

考虑剪切变形的正交各向异性 弹性平板近似理论*

余寿文 黄克智

(清华大学)

提 要

本文根据 C. Libove 与 S. B. Batdorf^[6] 关于考虑剪切变形的正交各向异性弹性平板理论建立了一种简化的二变量近似理论。假设横向剪切角 γ_x 与 γ_y 具有势函数 φ (见式 (2.9)), 总位能 Π (式 (2.8)) 可以通过两个独立函数即板的挠度 $w(x, y)$ 与势函数 $\varphi(x, y)$ 表出。在附录 I 中利用最小位能原理推出了 w 与 φ 的 Euler 微分方程 (I. 11) 与边界条件 (I. 12) — (I. 15)。计算了四边简支的方板的一个特例的临界受压载荷, 计算结果与 Robinson^[8] 根据文献 [6] 所作的结果的比较, 表明其间的差异很小, 如果各向异性的程度不过于显著的话。在附录 II 中证明了, 对于直棱多边形各向同性简支板来讲, 无论是弯曲或稳定问题, 本文结果恒与根据文献 [6] 的理论得到的结果一致。区别了两种不同的自由边: “完全自由边”, 其边界条件的形式如式 (3.14); “加强自由边”, 其边界条件形式如式 (3.17)。对具有自由边的正交异性板的分析表明, 一般说来, φ 不能解释为剪切挠度。

一、引 言

近年来由于工程中采用夹层结构, 考虑剪切变形的平板理论得到了发展和应用。E. Reissner^[1-3] 假设正应力 σ_x, σ_y 与横向剪应力 τ_{xz}, τ_{yz} 沿厚度的分布规律, 根据最小余能定理建立了考虑剪切变形与沿厚度方向的变形的平板近似理论, 并计算了一系列的例子, 其中一部分结果与弹性力学精确解及实验结果作了比较。比较的结果表明, 这一理论是符合实际情况的。根据 E. Reissner 在文献 [4] 中的分析, 沿厚度方向的变形的影响相对于剪切变形的影响而言是次要的。K. Girkman^[5] 等将 E. Reissner 的理论推广到正交各向异性平板的情况。

C. Libove 与 S. B. Batdorf^[6] 不考虑沿厚度方向的变形, 建立了正交各向异性平板的基本理论。这一理论, 除了其平板为各向异性的特点以外, 实质上与 E. Reissner 的理论是相同的。其全部的方程与 E. Reissner 的方程 (略去沿厚度方向的变形, 即令沿厚度方向刚度系数 C_{zz} 为无穷大) 也是完全相当的。在 N. J. Hoff^[7] 的理论中则还考虑了夹层板中表板的弯曲。此后, 上述理论曾被许多作者用来解决各种不同的具体问题。例如, J. R. Robinson^[8] 应用 C. Libove^[6] 的基本方程解正交各向异性夹层板的屈曲与弯曲问题, V. L. Salerno 与 M. A. Goldberg^[9] 应用 E. Reissner 的理论解决矩形板的弯曲问题, F. Essenberg^[10] 则用之来解刚性基础上的圆板问题, 等等。

* 1963年2月15日收到。

A. Л. Гольденвейзер^[11] 对 E. Reissner 的理论提出了很精辟的见解。他认为，在单层均匀板的情况下，根据直观及许多计算数据来判断，E. Reissner 的基本假设（即正应力 σ_x, σ_y 沿厚度线性地分布，而剪应力 τ_{xz}, τ_{yz} 沿厚度按抛物线分布）在距离板的边界（或应力状态的其他“畸变线”（линия искажения））较远处是反映真实情况的，但 E. Reissner 的理论所给出对古典平板理论的修正却主要表现在边界附近的区域^[11]。因此 E. Reissner 的理论可能只能正确地反映现象的性质，而所给出的修正值可能是不正确的。但必须指出 A. Л. Гольденвейзер 的指责不能适用于夹层板的情况，因为此时 E. Reissner 所假设的正应力 σ_x, σ_y 分布规律是符合真实情况的。最近 A. Л. Гольденвейзер^[12] 根据三维弹性理论基本方程，利用渐近积分的方法建立了单层均匀板考虑剪切变形的理论，但未将其结果与 E. Reissner 的结果作定量的比较。

关于考虑剪切变形的弹性平板理论，L. H. Donnell^[13]（对于单层均匀板）曾提出另一种处理方法：1) 将挠度 w 分成两部分即弯曲挠度 w_b 与剪切挠度 w_s ¹⁾；2) 保留古典平板理论的全部方程（平衡方程，弯矩与挠度间关系的方程等），但将其中原来的挠度改成弯曲挠度 w_b ；3) 除此之外，再加上下列两个新的方程：

$$\frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{nQ_x}{Gh}, \quad \frac{\partial w_s}{\partial y} = \frac{nQ_y}{Gh}, \quad (1.1)$$

其中 h 为板厚， Q_x, Q_y 为横向力， n 为考虑横向剪应力沿厚度之变化情况的某一系数（一般采用 $n = 6/5$ ）。这样一来，比起古典平板理论只增加一个未知数 w_s ，但却增加了两个方程（1.1）；因此方程的总数比未知函数的总数要多一个，构成一自相矛盾的方程组。另外如果把挠度分成上述两部分，在支座上难以分别规定 w_b 及 w_s 的边界条件，例如若支座无沉陷，那就只能要求在支座处的挠度 w 为零，而不能要求 w_b 与 w_s 分别为零。杜庆华进行了较多的实验研究，并在文献[14]中发展了 L. H. Donnell^[13] 的理论。

本文的目的是在 C. Libove 与 S. B. Batdorf^[6] 理论的基础上建立一种简化的二变量近似理论。所谓二变量理论，就是在前一理论的基础上，引入剪切角 γ_x, γ_y ，具有势函数 φ 的几何假设，根据最小位能原理来求得一组与未知量数目相同的基本方程与边界条件。根据这一理论，讨论了简支板稳定、弯曲问题以及 φ 是否代表剪切挠度的问题。

二、正交各向异性板二变量近似理论的基本方程与边界条件

根据文献[6]，正交各向异性平板的内力与变形分量的关系式为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} &= -\left(\frac{M_x}{D_x} - \mu_y \frac{M_y}{D_y}\right), \quad \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} = -\left(\frac{M_y}{D_y} - \mu_x \frac{M_x}{D_x}\right), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x}\right) &= -\frac{M_{xy}}{D_{xy}} = -\frac{M_{yx}}{D_{yx}}, \end{aligned} \right\} (D_{xy} = D_{yx}) \quad (2.1)$$

$$\gamma_x = \frac{Q_x}{D_{Q_x}}, \quad \gamma_y = \frac{Q_y}{D_{Q_y}}, \quad (2.2)$$

其中根据变形互逆定理：

$$\frac{\mu_x}{D_x} = \frac{\mu_y}{D_y}; \quad (2.3)$$

1) 文献[14]将 w_b 与 w_s 各表示成 w_1 与 w_2 。

D_x, D_y, μ_x (或 μ_y), D_{xy} ($= D_{yx}$), D_{Q_x}, D_{Q_y} 为六个独立的弹性常数; M_x, M_y 为弯矩, $M_{xy} = M_{yx}$ 为扭矩, Q_x, Q_y 为横向力(图 1); γ_x, γ_y (即 γ_{xz}, γ_{yz}) 为剪切角, α_x, α_y 为沿板厚度线段的旋转角; 设 w 为挠度, 则有

$$\alpha_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x, \quad \alpha_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y. \quad (2.4)$$

