

研究简报

内外表面温度各为均布时圆底扁球壳的热应力*

薛大为

(北京工业学院)

一、

圆底扁球壳广泛应用于建筑等工程中,在很多情况下,需要知道它的热应力分布。本文对较常遇到的内外表面温度各为均布时有外环的简支圆底扁球壳的热应力作了探讨,得到了表为 Bessel 函数的解(如无特殊说明,本文所用记号与前文[1]相同):

$$w = \frac{A}{k} + 2B \operatorname{ber}(\mu r) - 2C \operatorname{bei}(\mu r), \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} N_r &= -\frac{2Ehk}{\mu r} [B \operatorname{bei}'(\mu r) + C \operatorname{ber}'(\mu r)], \\ N_\theta &= 2Ehk \left\{ C \left[\operatorname{bei}(\mu r) + \frac{1}{\mu r} \operatorname{ber}'(\mu r) \right] - \right. \\ &\quad \left. - B \left[\operatorname{ber}(\mu r) - \frac{1}{\mu r} \operatorname{bei}'(\mu r) \right] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left\{ -2\mu \left[\mu \operatorname{bei}(\mu r) + \frac{1-\nu}{r} \operatorname{ber}'(\mu r) \right] B + \right. \\ &\quad \left. + 2\mu \left[\frac{1-\nu}{r} \operatorname{bei}'(\mu r) - \mu \operatorname{ber}(\mu r) \right] C + \alpha(1+\nu)t_2 \right\}, \\ M_\theta &= -D \left\{ 2\mu \left[\frac{1-\nu}{r} \operatorname{ber}'(\mu r) - \mu \nu \operatorname{bei}(\mu r) \right] B - \right. \\ &\quad \left. - 2\mu \left[\frac{1-\nu}{r} \operatorname{bei}'(\mu r) + \mu \nu \operatorname{ber}(\mu r) \right] C + \alpha(1+\nu)t_2 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \sqrt[4]{\frac{Ehk^2}{D}}, \quad A = \frac{\Delta_A}{\Delta}, \quad B = \frac{\Delta_B}{\Delta}, \quad C = \frac{\Delta_C}{\Delta}, \\ \Delta_A &= -\left(\frac{a-a'}{a} + \alpha t_1 \right) \left\{ \operatorname{bei}^2(\mu a) + \operatorname{ber}^2(\mu a) + \frac{(1-\nu)}{\mu a} [\operatorname{ber}'(\mu a) \operatorname{bei}(\mu a) - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{bei}'(\mu a) \operatorname{ber}(\mu a)] \right\} - \frac{\alpha k}{\mu^2} (1+\nu) t_2 \left(\frac{1+\nu}{\mu a} + \frac{Eh}{E_1 F \mu} \right) \times \\ &\quad \times [\operatorname{bei}(\mu a) \operatorname{bei}'(\mu a) + \operatorname{ber}(\mu a) \operatorname{ber}'(\mu a)], \end{aligned} \right\}$$

* 1962年7月1日收到。

$$\begin{aligned}
 \Delta_B &= \frac{\alpha(1+\nu)t_2}{2\mu^2} \left[\text{bei}(\mu a) + \left(\frac{1+\nu}{\mu a} + \frac{Eh}{E_1 F \mu} \right) \text{ber}'(\mu a) \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{2k} \left(\frac{a-a'}{a} + \alpha t_1 \right) \left[\frac{1-\nu}{\mu a} \text{bei}'(\mu a) - \text{ber}(\mu a) \right], \\
 \Delta_C &= \frac{\alpha(1+\nu)t_2}{2\mu^2} \left[\text{ber}(\mu a) - \left(\frac{1+\nu}{\mu a} + \frac{Eh}{E_1 F \mu} \right) \text{bei}'(\mu a) \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{2k} \left(\frac{a-a'}{a} + \alpha t_1 \right) \left[\text{bei}(\mu a) + \frac{1-\nu}{\mu a} \text{ber}'(\mu a) \right], \\
 \Delta &= \text{bei}^2(\mu a) + \text{ber}^2(\mu a) + [\text{bei}'^2(\mu a) + \text{ber}'^2(\mu a)] \frac{1-\nu}{\mu a} \left(\frac{1+\nu}{\mu a} + \frac{Eh}{E_1 F \mu} \right) + \\
 &\quad + \left(\frac{2}{\mu a} + \frac{Eh}{E_1 F \mu} \right) [\text{ber}'(\mu a) \text{bei}(\mu a) - \text{bei}'(\mu a) \text{ber}(\mu a)],
 \end{aligned} \quad (4)$$

