{x}^i, t) = 0, \tag{21}$$

其中 $D_\rho(x^i, \dot{x}^i, t)$ 和 $G_\sigma(x^i, \dot{x}^i, t)$ 都表示所有不含 $\ddot{x}^i$ 的項．方程 (20) 确定加速度空間中的 l 个超平面，方程 (21) 确定 r 个超平面．这里又出現了約束所处的空間发生改变的情况.

实际应用中感兴趣的是理想約束．从几何观点来看，理想約束的普遍定义为：如果一个約束的約束反力沿着約束方程所确定的超曲面的法綫方向，这个約束就称为理想約束．在坐标空間 E_{3n} 中，如果約束(14)都是理想約束，那末，考虑到式 (5) 以后，其約束反力即可表示为

$$F_i = \sum_\rho \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial x^i}, \tag{22}$$

其中 λ_ρ 是比例因子．应当指出，約束反力的这种形式在文献[2]中已經出現．同样地，在速度空間 E'_{3n} 中，如果約束(15)都是理想約束，那末，考虑到式 (7) 以后，其約束反力即可表示为

$$\Phi_i = \sum_\sigma \lambda'_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \dot{x}^i}, \tag{23}$$

并且文献[2]中亦已出現了这种形式．作为一种特殊情形，如果約束(18)和(19)都是理想約束，那末，按普遍定义(23)即可推出其約束反力分别为

$$A_i = \sum_k \lambda'_k a_i^k, \tag{24}$$

$$F'_i = \sum_\rho \lambda'_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial x^i}. \tag{25}$$

比較式(25)和(22)将得到一个重要結論：当約束所处的空間发生改变时，約束的性質保持不变，理想約束仍为理想約束．在加速度空間 E''_{3n} 中也有完全类似的情形.

此外还需指出，我們不能通过积分运算使約束(15)返回坐标空間，或使約束(17)返回速度空間或坐标空間．这就表明，本文采用的加速度空間能够把所有的約束条件全部体現出来.

附带指出，在坐标空間正則曲綫 $x^i(t)$ 的定义中，曾經要求对任何 $t \in I$，$\dot{x}^i$ 都不同时为零．如果此条件不成立，即如果存在 $t_0 \in I$ 使 $\dot{x}^i = 0$ $(i = 1, \cdots, 3n)$，从数学观点来看，这将导致方程 (3) 成为 $\dot{\mathbf{X}} = 0$，因而引不出速度空間的概念．从物理观点来看，若将 $\dot{x}^i = 0$ $(i = 1, \cdots, 3n)$ 代入約束方程 (15)，显然它将变为坐标空間約束，实际上也就沒有必要引入速度空間这个概念了．此外，若存在 $t_1 \in I$ 使 $\dot{x}^i = 0 (i = 1, \cdots, m)$，而其余的 $3n - m$ 个 $\dot{x}^i$ 不为零，这时就只能引出 $3n - m$ 維的速度空間 E'_{3n-m}，而約束 (15) 将变成下列形式:

$$\varphi_\sigma(x^i, \dot{x}^j, t_1) = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, 3n \\ j = 1, \cdots, 3n - m \end{pmatrix}.$$

显然，$3n - m$ 維的速度空間已經能够把上列約束条件全部体現.

3. 三类空間中虛位移的定义

根据 Lagrange 关于力学組“虛位移”的原始定义，可求得坐标空間中虛位移应滿足的方程为

$$\sum_i \frac{\partial f_\rho}{\partial x^i} \delta x^i = 0.$$

将上列每一个方程乘以不定乘子 λ_ρ，然后相加，得到

$$\sum_i \delta x^i \left(\sum_\rho \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial x^i} \right) = 0. \tag{26}$$

考慮到式(22)，上式又可写为

$$\sum_i F_i \delta x^i = 0. \tag{27}$$

方程(27)的物理意义是[7]：在相应的虛位移上，理想約束反力的元功之和等于零.