由式(2.1), (2.2)可解出内力通过变形分量的表达式:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{D_x}{1-\mu_x\mu_y} \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right), \\ M_y &= -\frac{D_y}{1-\mu_x\mu_y} \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \mu_x \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \right), \\ M_{xy} &= M_{yx} = -\frac{D_{xy}}{2} \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$Q_x = D_{Q_x} \gamma_x, \quad Q_y = D_{Q_y} \gamma_y. \quad (2.6)$$

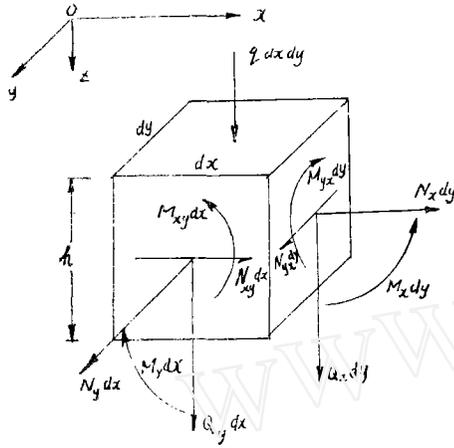


图 1

板每单位面积的变形能为

$$W = -\frac{1}{2} \left[M_x \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + M_{yx} \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \right] + \frac{1}{2} [Q_x \gamma_x + Q_y \gamma_y].$$

将式(2.5), (2.6)代入上式, 可得

$$W = -\frac{1}{2} \left[\frac{D_x}{1-\mu_x\mu_y} \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{D_x\mu_y + D_y\mu_x}{1-\mu_x\mu_y} \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{D_y}{1-\mu_x\mu_y} \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} D_{xy} \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \right)^2 + D_{Q_x} \gamma_x^2 + D_{Q_y} \gamma_y^2 \right], \quad (2.7)$$

它是一个恒正的表达式.

设有内力 $N_x, N_y, N_{xy} = N_{yx}$ 作用于板平面内(图 1), 则板的总位能为

$$\begin{aligned} \Pi = & \iint W dx dy + \frac{1}{2} \iint \left[-2q w + N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy - \\ & - \oint [-\bar{M}_{xv} \alpha_x - \bar{M}_{yv} \alpha_y + \bar{Q}_v w] ds, \end{aligned} \quad (2.8)$$

其中 $\bar{Q}_v, \bar{M}_{xv}, \bar{M}_{yv}$ 各为作用于板边界上的横向力与力矩(图 2a).

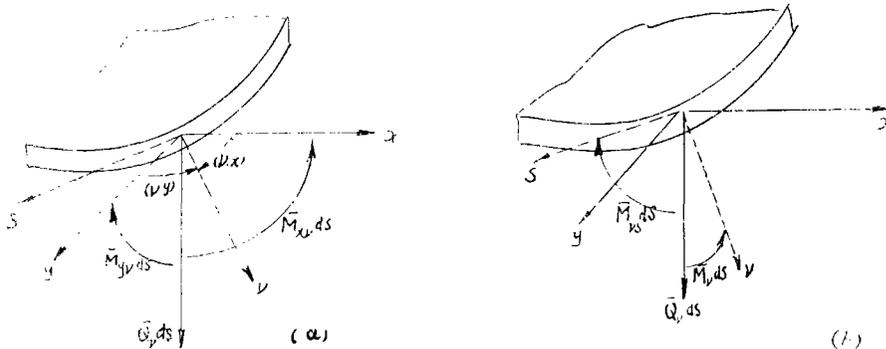


图 2

引入剪切角具有势函数 φ 的假设:

$$\gamma_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \gamma_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (2.9)$$

于是由式(2.4),

$$\alpha_x = \frac{\partial(\omega - \varphi)}{\partial x}, \quad \alpha_y = \frac{\partial(\omega - \varphi)}{\partial y}. \quad (2.10)$$

再由式(2.5), (2.6), 内力通过 ω 与 φ 的表达式¹⁾为:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{D_x}{1-\mu_x\mu_y} \left[\frac{\partial^2(\omega - \varphi)}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2(\omega - \varphi)}{\partial y^2} \right], \\ M_y &= -\frac{D_y}{1-\mu_x\mu_y} \left[\frac{\partial^2(\omega - \varphi)}{\partial y^2} + \mu_x \frac{\partial^2(\omega - \varphi)}{\partial x^2} \right], \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D_{xy} \frac{\partial^2(\omega - \varphi)}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

$$Q_x = D_{Qx} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Q_y = D_{Qy} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (2.12)$$

此时式(2.8)的总位能 Π 就成为两个未知函数 $\omega(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 的泛函, 问题就化为寻找 ω 与 φ 所必须满足的微分方程与边界条件以使泛函 Π 为最小. 根据 $\delta \Pi = 0$, 利用 Green 公式(推导见附录 I), 可得 Euler 微分方程(见附录 I 的式(I. 11))与边界条件(即附录 I 的式(I. 12)~(I. 15)). Euler 微分方程是:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(M_{xy} + M_{yx})}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(M_{xy} + M_{yx})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{yx} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

式(2.13)相当于平衡方程, 第一式可由古典平板理论的两个力矩平衡方程推导出, 第二式则与古典平板理论相应的方程完全相同. 在本节的近似理论中, 由于曾引进变形假设(2.9), 因此就不能要求平衡条件精确地满足. 换言之, 应放弃同时满足古典平板理论两个力矩平衡方程的要求²⁾, 而只能要求被放松了的近似平衡条件(2.13).

将式(2.11), (2.12)代入式(2.13), 得到近似理论中 ω 与 φ 所应满足的基本方程:

$$\left. \begin{aligned} L_{11}\omega + L_{12}\varphi &= -q, \\ L_{21}\omega + L_{22}\varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

式中

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{yx} \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ L_{12} &= D_{Qx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{Qy} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{21} &= \frac{D_x}{1-\mu_x\mu_y} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \left[\left(\frac{D_x\mu_y + D_y\mu_x}{1-\mu_x\mu_y} \right) + 2D_{xy} \right] \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{D_y}{1-\mu_x\mu_y} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\ L_{22} &= L_{12} - L_{21}. \end{aligned}$$

1) 式(2.11)在形式上与不考虑剪切变形的古典平板理论相同, 但须将古典理论中的挠度改为 $\omega - \varphi$.

2) 与此相反, 文献[14]要求同时满足古典平板理论的两个力矩平衡方程: $\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$, $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0$ [见[14]的式(1), (2)].

基本方程(2.14)亦可写成另一形式¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} L_{11}w + L_{12}\varphi &= -q, \\ L_{21}(w - \varphi) - L_{11}w &= q. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

板的边界条件²⁾则为(见附录 I 的式(I.12)~(I.15)):

$$1) \quad \delta w = 0, \quad (2.16a)$$

或

$$\left(Q_x + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yx} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(\nu, x) + \left(Q_y + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(\nu, y) = \bar{Q}_\nu; \quad (2.16b)$$

$$2) \quad \delta \alpha_\nu = \delta \frac{\partial(w - \varphi)}{\partial \nu} = 0, \quad (2.17a)$$

或

$$M_\nu = \bar{M}_\nu; \quad (2.17b)$$

3) 若在 AB 段边界上(图 3)转角 $\alpha_s = \frac{\partial(w - \varphi)}{\partial s}$ 为已知, 则

$$\delta \alpha_s = \delta \frac{\partial(w - \varphi)}{\partial s} = 0, \quad (2.18a)$$

且

$$\int_A^B \left[\left(Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cos(\nu, x) + \left(Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \cos(\nu, y) \right] ds + (\bar{M}_{s\nu} - M_{s\nu})_{s=B+0} - (\bar{M}_{s\nu} - M_{s\nu})_{s=A-0} = 0; \quad (2.18b)$$

或若在 AB 段边界上(图 3)扭矩 $\bar{M}_{s\nu}$ 为已知, 则

$$\left(Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cos(\nu, x) + \left(Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \cos(\nu, y) + \frac{\partial}{\partial s} (\bar{M}_{s\nu} - M_{s\nu}) = 0, \quad (2.18c)$$

且(当 AB 段内³⁾有 l 个角点即第 $k+1, k+2, \dots, k+l$ 角点时)

$$\Delta_i (\bar{M}_{s\nu} - M_{s\nu}) = 0 \quad (i = k+1, k+2, \dots, k+l). \quad (2.19b)$$

式(2.19a)称为补充边界条件, 式(2.19b)称为角点条件.