而 a 及 a' 分别表装配前的壳及环的半径, E_1 及 F 分别表环的弹性模量及截面积。

如果环的刚性很大而可认为不能伸长, 则将式中的 E_1 取为无穷; 如果壳边无环, 则在各式中令 F 趋于零而求极限。利用 Bessel 函数表^[2], 我们的解十分便于在设计中应用。此外这个解还是足够准确的^[1]。对于其他轴对称边界支承情况, 仅式(4)有所不同。

二、

由文献[1], 因 t' 及 t'' 都是常量, 故有基本方程:

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + k \nabla^2 w = 0, \quad (5)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - k \nabla^2 \varphi = 0, \quad (6)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ 表轴对称情况时的 Laplace 算子。

各内力素为:

$$\begin{aligned}
 M_r &= -D \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} + \alpha(1+\nu)t_2 \right], \\
 M_\theta &= -D \left[\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} + \alpha(1+\nu)t_2 \right], \\
 N_r &= \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}, \quad N_\theta = \frac{d^2 \varphi}{dr^2}, \quad Q_r = -D \frac{d}{dr} [\nabla^2 w + \alpha(1+\nu)t_2].
 \end{aligned} \quad (7)$$

将式(5)对 r 积分两次, 得

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \varphi + k w = A + B_1 \ln r,$$

其中 A 及 B_1 为积分常数。由于在壳的中心 $r=0$ 处 w 和 $\nabla^2 \varphi (= N_r + N_\theta)$ 均为有限, 故须取 B_1 为零。因而

$$\nabla^2 \varphi = -Ehkw + AEh. \quad (8)$$

将上式代入式(6), 可得非齐次方程

1) 在本文修改过程中, 发现文献[3]曾给出一个有价值的近似解。

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{E h k^2}{D} w = \frac{A E h k}{D},$$

它的通解为

$$w = w_0 + \frac{A}{k},$$

其中 w_0 为满足对应齐次方程

$$\nabla^2 \nabla^2 w_0 + \mu^4 w_0 = 0$$

的通解, A/k 为非齐次方程的特解.

将上式改写为

$$(\nabla^2 + i\mu^2)(\nabla^2 - i\mu^2)w_0 = 0, \quad (9)$$

可以看出, 如果 w_1 及 $\bar{w}_1$ 为分别满足方程

$$(\nabla^2 - i\mu^2)w_1 = 0, \quad (\nabla^2 + i\mu^2)\bar{w}_1 = 0 \quad (10)$$

的共轭函数, 则

$$w_0 = w_1 + \bar{w}_1 = 2 \operatorname{Re} w_1 \quad (\operatorname{Re} \text{ 表取实部}) \quad (11)$$

必满足方程(9); 反过来也可证明方程(9)的解必可写成式(11)的形式. 事实上, 如果令

$$G = (\nabla^2 - i\mu^2)w_0,$$

我们就有 $(\nabla^2 + i\mu^2)G = 0$. 再令 $G = -2i\mu^2\bar{w}_1$, 即有

$$\nabla^2 w_0 - i\mu^2 w_0 = -2i\mu^2 \bar{w}_1.$$

此方程的特解为 $\bar{w}_1$, 而对应齐次方程的通解为 w_1 , 故知我们的论断成立.

由式(10)可见, w_1 满足 Bessel 型方程. 故有

$$w_1 = A_1 K_0(\sqrt{i} \mu r) + A_2 I_0(\sqrt{i} \mu r),$$

其中 K_0 和 I_0 为修正的 Bessel 函数, A_1 和 A_2 为积分常数. 于是

$$w = 2 \operatorname{Re} [A_1 K_0(\sqrt{i} \mu r) + A_2 I_0(\sqrt{i} \mu r)] + \frac{A}{k}. \quad (12)$$

注意到

$$K_0(\sqrt{i} \mu r) = \operatorname{Ker}(\mu r) + i \operatorname{Kei}(\mu r),$$

且当 $r \rightarrow 0$ 时 Ker 趋于无穷, 这不合 w 须为有限的条件, 故有 $\operatorname{Re} A_1 = 0$.