在速度空間 E'_{3n} 中，假如我們只考慮約束(15)，那末，按照虛位移的原始定义，将有

$$\varphi_\sigma(\dot{x}^i + \delta \dot{x}^i, x^i, t) = 0, \tag{28}$$

这里只对速度空間自变量 $\dot{x}^i$ 取变分. 如果将上式展成 Taylor 級数并精确到一阶微量，則有

$$\varphi_\sigma(\dot{x}^i + \delta \dot{x}^i, x^i, t) - \varphi_\sigma(\dot{x}^i, x^i, t) = \sum_i \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i.$$

考慮到式(15)和(28)，有

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i = 0. \tag{29}$$

上式就是約束(15)对速度空間虛位移 $\delta \dot{x}^i$ 附加的限制条件. 和坐标空間情形类似，引入不定乘子 λ'_σ，在速度空間中将有

$$\sum_i \delta \dot{x}^i \left(\sum_\sigma \lambda'_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0, \tag{30}$$

$$\sum_i \Phi_i \delta \dot{x}^i = 0.$$

作为一种特殊情形，我們可以考慮速度空間綫性約束的情况. 例如由約束(19)，可得

$$\sum_i \frac{\partial f_\rho}{\partial x^i} \delta \dot{x}^i = 0,$$

$$\sum_i \delta \dot{x}^i \left(\sum \lambda'_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial x^i} \right) = 0,$$

$$\sum_i F'_i \delta \dot{x}^i = 0.$$

在加速度空間 E''_{3n} 中，对自变量 $\ddot{x}^i$ 重复上面的推导，即可得出約束(17)对加速度空間虛位移 $\delta \ddot{x}^i$ 附加的限制条件为

$$\sum_i \frac{\partial \psi_\mu}{\partial \ddot{x}^i} \delta \ddot{x}^i = 0. \tag{31}$$

同样可得出

$$\sum \Psi_i \delta \dot{x}^i = 0,$$

其中 Ψ_i 代表理想約束(17)的反力．其次就加速度空間的綫性約束(20)和(21)来說，按普遍定义(31)，有(参看文献[2])

$$\sum_i \frac{\partial f_\rho}{\partial x^i}\delta \ddot{x}^i = 0,$$

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \dot{x}^i}\delta \ddot{x}^i = 0.$$

如果采用曲綫坐标系，那末速度空間約束(15)就可径直用方程(16)来表示．这时，同样可得对于虛位移 $\delta \dot{q}^s$ 的限制条件

$$\sum_s \frac{\partial \varphi^*_\sigma}{\partial \dot{q}^s}\delta \dot{q}^s = 0. \tag{32}$$

4. 三类空間中的基本微分原理

上面利用三类空間推广了約束和虛位移的概念，但是对于分析力学的其它概念来說，仍然是采用一般常用的定义．

这里先說明約束反力的意义．如果一个力学組仅具有約束(14)，那末这个力学組的"代表点"就要位于坐标空間 E_{3n} 中，同时約束反力卽由約束(14)导出．假如一个力学組同时具有約束(14)和(15)，那末在把約束(14)轉換成速度空間的綫性約束(19)以后，这个力学組的"代表点"就要位于速度空間 E'_{3n} 中，而約束反力則分别由約束(15)和(19)导出．在更普遍的加速度空間 E''_{3n} 中有和上面完全类似的情形．其次要說明，由于上述三类空間的标架向量完全相同，慣性力分量 $-m_i\ddot{x}_i$ 和主动力分量 X_i 将不会随着力学組"代表点"所处的空間不同而发生任何改变．

下面利用 D'Alembert 原理来推导三类空間中的基本微分原理．

在坐标空間 E_{3n} 中，D'Alembert 原理可写为

$$-m_i\ddot{x}_i + X_i + F_i = 0,$$

这里 F_i 表示約束(14)的反力，并假定所有約束均为理想約束．将式(22)代入上式幷标乘以坐标空間虛位移 δx^i，考虑到式(26)，有

$$\sum_i (-m_i\ddot{x}_i + X_i)\delta x^i = 0. \tag{33}$$

这就是著名的 D'Alembert-Lagrange 原理．

在速度空間 E'_{3n} 中，D'Alembert 原理可写为

$$-m_i\ddot{x}_i + X_i + F'_i + \Phi_i = 0,$$

这里 F'_i 代表約束(19)的反力，Φ_i 代表約束(15)的反力．假定所有約束均为理想約束，完全类似地可以得到早已由 Bertrand 以另一形式[17]表述过的下列推广：

$$\sum_i (-m_i\ddot{x}_i + X_i)\delta \dot{x}^i = 0. \tag{34}$$

完全类似地，在加速度空間 E''_{3n} 中有

$$\sum_i (-m_i\ddot{x}_i + X_i)\delta \ddot{x}^i = 0. \tag{35}$$

这就是熟知的 Gauss 原理．显然，在我們的推导中 Gauss 原理已經失去它原来的物理基础（最小約束概念），而只成为 D'Alembert 原理的一种邏輯上的推論了．