值得指出, 由于曾经引进过有关变形的假设(2.9),

所以当全边界上板的厚度绕法线方向 ν 的转角 $\alpha_\nu =$

$= \frac{\partial(w - \varphi)}{\partial s}$ 均为已知时, 必须满足条件

$$\oint \alpha_\nu ds = 0 \quad (2.20)$$

才有解, 因为式(2.20)是变形假设(2.9)的必然结果. 此

时补充边界条件(2.19a)成为

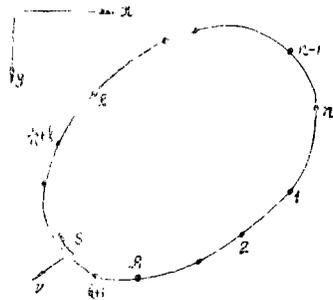


图 3

1) 文献[14]曾得到式(2.14)及(2.15)形式的基本方程, 但所采用的基本上是本文引言中所提到 L. H. Donnell 的处理方法, 故方程的总数比未知函数的总数多一个, 且 φ 被理解为剪切挠度 w_s , 而 $w - \varphi$ 则被理解为弯面挠度 w_m .

2) 必须指出, 和基本方程的情形一样, 在边界条件中出现的 Q_x 与 Q_y 均应理解为式(2.12), 而不应该理解为 $\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}$, 因为如前所述, 古典平板理论的力矩平衡方程在此处不能精确地满足.

3) 若 A, B 本身即为角点, 但 AB 段内无角点, 则 $l = 0$. 此时应取消式(2.19b), 即不存在角点条件.

$$\oint \left[\left(Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cos(\nu, x) + \left(Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \cos(\nu, y) \right] ds = 0.$$

由方程(2.13)的第一式,利用 Green 公式可证明上式恒自动满足.

如果在边界的 m 个段 $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_mB_m$ 上(图 4 中的实线)转角 $\alpha_s = \frac{\partial(\omega - \varphi)}{\partial s}$ 为已知,则在其中的每一段上可定出 $\omega - \varphi$ (但可能差一积分常数):

$$\omega - \varphi = f_k(s) + C_k,$$

$$\text{在 } A_kB_k \text{ 上 } (k = 1, 2, \dots, m). \quad (2.21)$$

在这些段上的补充边界条件(2.19a)为

$$\int_{A_k}^{B_k} \left[\left(Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cos(\nu, x) + \left(Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \cos(\nu, y) \right] ds + (\bar{M}_{\nu\nu} - M_{\nu\nu})_{s_{B_k}+0} - (\bar{M}_{\nu\nu} - M_{\nu\nu})_{s_{A_k}+0} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (2.22)$$

积分常数 C_1, C_2, \dots, C_m 可借助于式(2.22)的 m 个式子定出. 但这 m 个式子中只有 $m - 1$ 个是独立的. 这是因为由方程(2.13)的第一式,利用 Green 公式,并注意到 m 个段 $B_1A_2, B_2A_3, \dots, B_{m-1}A_m, B_mA_1$ (图 4 中的虚线. 在这些段上扭矩 $\bar{M}_{\nu\nu}$ 为已知)上的边界条件(2.18b),可证明式(2.22)的 m 个式子左端的总和恒等于零,因此积分常数 C_1, C_2, \dots, C_m 中有一个的值是不确定的. 其实根据基本方程(2.14)(或(2.15))及边界条件(2.16)——(2.19)不可能唯一定出 φ , 因为如果 ω, φ 是问题的解, 那么将 φ 加上任一常数 C 后, $\omega, \varphi + C$ 仍是同一问题的解. 所以在积分常数 C_1, C_2, \dots, C_m 中可以任意指定其中一个的数值,但是另外的 $m - 1$ 个则须满足式(2.22)的补充边界条件.

在附录 II 中将证明,在各边均为直线的多边形各向同性简支板情况下,不论是弯曲问题或稳定问题,在 C. Libove 与 S. B. Batdorf^[6] 的考虑剪切变形的正交各向异性弹性平板理论的解中,剪切角 γ_x, γ_y 确是具有势函数的. 因此在这种情况下,本节的近似理论给出与文献[6]的三变量理论完全相同的结果. 但当板非各向同性时,则二者的结果将有区别.

例. 设四边简支正交各向异性正方形平板 ($a = b$) 承受 x 轴向的均匀分布的压力 N_x , 并设以下的参数值:

$$k = D_x/D_y = 2.0, \quad \eta = D_{xy}/D_y = 0.8, \quad \mu_x = 0.25,$$

$$r = \frac{\pi^2 D_y}{b^2 D_{Q_y} (1 - \mu_x \mu_y)} = 1.$$

令 $P_y = \frac{4\pi^2 D_y}{b^2 (1 - \mu_x \mu_y)}$, $\varepsilon = D_{Q_x}/D_{Q_y}$, 则无量纲临界载荷参数 $N_{x,cr}/P_y$ 随剪切刚

度比 ε 的变化情况见表 1. 其中第一横行为按本文近似理论计算的结果,第二横行为按 J. R. Robinson^[8] (根据 C. Libove 与 S. B. Batdorf^[6] 的基本方程)计算的结果. 计算时假设沿 x, y 轴方向均只形成半波. 由表 1 可看出,本文二变量近似理论与文献[6]的三变量理论结果间的差异随各向异性的增加(即 ε 的增加)而加大.

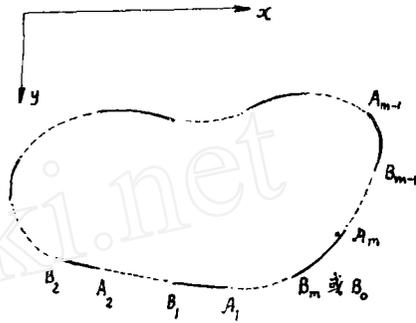


图 4

表1 临界载荷参数的比较

ε		1	2	3	4	5	10	50	100	∞
$\frac{N_{x,c1}}{P_y}$	本文结果	0.358	0.471	0.538	0.628	0.685	0.865	1.149	1.202	1.263
	文献[8]结果	0.354	0.467	0.538	0.585	0.619	0.707	0.802	0.817	0.833

三、关于近似理论中势函数 φ 的讨论

现在来讨论 φ 是否代表“剪切挠度”，(仅限于讨论弯曲问题 ($N_x = N_y = N_{xy} = 0$)), 这时基本方程(2.15)成为

$$\left. \begin{aligned} L_{12}\varphi &= -q, \\ L_{21}(w - \varphi) &= q, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} L_{12} &= D_{\theta_x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{\theta_y} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{21} &= \frac{D_x}{1 - \mu_x \mu_y} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \left(\frac{D_x \mu_y + D_y \mu_x}{1 - \mu_x \mu_y} + 2D_{xy} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_y}{1 - \mu_x \mu_y} \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

