

## 研究简报

### 用弹性薄板广义变分原理解某些综合边界支承矩形板 在均匀压力作用下的屈曲问题\*

施振东  
(北京航空学院)

#### 提 要

本文应用薄板广义变分原理<sup>[1,2]</sup>处理了某些综合边界支承矩形板在两个垂直方向受均匀压力作用下的屈曲问题。先就两邻边固定,其余两邻边悬空的情况导出一般解答。接着讨论了十一种特殊边界组合,并对正方形算出数字结果。从 Fourier 级数只取两项和三项的计算结果表明,本文的方法是有效的,收敛情况比较令人满意;在有些情况下相对误差小于 0.3% 或更小,在最不利的情况下最多也不超过 6%。此外,很多情况还给出最小临界应力的下估值。

#### 一、引 言

矩形薄板在两个垂直方向受均匀压力作用下的小挠度屈曲问题,很多文献<sup>[3-5]</sup>都曾讨论过,文献[6]则比较系统地收集过一些研究结果。然而,象两邻边悬空另两边固定或铰支或一为固定一为铰支等情况却未曾见到。用一般经典方法直接将屈曲面展成三角级数来求解的困难,是它的高阶导数不能由逐项微分求出,而且收敛性甚差。本文应用弹性薄板广义变分原理处理了这一问题。先就两邻边固定另两边悬空的情况导出一般解答,接着讨论了它的十一种特殊边界组合(表1),最后对所有情况的方板给出了近似结果(表2)。

#### 二、两邻边固定另两边悬空矩形板的屈曲问题

考虑一矩形薄板,两邻边( $x=0$ 及 $y=0$ )固定,另两边( $x=a$ 及 $y=b$ )悬空,在 $x, y$ 方向分别承受压力 $p_x$ 及 $p_y$ (图1):

$$p_x = \mu_1 p_y, \quad 0 \leq \mu_1 \leq \infty.$$

问题是要在边界条件

当 $x=0$ 时:

$$w = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

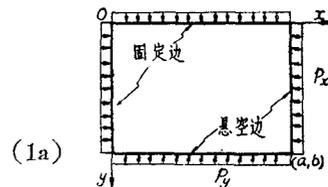
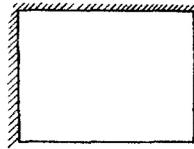
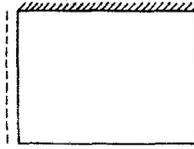
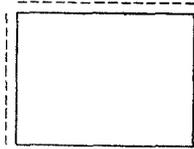
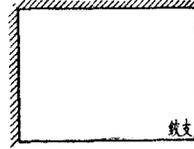
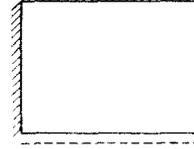


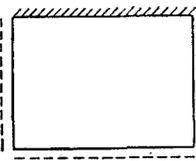
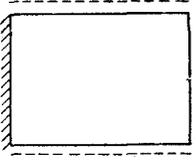
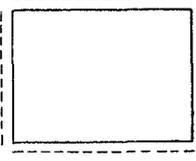
图 1

\* 1963年4月24日收到。

表 1

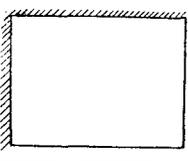
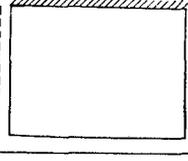
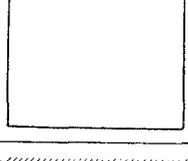
支 承 情 况	方 程 组 或 特 征 方 程	说 明
① 	(13)—(17)	一般情况
② 	(13), (15)—(17)	令 $b_n = 0$ 并取消式(14)
③ 	(13), (15), (17)	令 $b_n = d_m = 0$ 并取消式(14), (16)
④ 	(13)—(16)	令 $w_{ab} = C$ 并取消式(17)
⑤ 	(13), (15), (16)	令 $b_n = w_{ab} = 0$ 并取消式(14), (17)
⑥ 	(13), (15)	令 $b_n = d_m = w_{ab} = 0$ 并取消式(14), (16), (17)
⑦ 	(14), (16)	令 $a_n = c_m = w_{ab} = 0$ 并取消式(13), (15), (17)
⑧ 	$r_m \operatorname{cth} r_m b - \bar{r}_m \operatorname{cth} \bar{r}_m b = 0^{(1)}$	令 $a_n = b_n = c_m = w_{ab} = 0$ 并取消式(13)—(15), (17)
⑨ 	(13), (14), (16)	令 $c_m = w_{ab} = 0$ 并取消式(15), (17)