在壳体中心附近, 由于薄膜力的 Z 向分力为零而壳体又未承受外载, 故应有

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r Q_r = 0.$$

将式(12)代入式(7)而算出 Q_r , 然后求上式的极限, 可得

$$\operatorname{Im} A_1 = 0 \quad (\operatorname{Im} \text{ 表取虚部}).$$

如果令 $A_2 = B + iC$, 再注意到

$$I_0(\sqrt{i} \mu r) = \operatorname{ber}(\mu r) + i \operatorname{bei}(\mu r),$$

即知

$$w = \frac{A}{k} + 2B \operatorname{ber}(\mu r) - 2C \operatorname{bei}(\mu r). \quad (13)$$

将式(13)代入式(8), 即可求得非齐次方程

$$\nabla^2 \varphi = -2E h k [B \operatorname{ber}(\mu r) - C \operatorname{bei}(\mu r)],$$

它的解为

$$\varphi = A_3 \ln r - \frac{2Ehk}{\mu^2} [B \operatorname{bei}(\mu r) + C \operatorname{ber}(\mu r)], \quad (14)$$

其中右端第一项为对应齐次方程的通解(弃去了无用的常量项), 第二项为非齐次方程的特解。

利用在 $r = 0$ 处应有 $N_r = N_\theta$ 的条件, 由式(14)和(7)即可得到 $A_3 = 0$ 。将 $A_3 = 0$ 代入式(14), 我们得到应力函数 φ , 它与式(13)的挠曲函数 w 共含三个任意常量。由各种支承的相应边界条件定出这些常量, 再由式(7)即可求得各内力素。

对于用作屋盖等的扁球壳, 通常在壳的外缘作一个加劲环。此环的抗扭刚度一般很小, 故可认为壳的外缘处 $M_r = 0$ 。但此环有较大的抗拉刚度, 并且通常还使环的半径 a' 略小于壳的底半径 a 。设 $(N_r)_a$ 为壳的外缘上的法向薄膜内力, 则环的切向拉力为 $N = a(N_r)_a$, 而环的切向应变为 $\varepsilon = \frac{N}{E_1 F} = \frac{a(N_r)_a}{E_1 F}$, 因此环在变形后的半径为

$$\left[1 + \frac{a(N_r)_a}{E_1 F} \right] a'.$$

现在令壳的外缘的切向拉伸应变为 $(\varepsilon_\theta)_a$, 则壳变形后的半径为 $[1 + (\varepsilon_\theta)_a]a$ 。由于壳与环在变形后密合, 故有边界条件

$$\left[1 + \frac{a(N_r)_a}{E_1 F} \right] a' = [1 + (\varepsilon_\theta)_a]a. \quad (15)$$

注意到

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{Eh} (N_\theta - \nu N_r) + \alpha t_1$$

以及式(7), 可将式(15)写成

$$\text{在 } r = a \text{ 处: } \left(1 + \frac{1}{E_1 F} \frac{d\varphi}{dr} \right) \frac{a'}{a} = 1 + \frac{1}{Eh} \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) + \alpha t_1.$$

如果只保留一阶小量, 则可将上式化为

$$\text{在 } r = a \text{ 处: } \frac{1}{E_1 F} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{a - a'}{a} + \frac{1}{Eh} \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) + \alpha t_1. \quad (16)$$

另外两个边界条件为 $w = 0$ 及 $M_r = 0$, 亦即

$$\text{在 } r = a \text{ 处: } w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} + \alpha(1 + \nu)t_2 = 0. \quad (17)$$

将已知含三任意常量的 w 和 φ 的表达式代入式(16)和(17), 即得 A, B, C 如式(4)所示。再根据式(7), 即得式(2)和(3)。

在壳中心 $r = 0$ 处, 由式(1), (2)及(3)可得

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{A}{k} + 2B, & N_r = N_\theta &= -EhkB, \\ M_r = M_\theta &= -D[\alpha(1 + \nu)t_2 - (1 + \nu)\mu^2 C]. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

参 考 文 献

- [1] 薛大为, 关于扁壳的热应力问题, 力学学报, **5**, 3, 1962.
[2] Ватсон, Г. Н., Теория Бесселевых функций, Часть вторая, ИЛ, 1949.
[3] 何广乾、张维猷、魏璵, 扁壳温度应力的计算, 土木工程学报, **8**, 1, 1962.

THE THERMAL STRESSES OF SHALLOW SPHERICAL
SHELLS WITH CIRCULAR BASE UNDER THE ACTION
OF CONSTANT TEMPERATURE DISTRIBUTION
ON OUTER AND INNER SURFACE

HSUEH DAH-WEI

(Peking Institute of Technology)