边界条件则可令式(2.16)–(2.19)中的 $N_x = N_y = N_{xy} = 0$ 而得到。在解某一个如上的考虑剪切变形的平板问题时，可以想象另外一个剪切刚度为无穷大的相应的平板问题即古典平板问题，其基本方程为

$$L_{21}w^* = q, \quad (3.3)$$

其中 w^* 表示挠度；此时边界条件有两个。比较式(3.1)的第二式与式(3.3)，可以看出， $w - \varphi$ 与 w^* 所满足的微分方程是一样的。但 $w - \varphi$ 是否等于 w^* ，决定于它们是否满足相同的边界条件。如果它们满足相同的边界条件（见例1），那就可以得到 $w - \varphi = w^*$ ，或 $w = w^* + \varphi$ ，因而可以把挠度 w 看成由两部分组成： w^* 表示弯曲挠度（即相应的古典平板问题中的挠度）， φ 表示剪切挠度。

例1. 沿周边简支或固支的任意形状的板¹⁾。由式(2.16a)，(2.17b)，(2.18a)，简支情况下的边界条件为：

$$w = 0, M_n = 0, \alpha_s = \frac{\partial(w - \varphi)}{\partial s} = 0, \quad (3.4)$$

固支情况下边界条件则为：

$$w = 0, \alpha_n = \frac{\partial(w - \varphi)}{\partial n} = 0, \alpha_s = \frac{\partial(w - \varphi)}{\partial s} = 0, \quad (3.5)$$

由式(3.4)或(3.5)，可以看出 $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0$ ，即 φ 在边界上等于一常数 C 。根据第二节的讨论，可以令 $C = 0$ 而不影响最后的结果。因此在边界上

$$w - \varphi = 0, \quad (3.6)$$

所以由式(3.5)，(3.6)，对于固支板， $w - \varphi$ 与相应古典平板问题中的 w^* 满足相同的边界条件

1) 此处假设在简支或固支边界上均具有对转角 α_s 的约束。此时 $\alpha_s = 0$ ，因此有解条件(2.20)恒满足。第二节中已证明，补充边界条件(2.19a)此时自动满足。

$$w - \varphi = 0, \quad \frac{\partial(w - \varphi)}{\partial \nu} = 0; \quad (3.7)$$

而对于简支板, 由于弯矩 M_x, M_y 与扭矩 $M_{xy} = M_{yx}$ 通过 $w - \varphi$ 的表达式 (2.11) 与古典理论中弯矩通过 w^* 的表达式相同, 因此 M_ν 通过 $w - \varphi$ 的表达式与古典理论中 M_ν 通过 w^* 的表达式也是相同的。所以对于简支板, $w - \varphi$ 与古典平板问题中的 w^* 满足相同的边界条件:

$$\left. \begin{aligned} w - \varphi &= 0, \\ M_\nu &= 0 \text{ (通过 } w - \varphi \text{ 表示)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

因此对于沿周边简支板与固支板, $w - \varphi = w^*$, 即 φ 表示剪切挠度 $w - w^*$ 。

在附录 II 中, 对直线边多边形各向同性简支板, 得到了 (见 (II.10) 式) 势函数 (此时即剪切挠度) 的表达式

$$\varphi = -\frac{D}{D_0} (\nabla^2 w + q/D_0). \quad (3.9)$$

由式 (3.1) 的第一式,

$$D_0 \nabla^2 \varphi = -q,$$

因此

$$\nabla^2 w = \nabla^2 w^* + \nabla^2 \varphi = \nabla^2 w^* - q/D_0. \quad (3.10)$$

代入式 (3.9), 得

$$\varphi = -\frac{D}{D_0} \nabla^2 w^*. \quad (3.11)$$

这就是直线边多边形各向同性简支板剪切挠度的简单表达式; 古典平板理论的挠度 w^* 一旦求出后, 可立即由此式决定剪切挠度 φ 。

但必须指出, 当边界上出现自由边时, 一般说来不能把 φ 当作剪切挠度。从下面的二个简单例子可以看出这一点。

例 2. 两对边 ($x = 0, a$) 简支且具有对转角 α_s 的约束, 另两对边 ($y = \pm b/2$) 自由, 在均布载荷 q 及沿一简支边 ($x = a$) 均匀分布的弯矩 M_0 作用下的正交各向异性平板 (图 5)。

自由边 DA, BC 可以区分为两种情况:

1) $y = \pm b/2$ 为完全自由边, 即在自由边上对转角 α_s 无约束的情况 ($\bar{M}_\nu = 0$)。

由式 (2.16a), (2.17b), (2.18a), 在两简支边上的边界条件为:

$$x = 0 \text{ 时: } w = 0, \quad M_x = 0, \quad \varphi = C_1; \quad (3.12a)$$

$$x = a \text{ 时: } w = 0, \quad M_x = M_0, \quad \varphi = C_2. \quad (3.13a)$$

由式 (2.19a) 得, 在两简支边上的补充边界条件为:

$$\int_{D(y=-\frac{b}{2})}^{C(y=+\frac{b}{2})} \left(Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=0} (-1) dy + (M_{xy})_D \Big|_{(x=0, y=-\frac{b}{2})} - (M_{xy})_C \Big|_{(x=0, y=\frac{b}{2})} = 0,$$

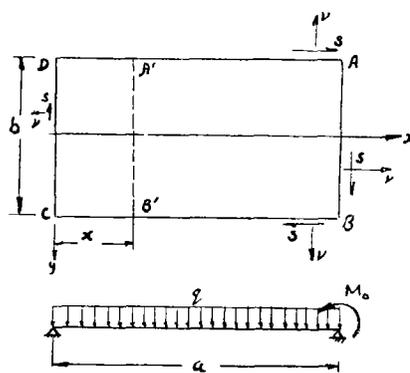


图 5

$$\int_{A(y=-\frac{b}{2})}^{B(y=+\frac{b}{2})} \left(Q_y - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} (+1) dy + (M_{xy})_B \Big|_{\substack{x=a \\ y=+\frac{b}{2}}} - (M_{xy})_A \Big|_{\substack{x=a \\ y=-\frac{b}{2}}} = 0,$$

或

$$\int_{D(y=-\frac{b}{2})}^{C(y=+\frac{b}{2})} \left(Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} \right)_{x=0} dy = 0, \quad (3.12b)$$

$$\int_{A(y=-\frac{b}{2})}^{B(y=+\frac{b}{2})} \left(Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} \right)_{x=a} dy = 0. \quad (3.13b)$$

由式(2.16b), (2.17b), (2.18b)^D, 在两自由边上的边界条件为:

$$y = \pm b/2 \text{ 时: } Q_y = 0, M_y = 0, \left(Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (3.14)$$

作任一平行于 y 轴的綫 $A'B'$ (图 5), 取式(2.13)的第一式沿 $A'B'CD$ 域积分, 利用 Green 公式, 并注意到边界条件(3.12b), (3.14), 可得

$$\int_{A'(y=-\frac{b}{2})}^{B'(y=+\frac{b}{2})} \left(Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} \right) dy = 0. \quad (3.15)$$

故 $Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial y}$ 沿板内任一平行于 y 轴的綫段积分均为零. 将式(3.15)从 $x=0$ 至 $x=a$

积分, 将式(2.12)的 $Q_x = D_{\rho x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 代入, 并注意式(3.12a), (3.13a), 得

$$D_{\rho x}(C_2 - C_1) - M_0 = 0. \quad (3.16)$$

因此当 $M_0 = 0$ 时, 必有 $C_2 = 0$. 如果指定在简支边 $CD(x=0)$ 上 $\varphi = C_1 = 0$, 则在简支边 $AB(x=a)$ 上, $\varphi = C_2 = M_0/D_{\rho x}$. 可见, 在此处不可能把 φ 当做剪切挠度, 因为它在两个简支边上不同时等于零.