如果再以耗损力分量[2] I_i 表示主动力分量与慣性力分量之和，将方程（33），（34）和（35）改写为

$$\sum_i I_i \delta x^i = 0,$$

$$\sum_i I_i \delta \dot{x}^i = 0,$$

$$\sum_i I_i \delta \ddot{x}^i = 0,$$

我們就不难以統一的形式来表述經典力学的三个基本微分原理．

由上述証明中可以看出，D'Alembert-Lagrange 原理是属于坐标空間的基本微分原理，Bertrand 原理及 Gauss 原理則是分别属于速度空間和加速度空間的基本微分原理．当不存在加速度空間約束时，Gauss 原理将和 Bertrand 原理等价．如果加速度空間約束和速度空間約束都不存在，Gauss 原理与 Bertrand 原理将和 D'Alembert-Lagrange 原理等价．在三个原理中，Gauss 原理具有最大的普遍性．

三、不完整力学組的运动方程

由于不完整約束是速度空間約束，显然 Bertrand 原理应当成为推导运动方程的主要依据．本节将給出几个实例．

在选择了广义坐标 q^s 以后，非綫性不完整約束可以用方程（16）来表示．若将

$$\delta \dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^s} \delta \dot{q}^s$$

代入 Bertrand 原理（34）并考虑到式（32），則可得到推广的 Routh 方程如下：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^s} = Q_s + \lambda_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma^*}{\partial \dot{q}^s}. \tag{36}$$

若将式（16）对 r 个 $\dot{q}^s$ 解出，則有

$$\dot{q}^\alpha = \theta^\alpha(\dot{q}^\beta, q^s, t) \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \cdots, r \\ \beta = 1, \cdots, 3n - l - r \end{pmatrix}, \tag{37}$$

于是 $\dot{x}^i$ 即可写为

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha}\theta^\alpha + \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta}\dot{q}^\beta + \frac{\partial x^i}{\partial t}. \tag{38}$$

将上式取速度变分

$$\delta \dot{x}^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} H^\alpha_\beta + \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta}\right)\delta \dot{q}^\beta,$$

式中 $H^\alpha_\beta = \dfrac{\partial \theta^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta}$．将上式代入式（34），經过变换，得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}^\beta}\right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q^\beta} = W_\beta + M_\beta, \tag{39}$$

其中已令

$$W_\beta = -\left\{\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(\frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial q^\beta} - \dot{H}^\alpha_\beta\right) - \frac{\partial T^*}{\partial q^\alpha} H^\alpha_\beta\right\},$$

$$M_\beta = Q_\alpha H^\alpha_\beta + Q_\beta,$$

式中 $\tilde{T}$ 及 T^* 均代表力学組的动能，不过对前者的 $\dot{q}^\alpha$ 已經用式（37）予以置換，而对后者的則并未置換．同样，如果采用加速度能量 S，还可得到

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}^\beta} = Q_\alpha H^\alpha_\beta + Q_\beta. \tag{40}$$

如果引用 Ценов[18] 建議的关系

$$\dot{T} = m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i,$$

方程(40)还可写为

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \ddot{q}^\beta} = Q_\alpha H^\alpha_\beta + Q_\beta. \tag{41}$$

附带指出，上式所用的动能 T 乃是用式(38)代入而得到的．

如果不完整約束是綫性的：

$$\dot{q}^\alpha = b^\alpha_\beta \dot{q}^\beta + b^\alpha,$$

那末，方程(39)，(40)，(41)在形式上保持不变，只須将 H^α_β 換成 b^α_β 就成．

参　考　文　献

[1] Князев, Г. Н., Об устойчивости неголономных систем в критических случаях, *Сб. «Механика» МВТУ им. Баумана*, 1963, 56—64.

[2] Бухгольц, Н. Н., Основной курс теоретической механики, Гостехиздат, Москва, 1939 (錢尙武、錢敏譯，理論力学基本教程，商务印书館，上海).

[3] Аппель, П., Теоретическая механика, Т. II, Физматгиз., Москва, 1961, 332—335.