續表 1

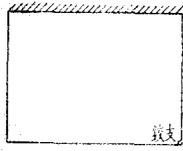
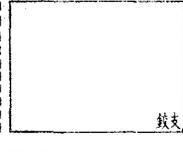
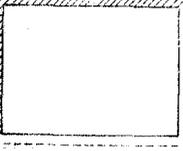
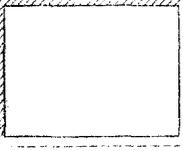
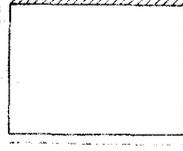
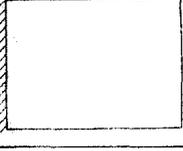
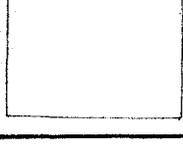
支 承 情 况	方 程 組 或 特 征 方 程	說 明
	(13), (16)	令 $b_n = c_m = w_{ab} = 0$ 并取消式 (14), (15), (17)
	$1p_n 2q_n - 1q_n 2p_n = 0^{(2)}$	令 $c_m = d_n = w_{ab} = 0$ 并取消式 (15)–(17)
	$-(\bar{r}_n^2 - \nu\beta_n^2)r_n \text{cth } r_n a + (\bar{r}_n^2 - \nu\beta_n^2)\bar{r}_n \text{cth } \bar{r}_n a = 0^{(3)}$	令 $b_n = c_m = d_n = w_{ab} = 0$ 并取消式(14)–(17)

1), 2), 3) 这些情况 P. Shuleshko<sup>[8]</sup> 和 N. Yamaki<sup>[9]</sup> 曾經研究过, 这里的結果可以化成他們的表达式。

表 2

支 承 情 况	所 取 項 数	对 称 屈 曲		反 对 称 屈 曲		最 小 值		說 明
		$\lambda$	相对誤差 %	$\lambda$	相对誤差 %	$\lambda_{cr}$	相对誤差 %	
	$m = n = 1$ $m = n = 2$ $m = n = 3$	0.444 0.531 0.557	16.4% 4.7%	1.102 1.224 1.297	10% 5.6%	0.444 0.531 0.557	16.4% 4.7%	对 称 屈 曲 下 估 值
	$m = n = 1$ $m = n = 2$ $m = n = 3$					0.364 0.395 0.401	7.9% 1.5%	下 估 值
	$m = n = 1$ $m = n = 2$ $m = n = 3$	0.20410 0.20380 0.20376	0.15% 0.02%	0.9275 0.9270 0.9269	0.05% 0.01%	0.20410 0.20380 0.20376	0.15% 0.02%	对 称 屈 曲 上 估 值
	$m = n = 1$ $m = n = 2$ $m = n = 3$	2.082 2.558 2.613	18.6% 2.1%	1.102 1.224 1.297	10% 5.6%	1.102 1.224 1.297	10% 5.6%	反 对 称 屈 曲 下 估 值

續表 2

支 承 情 况	所取項數	对 称 屈 曲		反 对 称 屈 曲		最 小 值		說 明
		$\lambda$	相对誤差 %	$\lambda$	相对誤差 %	$\lambda_{cr}$	相对誤差 %	
⑥ 	$m = n = 1$ $m = n = 2$ $m = n = 3$					0.946 0.992 1.008	4.6% 1.6%	下 估 值
⑦ 	$m = n = 1$ $m = n = 2$ $m = n = 3$	1.2070 1.2033 1.2027	0.3% 0.05%	0.9275 0.9270 0.9269	0.05% 0.01%	0.9275 0.9270 0.9269	0.05% 0.01%	反 对 称 屈 曲 上 估 值
⑧ 	$m = n = 1$ $m = n = 2$ $m = n = 3$	3.162 3.245 3.252	2.55% 0.22%	$\lambda > 4$		3.162 3.245 3.252	2.55% 0.22%	对 称 屈 曲 下 估 值
⑨ 	$m = n = 1$					2.6665		文 献 [6] 給 出 $\lambda = 2.6627$
⑩ 	$m = n = 1$ $m = n = 2$ $m = n = 3$					1.496 1.695 1.774	11.7% 4.4%	下 估 值
⑪ 	$m = n = 1$ $m = n = 2$ $m = n = 3$					1.467 1.680 1.761	12.7% 4.6%	下 估 值
⑫ 	$n = 1$					1.14		文 献 [3] 給 出 $\lambda = 1.13$
⑬ 	$n = 1$					1.055		文 献 [3] 給 出 $\lambda = 1.05$