2) $y = \pm b/2$ 为加强自由边, 即在自由边上对轉角 α 具有约束的情况. 此时在简支边 $x=0$ 与 $x=a$ 上的边界条件仍为式(3.12a)与(3.13a), 但是由于全部边界 $ABCD$ 上 $\alpha_x = 0$ 均为已知值, 故如第二节所述, 补充边界条件(2.19a)自动得到满足, 所以前述完全自由边的补充条件(3.12b), (3.13b) 此处已不复存在. 而在两自由边上的边界条件则由式(2.16b), (2.17b), (2.18a) 应为

$$y = \pm b/2 \text{ 时: } Q_y = 0, M_y = 0, \alpha_x = \frac{\partial(w - \varphi)}{\partial x} = 0. \quad (3.17)$$

因此沿 DA 边($y = -b/2$)有 $w - \varphi = -C_3$, 沿 BC 边($y = +b/2$)有

$$w - \varphi = -C_4.$$

但因 w 与 φ 在简支边与自由边的交点 A, B, C, D 处必为連續, 利用式(3.12a), (3.13a) 可知四个积分常数 $C_1 = C_2 = C_3 = C_4$, 并可令它們为零.

必須指出, 尽管在上述加强自由边的情况下, 也仍然不能把 φ 当作剪切挠度. 换言之, $w - \varphi$ 不同于相应的古典平板問題的解 w^* . 原因在于虽然 $w - \varphi$ 与 w^* 各满足相同的微分方程(3.1)的第二式与式(3.3), 但根据下文所述却满足不同的边界条件.

根据 φ 所满足的微分方程(3.1)的第一式

$$L_{12}\varphi = D_{\rho x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D_{\rho y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -q$$

及边界条件(見式(3.12a), (3.13a)的最末式与式(3.17)的第一式)

1) 由于在完全自由边 DA, BC 内无角点, 故无需满足如式(2.19b)的角点条件.

$$\begin{aligned} x=0 \text{ 时: } & \varphi = C_1 = 0, \\ x=a \text{ 时: } & \varphi = C_2 = 0, \\ y = \pm b/2 \text{ 时: } & Q_y = D_{Qy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

可得 φ 的解为

$$\varphi = \frac{q}{2D_{Qx}} x(a-x). \quad (3.18)$$

由式(3.12a), (3.13a), (3.17)可得 $w - \varphi$ 所满足的边界条件:

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ 时: } w-\varphi &= -C_1=0, M_x = -\frac{D_x}{1-\mu_x\mu_y} \left[\frac{\partial^2(w-\varphi)}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2(w-\varphi)}{\partial y^2} \right] = 0; \\ x=a \text{ 时: } w-\varphi &= -C_2=0, M_x = -\frac{D_x}{1-\mu_x\mu_y} \left[\frac{\partial^2(w-\varphi)}{\partial x^2} + \mu_x \frac{\partial^2(w-\varphi)}{\partial y^2} \right] = M_0; \\ y = \pm b/2 \text{ 时: } M_y &= -\frac{D_y}{1-\mu_x\mu_y} \left[\frac{\partial^2(w-\varphi)}{\partial y^2} + \mu_x \frac{\partial^2(w-\varphi)}{\partial x^2} \right] = 0, \\ & w - \varphi = 0. \end{aligned} \right\} (3.19)$$

如所周知,相应的两对边简支两对边自由的古典平板问题的边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ 时: } w^* &= 0, M_x^* = -\frac{D_x}{1-\mu_x\mu_y} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] = 0, \\ x=a \text{ 时: } w^* &= 0, M_x^* = -\frac{D_x}{1-\mu_x\mu_y} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \mu_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] = M_0, \\ y = \pm b/2 \text{ 时: } M_y^* &= -\frac{D_y}{1-\mu_x\mu_y} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \mu_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right] = 0, \\ \tilde{Q}_y^* &= \frac{\partial M_y^*}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}^*}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x} = \\ &= -\frac{D_y}{1-\mu_x\mu_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \mu_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right] - 2D_{xy} \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^2 \partial y} = 0^{1)}. \end{aligned} \right\} (3.20)$$

比较式(3.19)与(3.20)可以看出, $w - \varphi$ 与 w^* 所满足的边界条件是不相同的, $w - \varphi$ 却与古典平板理论中四边简支平板的解完全相同²⁾。

例 3. 两对边($x = 0, a$)固支,另两对边($y = \pm b/2$)自由,在分布载荷 $q(x)$ 作用下的正交各向异性平板(图 6)。

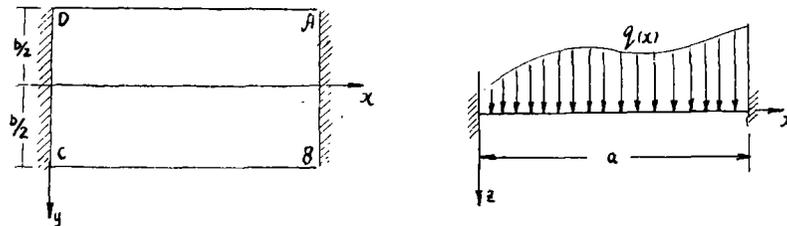


图 6

1) $y = \pm b/2$ 为完全自由边。由式(2.16a), (2.17a), (2.18a), 在两个固支边上的边

1) \tilde{Q}_y^* 表示古典平板理论 Kirchhoff 边界条件中的折算横向力。

2) 与此处的结论相反,文献[14]在加强自由边上对于该文的弯曲挠度 w_1 (相当于本文的 $w - \varphi$, 见第 308 页脚注 1)采用如本文式(3.20)当 $y = \pm b/2$ 时 w^* 的边界条件,即古典平板理论自由边的边界条件(见文献[14]的式(27),(28))。

界条件与:

$$x = 0 \text{ 时: } w = 0, \frac{\partial(w - \varphi)}{\partial x} = 0, \varphi = C_1; \quad (3.21a)$$

$$x = a \text{ 时: } w = 0, \frac{\partial(w - \varphi)}{\partial x} = 0, \varphi = C_2. \quad (3.21b)$$

由式(2.19a)所得的补充边界条件同前例中的式(3.12b)与(3.13b).

沿两自由边($y = \pm b/2$)的边界条件同前例中的式(3.14), 与前例相同, 可以得到式(3.15), 而代替式(3.16)则有

$$D_{0x}(C_2 - C_1)b = \int_{b/2}^{b/2} (M_x)_{x=a} dy - \int_{-b/2}^{b/2} (M_x)_{x=0} dy. \quad (3.22)$$

当分布载荷对于 $x = a/2$ 线为对称时, $C_2 = C_1$, 并可取其值为零, 此时可证明 $w - \varphi$ 与对应的古典平板问题的解 w^* 相同, 因此 φ 可以理解为剪切挠度 $w - w^*$, 但若分布载荷对 $x = a/2$ 线不对称, 则上式右端一般不为零, 因此势函数 φ 亦不可能代表剪切挠度.

