

## 学术讨论

### 关于“非均匀各向同性介质弹性力学平面问题”\*

刘世宁

(北京航空学院)

文献[1]讨论了指定位移的边界条件用应力函数表示的问题。阅读之后,感到有几个问题值得提出来讨论。

一、文献[1]导出的位移边界条件(3.1)有错误,现在重新简略推导如下:

在指定位移的边界  $S$  上,边界条件为:

$$u(s) = \bar{u}(s), \quad v(s) = \bar{v}(s), \quad (1)$$

这里  $\bar{u}, \bar{v}$  分别代表边界线上的法向和切向指定位移(凡未加说明的符号均与文献[1]所用的相同)。为了要用应力函数表示这个边界条件,可将条件(1)合理地放松成

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{\rho} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} + \frac{\bar{u}}{\rho}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{v}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} + \frac{\bar{v}}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds}. \quad (3)$$

显然,条件(2)表示沿边界线的线应变  $\epsilon_s$  被指定,而条件(3)表示边界线的曲率变化  $\kappa_s$  (注意,不是几何曲率变化,而是应变曲率变化)被指定。 $\kappa_s$  也可以用应变分量表示,于是条件(2),(3)便可以写成

$$\epsilon_s = \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} + \frac{\bar{u}}{\rho}, \quad (4)$$

$$\kappa_s = \frac{\partial \gamma_{ns}}{\partial s} + \frac{\epsilon_n}{\rho} - \frac{\partial \epsilon_s}{\partial n} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} + \frac{\bar{v}}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds}. \quad (5)$$

但在文献[1]中却将条件(5)误为(见文献[1]式(3.1))

$$\frac{\partial \gamma_{ns}}{\partial s} + \frac{\epsilon_n}{\rho} - \frac{\partial \epsilon_s}{\partial n} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} + \frac{\bar{v}}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds}.$$

因而文献[1]中式(3.2)的第二式也应更正为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \right] + (1 + \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial s} \right] = \\ & = \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \phi}{\partial n} + (2 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) - \frac{3 + \nu}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = \end{aligned}$$

\* 1962年9月20日收到。

$$+ \frac{2+\nu}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -E \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} + \frac{\bar{v}}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \right). \quad (6)$$

二、文献[1]根据错误的关系式(3.2),认为弹性力学平面问题中固定边的边界条件与平板弯曲问题中自由边的边界条件之间的对应关系,只在直边界情形时才存在,而在曲线边界时不成立。这一结论是不正确的。实际上,这种对应关系早已为解伯民<sup>[2]</sup>指出过。如果注意到曲率变化 $\kappa_s$ 可以写成

$$\kappa_s = \left( -\frac{\partial \omega}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} \gamma_{ns} \right), \quad (7)$$

则这种对应关系还可以更明显地表示出来(式(7)中 $\omega$ 为 $n, s$ 面内的转动分量):

| 平板弯曲问题自由边边界条件                                  | 弹性平面问题固定边边界条件                                                                                                                 |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $M_n = 0$                                      | $(-\epsilon_s) = 0$                                                                                                           |
| $Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0$ | $\left( -\frac{\partial \omega}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} \gamma_{ns} \right) = 0$ |

所以,当这些边界条件分别用 $\omega$ 及 $\phi$ 表示时,它们的表达式自然是完全对应的。

三、关于指定位移的边界条件用应力函数 $\phi$ 表达的问题,文献[1]所作的讨论也是不完全的。因为在用 $\phi$ 表示位移边界条件时已将原来的边界条件(见式(1))放松了,所以为了要与原来的边界条件完全相当,通常还必须提出一些补充条件。试看一简单例题。考虑一矩形域的弹性力学平面应力问题,设其边界条件为:

$$\text{当 } x=0 \text{ 和 } x=a \text{ 时, } u=0, v=0; \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } y=0 \text{ 时, } \sigma_y = p(x), \tau_{xy} = 0; \\ &\text{当 } y=b \text{ 时, } \sigma_y = q(x), \tau_{xy} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

当以应力函数 $\phi$ 为未知函数时,边界条件(8)及(9)可换成

当 $x=0$ 和 $x=a$ 时,

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0; \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } y=0 \text{ 时, } \phi = \iint p dx dx, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = B; \\ &\text{当 } y=b \text{ 时, } \phi = \iint q dx dx + A \left( \frac{2x}{a} - 1 \right), \\ &\quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -C. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

条件(10)是由条件(8)放松得到的,它只规定边界 $x=0$ 和 $x=a$ 不伸缩,不弯曲,但不限制它们可能在 $x, y$ 面内发生刚体位移。显然,边界 $x=0$ 和 $x=a$ 之间的相对刚体位移才对应力有影响,因此在不涉及物体的位移时,可以认为由条件(8)换成条件(10)时,我们放松了三个自由度(对应于边界 $x=0$ 和 $x=a$ 之间的相对刚体位移)。为了要与原来的边界条件等价,条件(9)被加严而成为条件(11),其中所出现的三个静不定常数正是与被放松的三个自由度对应的广义力。只要适当选择这三个静不定常数,便可使条件(10),(11)

与原来的边界条件(8), (9)等价 (自然可相差一无关紧要的整体刚体位移). 不难求得, 确定常数  $A, B, C$  的补充条件<sup>[3]</sup>为:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu p \right)_{y=0} dx &= 0, \\ \int_0^a \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu q \right)_{y=b} dx &= 0, \\ \int_0^a \left( \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \phi \right)_{y=b} \left( \frac{2x}{a} - 1 \right) dx &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

从这个例子可以看到, 用  $\phi$  表示边界条件的問題远非如文献[1]所理解的那样简单.

最后还应指出, 当边界綫有角点时, 还常常出現角点条件. 例如, 众所周知, 在平板弯曲問題中, 自由角点处就有条件

$$\Delta(M_{ns}) = 0, \quad (13)$$

即角点前后  $M_{ns}$  之差为零. 类似地, 在弹性平面問題中, 固定角点处也有对应的条件<sup>[3]</sup>.

### 参 考 文 献

- [1] 杜庆华, The two-dimensional problems of the nonhomogeneous isotropic medium, Problems of continuum mechanics, Published by "The Society for Industrial and Applied Mathematics, 1961, 104—108" (或見 Проблемы механики сплошной среды, Издат. АН СССР, 1961, 152—156).
- [2] 解伯民, 弹性薄板弯曲問題和弹性力学平面問題之間的相似性, 弹性薄板小挠度平衡問題, 中国科学院出版, 1955, 97—102.
- [3] 刘世宁, 弹性扁壳的广义变分原理及扁壳理論的某些問題, 力学学报, 6, 1, 1963, 61—80.

## DISCUSSION ON "THE TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS OF THE NONHOMOGENEOUS ISOTROPIC MEDIUM"

LIU SHYH-NING

(Peking Aeronautical Institute)