当  $x = a$  时:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (2a)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{p_x}{D} \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad (2b)$$

当  $y = 0$  时:

$$w = 0, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad (3b)$$

当  $y = b$  时:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{p_y}{D} \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad (4b)$$

当  $x = a, y = b$  时:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5)$$

之下求解下列微分方程的本征值:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{p_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{p_y}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (6)$$

式中  $w = w(x, y)$  是屈曲函数,  $D$  是板的抗弯刚度,  $\nu$  是 Poisson 系数.

取

$$w(x, y) = \frac{w_{ab}}{ab} xy + w_1(x, y), \quad (7)$$

其中  $w_{ab}$  为角点  $(a, b)$  处的挠度,  $w_1$  在板四个角点处的值均为零. 将式(7)代入式(6)可知,  $w_1(x, y)$  也满足平衡方程(6). 由于  $w_1$  在四个角点处的值为零, 故宜将此板悬空边的挠度展成正弦级数. 设再将固定边的弯矩也表成正弦级数, 则  $w_1$  的边界条件在所有的边上均可改为下列“广义简支”边界条件(即四个边的挠度和弯矩已知):

当  $x = 0$  时:

$$w_1 = 0, \quad (1a')$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \beta_n^2 \sin \beta_n y \quad \left( \beta_n = \frac{n\pi}{b} \right); \quad (1c)$$

当  $x = a$  时:

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \beta_n y, \quad (2c)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = -\nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu \beta_n^2 a_n \sin \beta_n y; \quad (2a')$$

当  $y = 0$  时:

$$w_1 = 0, \quad (3a')$$



原式中关于应力应变关系、平衡方程、挠度边界条件以及弯矩边界条件的积分因已被满足,故不出现,且固定边的指定转角  $\bar{\alpha}$  和悬空边的指定静力等效切力  $\bar{V}_n$  均为零。

将  $\delta w = xy\delta\left(\frac{w_{ab}}{ab}\right) + \delta w_1$  代入式(12), 可以得到用弹性薄板广义变分原理表出的分别代替式(2b), (1b), (4b), (3b)及(5)的边界条件。再将式(7)及(10)代入, 演算并整理后, 依次得到下列关于系数  $a_n, \dots, w_{ab}$  的齐次线性方程:

$$1p_n a_n + 1q_n b_n + \sum_{m=1}^{\infty} 1f_{mn} c_m + \sum_{m=1}^{\infty} 1g_{mn} d_m - (-1)^n \frac{p_x}{D} \frac{w_{ab}}{\beta_n a} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (13)$$

$$2p_n a_n + 2q_n b_n + \sum_{m=1}^{\infty} 2f_{mn} c_m + \sum_{m=1}^{\infty} 2g_{mn} d_m - (-1)^n \frac{w_{ab}}{\beta_n a} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3p_{mn} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} 3q_{mn} b_n + 3f_m c_m + 3g_m d_m - (-1)^m \frac{p_y}{D} \frac{w_{ab}}{\alpha_m b} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4p_m a_n + \sum_{n=1}^{\infty} 4q_{mn} b_n + 4f_m c_m + 4g_m d_m - (-1)^m \frac{w_{ab}}{\alpha_m b} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5p_n a_n + \sum_{n=1}^{\infty} 5q_n b_n + \sum_{m=1}^{\infty} 5f_m c_m + \sum_{m=1}^{\infty} 5g_m d_m + \left[ -2(1-\nu) + \frac{1}{3} \left( b^2 \frac{p_x}{D} + a^2 \frac{p_y}{D} \right) \right] w_{ab} = 0, \quad (17)$$