2) $y = \pm b/2$ 为加强自由边. 沿固支边($x = 0, a$)的边界条件与式(3.21a), (3.21b)相同而补充边界条件(2.19a)自动得到满足; 沿自由边的边界条件则与式(3.17)相同, 和例2一样, 可证明沿 DA 边($y = -b/2$)有 $w - \varphi = -C_3$, 沿 BC 边($y = +b/2$)有 $w - \varphi = -C_4$, 且 $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$.

用与例2中相同的方法, 可以证明 $w - \varphi$ 满足微分方程

$$L_{21}(w - \varphi) = q$$

及边界条件:

$$x = 0 \text{ 时: } w - \varphi = -C_1 = 0, \frac{\partial(w - \varphi)}{\partial x} = 0;$$

$$x = a \text{ 时: } w - \varphi = -C_2 = 0, \frac{\partial(w - \varphi)}{\partial x} = 0;$$

$$y = \pm b/2 \text{ 时: } M_y = -\frac{D_y}{1 - \mu_x \mu_y} \left[\frac{\partial^2(w - \varphi)}{\partial y^2} + \mu_y \frac{\partial^2(w - \varphi)}{\partial x^2} \right] = 0,$$

$$w - \varphi = 0.$$

因此 $w - \varphi$ 与古典平板理论中沿两对边($x = 0, a$)固支, 另两对边($y = \pm b/2$)简支的平板的解完全相同¹⁾.

必须指出, 如果固定边 AB 相对于另一固定边 CD 有一向下的沉陷 Δ , 则边界条件(3.15a)中第一式应改为 $w = \Delta$; 由 w 与 φ 在 A, B, C, D 点须为连续的条件, 可知 $C_3 = C_4 = C_1 = C_2 - \Delta$, 因此在两固定边 CD 与 AB 上 φ 值的差恰好等于沉陷值 $C_2 - C_1 = \Delta$.

附录 I. 二变量近似理论的 Euler 微分方程(2.13)与边界条件(2.16)~(2.19)的推导, 取式(2.8)总位能 Π 的一次变分, 得

$$\delta \Pi = \iint \left[-M_x \delta \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \right) - M_y \delta \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right) - M_{yx} \delta \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \right) - M_{xy} \delta \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \right) + Q_x \delta \gamma_x + Q_y \delta \gamma_y \right] dx dy +$$

1) 见第 313 页脚注 2)。

$$+ \iint \left[-q \delta w + N_x \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + N_{yx} \frac{\partial w}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dx dy - \oint [-\bar{M}_{xy} \delta \alpha_x - \bar{M}_{yx} \delta \alpha_y + \bar{Q}_v \delta w] ds, \quad (I.1)$$

其中 $M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, Q_x, Q_y$ 应理解为式 (2.5), (2.6) 的表达式, 利用 Green 公式, 式 (I.1) 可写作

$$\begin{aligned} \delta II = & \iint \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta \alpha_x + \left(\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \delta \alpha_y + Q_x \delta \gamma_x + Q_y \delta \gamma_y \right] dx dy - \\ & - \iint \left[q + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{yx} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \delta w dx dy - \\ & - \oint \left[\{ M_x \cos(v, x) + M_{xy} \cos(v, y) \} \delta \alpha_x + \{ M_{yx} \cos(v, x) + M_y \cos(v, y) \} \delta \alpha_y \right] ds + \\ & + \oint \left[\left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yx} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(v, x) + \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(v, y) \right] \delta w ds - \\ & - \oint [-\bar{M}_{xy} \delta \alpha_x - \bar{M}_{yx} \delta \alpha_y + \bar{Q}_v \delta w] ds, \end{aligned}$$

其中 $\cos(v, x), \cos(v, y)$ 表示向外法线 v 的方向余弦, 将式 (2.4) 的 α_x, α_y 代入, 再利用 Green 公式, 得

$$\begin{aligned} \delta II = & \iint \left[\left(Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) \delta \gamma_x + \left(Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \delta \gamma_y \right] dx dy - \\ & - \iint \left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (M_{xy} + M_{yx})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{yx} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \delta w dx dy + \\ & + \oint \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yx} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(v, x) + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(v, y) - \bar{Q}_v \right] \delta w ds + \\ & + \oint \left[\{ \bar{M}_{xy} - M_x \cos(v, x) - M_{xy} \cos(v, y) \} \delta \alpha_x + \right. \\ & \quad \left. + \{ \bar{M}_{yx} - M_{yx} \cos(v, x) - M_y \cos(v, y) \} \delta \alpha_y \right] ds. \quad (I.2) \end{aligned}$$

将剪切角具有势函数的假设式 (2.9) 代入式 (I.2), 得

$$\begin{aligned} \delta II = & \iint \left[\left(Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] dx dy - \\ & - \iint \left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (M_{xy} + M_{yx})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{yx} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \delta w dx dy + \\ & + \oint \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yx} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(v, x) + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(v, y) - \bar{Q}_v \right] \delta w ds + \\ & + \oint \left[\{ \bar{M}_{xy} - M_x \cos(v, x) - M_{xy} \cos(v, y) \} \delta \left\{ \frac{\partial (w - \varphi)}{\partial x} \right\} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \{ \bar{M}_{y\nu} - M_{yx} \cos(\nu, x) - M_y \cos(\nu, y) \} \delta \left\{ \frac{\partial(\omega - \varphi)}{\partial y} \right\} ds. \quad (1.3)$$

利用 Green 公式, 并经过併项之后, 上式可化成

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & - \iint \left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(M_{xy} + M_{yx})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{yx} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] \delta \omega dx dy - \\ & - \iint \left[\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(M_{xy} + M_{yx})}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right] \delta \varphi dx dy + \\ & + \oint \left[\left(Q_x + N_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + N_{yx} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \cos(\nu, x) + \left(Q_y + N_y \frac{\partial \omega}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \cos(\nu, y) - \bar{Q}_y \right] \delta \omega ds - \\ & - \oint \left[\left(Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cos(\nu, x) + \left(Q_y - \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) \cos(\nu, y) \right] \delta(\omega - \varphi) ds + \\ & + \oint \left[\{ \bar{M}_{x\nu} - M_x \cos(\nu, x) - M_{xy} \cos(\nu, y) \} \delta \left\{ \frac{\partial(\omega - \varphi)}{\partial x} \right\} + \right. \\ & \left. + \{ \bar{M}_{y\nu} - M_{yx} \cos(\nu, x) - M_y \cos(\nu, y) \} \delta \left\{ \frac{\partial(\omega - \varphi)}{\partial y} \right\} \right] ds. \quad (1.4) \end{aligned}$$

把式(1.4)右端最末一个綫积分記作 I :

$$I = \oint \left[(\bar{M}_\nu - M_\nu) \delta \left\{ \frac{\partial(\omega - \varphi)}{\partial \nu} \right\} + (\bar{M}_{s\nu} - M_{s\nu}) \delta \left\{ \frac{\partial(\omega - \varphi)}{\partial s} \right\} \right] ds. \quad (1.5)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial \nu}$, $\frac{\partial}{\partial s}$ 表示沿边界法綫 ν 与切綫 s 的方向导数, \bar{M}_ν , $\bar{M}_{s\nu}$ 为作用于板边界上的弯矩与扭矩(图 2b):

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_\nu &= \bar{M}_{x\nu} \cos(\nu, x) + \bar{M}_{y\nu} \cos(\nu, y), \\ \bar{M}_{s\nu} &= -\bar{M}_{x\nu} \cos(\nu, y) + \bar{M}_{y\nu} \cos(\nu, x), \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

而 M_ν , $M_{s\nu}$ 则表示内弯矩:

$$\left. \begin{aligned} M_\nu &= M_x \cos^2(\nu, x) + M_y \cos^2(\nu, y) + (M_{yx} + M_{xy}) \cos(\nu, x) \cos(\nu, y), \\ M_{s\nu} &= M_{yx} \cos^2(\nu, x) - M_{xy} \cos^2(\nu, y) + (M_y - M_x) \cos(\nu, x) \cos(\nu, y), \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

此处 M_x , M_y , M_{xy} , M_{yx} 可以用式(2.11)通过 ω 与 φ 表出.