[4] Чаплыгин, С. А., О движении тяжёлого тела вращения по горизонтальной плоскости, Исследования по динамике неголономных систем, Гостехиздат., 1949 (張燮譯，論重旋轉体在水平面上的运动，非全定系統的动力学研究，科学出版社，北京，1956，1—16).

[5] Лурье, А. И., Аналитическая механика, Физматгиз., Москва, 1961, 400—402.

[6] Добронравов, В. В., Аналитическая динамика в неголономных координатах, *Уч. зап. МГУ «Механика»*, **11**, 122, 1948, 77—182.

[7] Гантмахер, Ф. Р., Лекции по аналитической механике, Физматгиз., Москва, 1960, 67—73, 17, 20.

[8] Фуфаев, Н. А., Уравнения чаплыгина и теорема о приводящем множителе в случае квазикоординат, *ПММ*, **25**, 3, 1961, 385—390.

[9] Четаев, Н. Г., О принципе Гаусса, Работы по аналитической механике, Изд. АН СССР, Москва, 1962, 323—326.

[10] Гаусс, К., Об одном новом общем принципе механики, *Сб. «Вариационные приниципы механики»*, Физматгиз., Москва, 1959, 170—172.

[11] Четаев, Н. Г., Одно видоизменение принципа Гаусса, Работы по аналитической механике, Изд. АН СССР, Москва, 1962, 327—328.

[12] Погосов, Г. С., Уравнения движения для системы с неголономными-нелинейными связями, *Вестник МГУ*, 10, 1948, 93—97.

[13] Ножичка, Ф., Основные принципы механики и их эквивалентность, *Сб. «Механика»*, 2, 1962, 31—59.

[14] Kreyszig, E., Differential Geometry, Oxford Univ. Press, London, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1959, 17.

[15] Vâlcovici Victor, 力学的新泛函論証，力学文摘（一般力学部分），9, 1962, 13.

[16] Киргетов, В. И., О «возможных перемещениях» материальных систем с линейными дифференциальными связями второго порядка, *ПММ*, **23**, 4, 1959, 666—671.

[17] Whittaker, E. T., A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, Cambridge at the Univ. Press, 1952, 260—261.
[18] Ценов, И., Об одной новой форме уравнений аналитической динамики, *ДАН СССР*, **89**, 1, 1953, 21—24.

ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Ню Цин-пин
(*Шаньдунский политехнический институт*)

Резюме

В первой части работы, прежде всего, приведены основные понятия о трёх пространствах, которые называются соответственно пространством координат E_{3n}, пространством скоростей E'_{3n} и пространством ускорений E''_{3n}. В пространстве координат, как правило, x^i принимаются за независимые переменные, в пространстве скоростей $\dot{x}^i$ за независимые переменные, а x^i за параметры, в пространстве ускорений $\ddot{x}^i$ за независимые переменные, а x^i и $\dot{x}^i$ за параметры. Уравнения голономных связей (14) геометрически описывают l гиперповерхностей в пространстве координат. Уравнения нелинейно-неголономных связей (15) геометрически описывают r гиперповерхностей в пространстве скоростей. Уравнения нелинейных дифференциальных связей второго порядка (17) геометрически описывают p гиперповерхностей в пространстве ускорений. Даны общие определения о идеальных связях с геометрической точки зрения. По отношению к голономным связям это определение эквивалентно существующему определению. Рассматривая δx^i, $\delta \dot{x}^i$ и $\delta \ddot{x}^i$ соответственно как возможные перемещения в пространстве координат, возможные перемещения в пространстве скоростей и возможные перемещения в пространстве ускорений, через одинаковые по своему виду формулы (33), (34) и (35) мы можем описывать три основных дифференциальных принципа:принцип Даламбера-Лагранжа, принцип Бертрана и принцип Гаусса. Показано, что в пространстве координат принцип Даламбера-Лагранжа является критерием для определения истинного движения механических систем с голономными связями, что в пространстве скоростей принцип Бертрана——критерием для определения истинного движения механических систем с нелинейно-неголономными связями и что в пространстве ускорений принцип Гаусса——критерием для определения истинного движения механических систем с нелинейными дифференциальными связями второго порядка. Один из трёх принципов——принцип Гаусса является принципом общего характера.

Во второй части работы, исходя из принципа Бертрана, получен ряд уравнений движения механических систем с неголономными связями.