其中

$$1p_n = -\frac{(\bar{r}_n^2 - \nu\beta_n^2)^2 r_n b}{\bar{r}_n^2 - r_n^2} \operatorname{cth} r_n a + \frac{(r_n^2 - \nu\beta_n^2)^2 \bar{r}_n b}{\bar{r}_n^2 - r_n^2} \operatorname{cth} \bar{r}_n a, \quad (13a)$$

$$1q_n = -\frac{\beta_n^2}{\bar{r}_n^2 - r_n^2} \left[ (\bar{r}_n^2 - \nu\beta_n^2) \frac{r_n b}{2 \operatorname{sh} r_n a} - (r_n^2 - \nu\beta_n^2) \frac{\bar{r}_n b}{2 \operatorname{sh} \bar{r}_n a} \right], \quad (13b)$$

$$1f_{mn} = (-1)^{m+n} \frac{\alpha_m \beta_n \left[ (1-\nu)^2 \alpha_m^2 \beta_n^2 - \frac{p_y}{D} \alpha_m^2 - \frac{p_x}{D} \beta_n^2 + \frac{p_x p_y}{D^2} \right]}{(r_m^2 + \beta_n^2)(\bar{r}_m^2 + \beta_n^2)}, \quad (13c)$$

$$1g_{mn} = (-1)^m \frac{\alpha_m^3 \beta_n \left[ \alpha_m^2 + (2-\nu)\beta_n^2 - \frac{p_x}{D} \right]}{(r_m^2 + \beta_n^2)(\bar{r}_m^2 + \beta_n^2)}, \quad (13d)$$

$$2p_n = \frac{1}{\bar{r}_n^2 - r_n^2} \left[ (\bar{r}_n^2 - \nu\beta_n^2) \frac{r_n b}{2 \operatorname{sh} r_n a} - (r_n^2 - \nu\beta_n^2) \frac{\bar{r}_n b}{2 \operatorname{sh} \bar{r}_n a} \right], \quad (14a)$$

$$2q_n = \frac{\beta_n^2}{\bar{r}_n^2 - r_n^2} \left[ \frac{r_n b}{2} \operatorname{cth} r_n a - \frac{\bar{r}_n b}{2} \operatorname{cth} \bar{r}_n a \right], \quad (14b)$$

$$2f_{mn} = -(-1)^n \frac{\alpha_m \beta_n \left[ \beta_n^2 + (2-\nu)\alpha_m^2 - \frac{p_y}{D} \right]}{(r_m^2 + \beta_n^2)(\bar{r}_m^2 + \beta_n^2)}, \quad (14c)$$

$$2g_{mn} = -\frac{\alpha_m^3 \beta_n}{(r_m^2 + \beta_n^2)(\bar{r}_m^2 + \beta_n^2)}, \quad (14d)$$

$$3p_{mn} = (-1)^{m+n} \frac{\alpha_m \beta_n \left[ (1-\nu)^2 \alpha_m^2 \beta_n^2 - \frac{p_y}{D} \alpha_m^2 - \frac{p_x}{D} \beta_n^2 + \frac{p_x p_y}{D^2} \right]}{(r_n^2 + \alpha_m^2)(\bar{r}_n^2 + \alpha_m^2)}, \quad (15a)$$

$$3q_{mn} = (-1)^n \frac{\alpha_m \beta_n^3 \left[ \beta_n^2 + (2-\nu) \alpha_m^2 - \frac{p_y}{D} \right]}{(r_n^2 + \alpha_m^2)(\bar{r}_n^2 + \alpha_m^2)}, \quad (15b)$$

$$3f_m = -\frac{(\bar{r}_m^2 - \nu \alpha_m^2)^2}{\bar{r}_m^2 - r_m^2} \frac{r_m a}{2} \operatorname{cth} r_m b + \frac{(r_m^2 - \nu \alpha_m^2)^2}{\bar{r}_m^2 - r_m^2} \frac{\bar{r}_m a}{2} \operatorname{cth} \bar{r}_m b, \quad (15c)$$

$$3g_m = -\frac{\alpha_m^2}{\bar{r}_m^2 - r_m^2} \left[ (\bar{r}_m^2 - \nu \alpha_m^2) \frac{r_m a}{2 \operatorname{sh} r_m b} - (r_m^2 - \nu \alpha_m^2) \frac{\bar{r}_m a}{2 \operatorname{sh} \bar{r}_m b} \right], \quad (15d)$$

$$4p_{mn} = -(-1)^m \frac{\alpha_m \beta_n \left[ \alpha_m^2 + (2-\nu) \beta_n^2 - \frac{p_x}{D} \right]}{(r_n^2 + \alpha_m^2)(\bar{r}_n^2 + \alpha_m^2)}, \quad (16a)$$