在对式(1.5)右端的第二部分采用分部积方法时必须注意: 若板的边界不是平滑的曲綫, 則由于在角点处法綫 ν 的方向突然改变, $\bar{M}_{s\nu}$ 与 $M_{s\nu}$ 在角点处可出現突变. 换言之, 它們只是在两相邻角点間为連續函数, 而在角点处可能具有一有限值的跃度. 在边界上取弧长 s 为座标, 設边界上共有 n 个角点, 其座标为 $s_1 (= s_{n+1})$, s_2, \dots, s_n (图 3). 將式(1.5)右端第二部分在各相邻角点之間用分部积分法进行积分, 得

$$\begin{aligned} I = & \oint \left[(\bar{M}_\nu - M_\nu) \delta \left\{ \frac{\partial(\omega - \varphi)}{\partial \nu} \right\} - \frac{\partial(\bar{M}_{s\nu} - M_{s\nu})}{\partial s} \delta(\omega - \varphi) \right] ds - \\ & - \sum_{i=1}^n \Delta_i (\bar{M}_{s\nu} - M_{s\nu}) \delta(\omega_i - \varphi_i), \quad (1.8) \end{aligned}$$

其中 ω_i 与 φ_i 各表示在第 i 角点处 ($s = s_i$) 的 ω 与 φ 值, 符号 Δ_i 则表示第 i 角点 ($s = s_i$) 处的跃度, 即

$$\Delta_i (\bar{M}_{s\nu} - M_{s\nu}) = (\bar{M}_{s\nu} - M_{s\nu})_{s=s_i+\epsilon} - (\bar{M}_{s\nu} - M_{s\nu})_{s=s_i-\epsilon}. \quad (1.9)$$

將式(1.4)的最末一个綫积分用式(1.8)代入, 得

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = & - \iint \left[\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(M_{xy} + M_{yx})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{yx} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \delta w \, dx \, dy - \\
& - \iint \left[\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(M_{xy} + M_{yx})}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right] \delta \varphi \, dx \, dy + \\
& + \oint \left[\left(Q_x + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yx} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(\nu, x) + \right. \\
& \left. + \left(Q_y + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(\nu, y) - \bar{Q}_\nu \right] \delta w \, ds - \\
& - \oint \left[\left(Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cos(\nu, x) + \left(Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \cos(\nu, y) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial s} (\bar{M}_{,\nu} - M_{,\nu}) \right] \delta(\omega - \varphi) \, ds + \\
& + \oint (\bar{M}_\nu - M_\nu) \delta \left\{ \frac{\partial(\omega - \varphi)}{\partial \nu} \right\} ds - \sum_{i=1}^n \Delta_i (\bar{M}_{,\nu} - M_{,\nu}) \delta(\omega_i - \varphi_i). \quad (I.10)
\end{aligned}$$

令 $\delta\Pi = 0$, 即可得出基本方程与边界条件。在板内每一点, δw 与 $\delta\varphi$ 为独立的变分, 故得 Euler 微分方程:

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(M_{xy} + M_{yx})}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = 0, \\
& \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(M_{xy} + M_{yx})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{yx} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q = 0,
\end{aligned} \right\} (I.11)$$

由 $\delta\Pi$ 中的线积分可得以下的边界条件:

(1) a) 若某段边界上挠度 w 为已知, 则

$$\delta w = 0; \quad (I.12a)$$

b) 若某段边界上横向力 \bar{Q}_ν 为已知, 则

$$\left(Q_x + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yx} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(\nu, x) + \left(Q_y + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(\nu, y) = \bar{Q}_\nu. \quad (I.12b)$$

(2) a) 若某段边界上板的厚度绕切线方向 s 的转角 $\alpha_\nu = \frac{\partial(\omega - \varphi)}{\partial \nu}$ 为已知, 则

$$\delta \frac{\partial(\omega - \varphi)}{\partial \nu} = 0; \quad (I.13a)$$

b) 若某段边界上弯矩 \bar{M}_ν 为已知, 则

$$M_\nu = \bar{M}_\nu. \quad (I.13b)$$

(3) a) 若某段边界 AB 上(图 3)板的厚度绕法线方向 ν 的转角 $\alpha_s = \frac{\partial(\omega - \varphi)}{\partial s}$

为已知, 则

$$\delta \frac{\partial(\omega - \varphi)}{\partial s} = 0. \quad (I.14a)$$

因此, $\delta(\omega - \varphi) = \text{const}$. 假设有 l 个角点(第 $k+1, k+2, \dots, k+l$ 角点)在 AB 段上 (A, B 点本身如为角点, 亦算在 l 个角点之内, 即 A 为第 $k+1$ 角点, B 为第 $k+l$ 角点)

点), 则

$$\int_A^B \left[\left(Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cos(\nu, x) + \left(Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \cos(\nu, y) + \frac{\partial}{\partial s} (\bar{M}_{sv} - M_{sv}) \right] ds + \sum_{i=k+1}^{k+l} \Delta_i (\bar{M}_{sv} - M_{sv}) = 0,$$

即

$$\int_A^B \left[\left(Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cos(\nu, x) + \left(Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \cos(\nu, y) \right] ds + (\bar{M}_{sv} - M_{sv})_{s_B+0} - (\bar{M}_{sv} - M_{sv})_{s_A-0} = 0, \quad (I.15a)$$

其中 $s_A - 0$ 与 $s_B + 0$ 表示在线段 AB 两端的点¹⁾, 此时边界条件包含式(I.14a), (I.15a)两个式子, 后一式子可称为补充边界条件.

b) 若某段边界 AB 上(图3)扭矩 \bar{M}_{sv} 为已知, 则

$$\left(Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \cos(\nu, x) + \left(Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \cos(\nu, y) + \frac{\partial}{\partial s} (\bar{M}_{sv} - M_{sv}) = 0, \quad (I.14b)$$

同时设有 l 个角点(第 $k+1, k+2, \dots, k+l$ 角点)在 AB 段内(A, B 点本身即使为角点, 亦不计在上述 l 个角点之列), 则因 $\delta(w_i - \varphi_i)$ 可为任意值, 得

$$\Delta_i (\bar{M}_{sv} - M_{sv}) = 0 \quad (i = k+1, k+2, \dots, k+l), \quad (I.15b)$$

此时边界条件也包含式(I.14b), (I.15b)两个式子, 后一式子可称为角点条件, 角点条件表示 M_{sv} 的跃度应与 \bar{M}_{sv} 的跃度相等.

附录 II. 各边均为直线时, 多边形各向同性简支板剪切角 γ_x, γ_y 具有势函数的证明.