$$4q_{mn} = -\frac{\alpha_m \beta_n^3}{(r_n^2 + \alpha_m^2)(\bar{r}_n^2 + \alpha_m^2)}, \quad (16b)$$

$$4f_m = \frac{1}{\bar{r}_m^2 - r_m^2} \left[ (\bar{r}_m^2 - \nu \alpha_m^2) \frac{r_m a}{2 \operatorname{sh} r_m b} - (r_m^2 - \nu \alpha_m^2) \frac{\bar{r}_m a}{2 \operatorname{sh} \bar{r}_m b} \right], \quad (16c)$$

$$4g_m = \frac{\alpha_m^2}{\bar{r}_m^2 - r_m^2} \left[ \frac{r_m a}{2} \operatorname{cth} r_m b - \frac{\bar{r}_m a}{2} \operatorname{cth} \bar{r}_m b \right], \quad (16d)$$

$$5p_n = -(-1)^n \frac{b}{\beta_n} \frac{p_x}{D}, \quad 5q_n = (-1)^n \beta_n b, \quad (17a, b)$$

$$5f_m = -(-1)^m \frac{a}{\alpha_m} \frac{p_y}{D}, \quad 5g_m = (-1)^m \alpha_m a. \quad (17c, d)$$

### 三、若干特例

上节在一般情况下得到的方程(13)~(17)是和系数  $a_n, b_n, c_m, d_m$  及  $w_{ab}$  相对应的, 即它们依次由这些系数的变分不为零得到。因此, 设  $x = a$  边为简支, 则有  $a_n = 0$ , 并应取消式(13), 等等。表 1 给出本问题所包括的十二种边界组合的齐次线性代数方程组或相应的特征方程。

### 四、对方板的计算结果

对于指定边长比及压力比  $\mu_1$  的板, 取有限个方程并使其系数行列式为零, 用试算法可以找到最小临界应力的近似值。

作为一个例子, 表 2 给出了各种支承情况下的方板在  $\mu_1 = 1$  及  $\nu = 0.3$  时的最小临界应力系数值  $\lambda$  ( $\lambda = \frac{p_{cr} a^2}{D \pi^2}$ )。结果表明:

1. 所有具有悬空边情况的  $\lambda_{cr}$ , 均比四边简支者 ( $\lambda_{cr} = 2$ ) 为低, 特别是情况①—③的  $\lambda_{cr}$  更低。然而, 当角点铰支时,  $\lambda_{cr}$  却有较显著的提高。

2. 所有具有固定边的情况都给出了  $\lambda_{cr}$  的下估值。如果其中没有悬空边, 这是显然

的;当存在悬空边时,计算指出,固定边弯矩的放松对  $\lambda_{cr}$  也起了重要作用。

3. 情况①及③中的反对称屈曲(对方板主对角线反对称)正好使角点处的挠度为零,因此,其结果分别与角点铰支的情况④及⑥一致。

### 参 考 文 献

- [1] 胡海昌,论弹性体力学与受范性体力学中的一般变分原理,物理学报, **10**, 3, 1954年9月, 259—290.
- [2] 舒德坚、施振东,弹性薄板的广义变分原理及其应用,北京航空学院学报, **1**, 1957, 27—40.
- [3] Shuleshko, P., Buckling of rectangular plates uniformly compressed in two perpendicular directions with one free edge and opposite edge elastically restrained, *Jour. Appl. Mech.*, **23**, 1956, 359—363.
- [4] Yamaki, N., Buckling of thin annular plate under uniform compression, *Jour. Appl. Mech.*, **25**, 2, 1958, 272—273.
- [5] Shuleshko, P., Buckling of rectangular plates with two unsupported edges, *Jour. Appl. Mech.*, **24**, 4, 1957, 537—540.
- [6] 弹性安定要覽,长柱研究委员会,日本コロメ社, 1960, 405—406.

## THE CALCULATION OF BUCKLING LOADS OF RECTANGULAR PLATES UNDER UNIFORM COMPRESSIONS WITH COMPLICATED BOUNDARY CONDITIONS BY MEANS OF THE GENERALIZED VARIATIONAL PRINCIPLE

SHI ZHEN-DONG

(Peking Aeronautical Institute)