先讨论弯曲问题(即 $N_x = N_y = N_{xy} = N_{yx} = 0$). 对于各向同性板, C. Libove^[6] 与 S. B. Batdorf^[61] 的基本方程与 E. Reissner^[51] 当略去板厚方向变形(令相应刚度 $C_n \rightarrow \infty$) 时的基本方程相同, 其形式如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0, \\ Q_x - \frac{(1-\mu)D}{2D_0} \nabla^2 Q_x &= -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial x} - \frac{(1+\mu)D}{2D_0} \frac{\partial q}{\partial x}, \\ Q_y - \frac{(1-\mu)D}{2D_0} \nabla^2 Q_y &= -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial y} - \frac{(1+\mu)D}{2D_0} \frac{\partial q}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (II.1)$$

其中 $\mu = \mu_x = \mu_y$, D 为柱面弯曲刚度, D_0 为剪切刚度, 而弯矩与扭矩的表达式则为:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (1-\mu) \frac{D}{D_0} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \nu \frac{D}{D_0} q, \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (1-\mu) \frac{D}{D_0} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \nu \frac{D}{D_0} q, \\ M_{xy} &= -(1-\mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{D}{D_0} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (II.2)$$

基本方程(II.1)亦可写成另一形式^[3,9]:

1) 当第 $k+1$ 角点或第 $k+l$ 角点恰与 A 端或 B 端重合时, 在 A 或 B 点 M_{sv} 为不连续, 因此必须区别 $s \rightarrow A-0$ 与 $s = s_A + 0$ 及 $s = s_B - 0$ 与 $s = s_B + 0$.

$$\left. \begin{aligned} D\nabla^4 w &= q - \frac{D}{D_0} \nabla^2 q, \\ \phi_1 - \frac{1-\mu}{2} \frac{D}{D_0} \nabla^2 \phi_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.3})$$

而 Q_x, Q_y 则可通过 w, ϕ_1 表出:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial x} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}, \\ Q_y &= -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial y} - \frac{D}{D_0} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.4})$$

在多角形的直线简支边界上边界条件为:

$$w_0 = 0, M_{v_0} = 0, Q_{s_0} = 0, \quad (\text{II.5})$$

其中下标“0”表示在边界上的值。因边界为直线，故以上各基本方程(II.1)–(II.4)中可分别将 x, y 变换为 v, s 。由变换后的式(II.1)中第一式及边界条件 $Q_{s_0} = 0$ ，得

$$\left(\frac{\partial Q_v}{\partial v} \right)_0 = -q_0, \quad (\text{II.6})$$

其中 q_0 表示在边界处的 q 值。由变换后的式(II.2)中第一式(即 M_v 的表达式)，利用边界条件 $w_0 = 0$ 及式(II.6)，可得

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right)_0 = -\frac{q_0}{D_0}. \quad (\text{II.7})$$

再由变换后的式(II.4)中第二式(即 Q_s 之表达式)，利用边界条件 $w_0 = 0$ 及式(II.7)，得

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v} \right)_0 = 0. \quad (\text{II.8})$$

将式(II.3)的第二式乘以 ϕ_1 ，沿板的面积进行积分，并利用 Green 公式，得

$$\begin{aligned} \iint \phi_1^2 dx dy &= \frac{1-\mu}{2} \frac{D}{D_0} \iint \phi_1 \nabla^2 \phi_1 dx dy = \\ &= \frac{1-\mu}{2} \frac{D}{D_0} \left[\oint \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial v} ds - \iint \left\{ \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \right]. \end{aligned}$$

上式左端恆正，而右端由式(II.8)恆负，因此必有

$$\phi_1 \equiv 0. \quad (\text{II.9})$$

故由式(II.4)，

$$\gamma_x = \frac{Q_x}{D_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \gamma_y = \frac{Q_y}{D_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (\text{II.10})$$

其中

$$\varphi = -\frac{D}{D_0} \left(\nabla^2 w + \frac{q}{D_0} \right).$$

因此剪切角 γ_x, γ_y 具有势函数 φ 。

在稳定问题中，只须将弯曲问题基本方程(II.1)中的分布荷载 q 改为

$$q + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{yx} \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

因此上面的证明对稳定问题亦同样适用。

参 考 文 献

- [1] Reissner, E., On the theory of bending of elastic plates, *Journal of Mathematics and Physics*, **23**, 1944, 184–191.

- [2] Reissner, E., Effect of transverse shear deformation on elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **12**, 2, 1945, A69—77.
- [3] Reissner, E., On bending of elastic plates, *Quarterly of Applied Mathematics*, **5**, 1, 1947, 55—68.
- [4] Reissner, E., Finite deflections of sandwich plates, *Journal of Aeronautical Sciences*, **15**, 7, 1948, 435—440.
- [5] Girkman, K., Beer, R., Anwendung der Verschärften Plattentheorie nach Eric Reissner auf Orthotropischen Platten, *Öster. Ing. Arch.*, **12**, 1958, 101—110.
- [6] Libove, C. and Batdorf, S. B., A general small-deflection theory for flat sandwich plates, *NACA Rep.* 899, 1948.
- [7] Hoff, N. J., Bending and buckling of rectangular sandwich plates, *NACA T. N.* 2225, 1950.
- [8] Robinson, J. R., The buckling and bending of orthotropic sandwich panels, *The Aeronautical Quarterly*, **4**, 1955, part II, 125—148.
- [9] Salerno, V. L. and Goldberg, M. A., Effect of shear deformations on the bending of rectangular plate, *Journal of Applied Mechanics*, **27**, 1, 1960, 54—58.
- [10] Essenberg, F., On a class of nonlinear axisymmetric plate problems, *Journal of Applied Mechanics*, **27**, 4, 1960, 677—680.
- [11] Гольденвейзер, А. Л., О теории изгиба пластинок Райсснера, *Изв. АН СССР ОТИ*, **4**, 1958, 102—109.
- [12] Гольденвейзер, А. Л., Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости, *Прикл. Мат. и Мех.*, **26**, 4, 1962, 668—686.
- [13] Donnell, L. H., Discussion on the paper "Effect of transverse shear deformation on elastic plates" by E. Reissner, *Journal of Applied Mechanics*, **12**, 3, 1945, A249—252.
- [14] 杜庆华, 构造上引起的正交各向异性平板的弹性理论, *清华大学学报*, **9**, 4, 1962.

AN APPROXIMATE THEORY FOR ELASTIC ORTHOTROPIC PLATES WITH TRANSVERSE SHEAR DEFORMATIONS

YU SHOW-WEN, HWANG KEH-CHIH

(Tsing-hua University)

ABSTRACT

In this paper is presented a simplified two-variable approximate theory, based on the C. Libove and S. B. Batdorf's theory^[6] for elastic orthotropic plates with transverse shear deformations. Assuming that there exists a potential function $\varphi(x, y)$ for the transverse shear angles γ_x and γ_y (see eq. (2.9)), the total potential energy II (eq. (2.8)) can be expressed in terms of two independent unknown functions, the plate deflection $w(x, y)$ and the potential $\varphi(x, y)$. By the use of the principle of minimum potential energy the Euler differential equations (I.11) for w and φ and the boundary conditions (I.12)—(I.15) are obtained in Appendix I. The comparison between the results for critical compressive load for a particular case of square simply-supported plate based on the present theory and Robinson's results^[8] based on [6] shows that the discrepancy is small, if the anisotropy is not too significant (Table I). It is shown in Appendix II that for polygonal simply-supported isotropic plates for both the bending and the stability problems the present theory always gives the same results as the theory in [6]. Two kinds of free edges are distinguished: "entirely free edges" with the boundary conditions as (3.14) and the "stiffened free edges" with the boundary conditions as (3.17). Analysis of examples for orthotropic plates with free edges shows that, in general, q cannot be interpreted as the shear deflection.