

长圆柱形扁壳蠕变跳跃問題*

刘世宁

(北京航空学院)

提 要

本文討論了长圆柱形夹层扁壳在法向恆定均布压力作用下由于蠕变引起的跳跃問題, 认为扁壳形状完全規則, 在跳跃发生前的变形是对称的, 并設壳体各部分处在同一温度状况下。本文将确定跳跃临界状态的問題和計算到达此状态的临界時間的問題分別考虑。将前一問題归結成为寻求一个最小的本征值, 因而在一些情况能精确地确定发生跳跃的临界状态。計算第二問題时, 我們采用了蠕变的流动理論, 同时略去了弯矩的高次項及弹性变形。文內对这种近似步驟还作了簡略的分析。

一、引 言

近来对蠕变稳定問題的研究很多。关于这方面的情况可参閱文献[1, 2]。到目前为止, 絕大部分研究工作集中于比較簡單的压杆問題, 其目的主要在于闡明蠕变稳定現象的基本特性和寻求計算的合理原則。最近, 这方面的研究工作已开始扩展到較复杂的結構系統(如无限长圆柱壳等)。

弹性壳体在屈曲时通常伴随着变形状态的突然变化——跳跃現象。在蠕变条件下工作的壳体也应考虑发生跳跃的可能性。跳跃的发生即为壳体結構寿命的終止。这种蠕变跳跃現象的可能性不难由物理概念上估計到。当結構在恆定外载荷作用下时, 蠕变的发展将改变結構的几何形状和內力分布, 这样也就改变了壳体跳跃的上临界载荷及下临界载荷; 如果临界载荷随蠕变发展而逐漸减小, 跳跃的可能性就愈来愈大。因而, 即使外载荷不变, 只要蠕变发展到一定程度, 壳体就可能发生跳跃。所以壳体蠕变稳定的临界時間計算必須考虑到发生跳跃损坏的可能性。

Pian, T. H. H.^[3] 曾討論过曲梁的蠕变屈曲問題。他用变分法及数值积分方法計算了两个具体数例, 指明在一定条件下蠕变引起的跳跃是存在的。但他沒有闡明現象的物理方面, 也沒有給出一般的計算公式。此外, 他只討論了对称跳跃的情形, 实际上, 許多情形却是以反对称变形方式跳跃的。

本文討論了长圆柱形夹层扁壳在法向恆定均布压力作用下由于蠕变引起的跳跃問題。第二节建立了此問題的基本方程。第三节專門討論跳跃的临界状态, 并将此問題归結为一决定瞬时的中性平衡状态問題, 在第四节中应用蠕变的流动理論求得了近似的跳跃临界時間。

* 1961年8月8日收到。

二、长圆柱夹层扁壳蠕变问题的方程

考虑一甚长的圆柱夹层扁壳,其宽为 l ,曲率半径为 R .扁壳的两边简支支承,其支座間距离固定不变(图1).壳体为輕质夹心结构,外层板由較强的材料构成,其厚度以 δ 表示.上下两外层板中間面之間的距离 h 較 δ 大很多,故可认为其应力沿厚度 δ 是均匀分布的.中間夹心层的拉压刚度甚小而抗剪刚度却較大.由于通常 h/l 甚小,剪力一般也很小,因此可以略去中間层的拉压应力和剪切变形.在上述简化假定下,这种夹层壳的理論在数学上有很大的简化.这对討論壳体蠕变稳定現象的一般特点比較方便,而实心壳体的情况与这种情形并无原則差別.

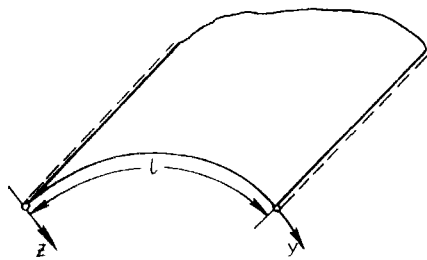


图 1

由于壳体甚长,对于离开端部較远处,可以认为各断面的变形是一样的.設上层板中垂直于 y 軸的剖面的正应力为 σ_1 ,下层板中应力为 σ_2 .这时弯矩 M_y 及内力 N_y 可表示为

$$\left. \begin{aligned} M_y &= \frac{\delta h}{2} (\sigma_2 - \sigma_1), \\ N_y &= \delta (\sigma_2 + \sigma_1). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

或者解出 σ_1 和 σ_2 后有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{\delta} \left(\frac{N_y}{2} - \frac{M_y}{h} \right), \\ \sigma_2 &= \frac{1}{\delta} \left(\frac{N_y}{2} + \frac{M_y}{h} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

考虑了 z 方向位移 w 的影响后,平衡方程为

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_y \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + q = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

q 为 z 方向的均布恒定载荷, w 及 q 均以 z 的正方向为正.

根据以上简化假定,并考虑到 w 可較 h 为大,上层板及下层板的应变 ε_1 及 ε_2 与 y 方向位移 v 及挠度 w 之间的关系便可表示为

$$\varepsilon_i = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \pm \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (5)$$

或者写为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= 2 \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= h \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

关于蠕变規律,我們暫采用流变理論.对于所討論的問題,在絕大部分的变形过程中应力变化是比較緩慢的,所以流变理論可以反映主要的物理現象.当然,应用強化理論就更好一些.这时只須更动第四节中临界時間的計算就够了.但是值得指出,无论采用何

种理论都不影响本文第三节的結果,即对于目前所討論的具体問題,可以近似地认为蠕变規律不影响跳跃的临界状态.

应用[4]中的符号,可得

$$\left. \begin{aligned} (\dot{\epsilon}_x)_c &= \frac{1}{2} B T^{n-1} (\sigma_x - \sigma), \\ (\dot{\epsilon}_y)_c &= \frac{1}{2} B T^{n-1} (\sigma_y - \sigma). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这里带下标 c 的符号表示的是蠕变的应变速度,此外

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y), \quad \sigma_z = 0, \quad (8)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2}, \quad (9)$$

$$B = 3^{\frac{n+1}{2}} B_1, \quad (10)$$

B_1 是单向受力时蠕变規律中的一个温度和时间函数,即单向受力时有

$$(\dot{\epsilon}_x)_c = B_1(t) \sigma_x^n,$$

設长圆柱壳的变形是平面应变,于是 $(\dot{\epsilon}_x)_c = 0$, 由此,可得

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \sigma_y, \quad T = \frac{\sigma_y}{2}, \quad (11)$$

于是

$$(\dot{\epsilon}_y)_c = \frac{1}{2^{n+1}} B (\sigma_y)^n. \quad (12)$$

为了方便起见,我们将总应变速度关系写成

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{\dot{\sigma}_1}{E'} + B'(t) \left(\frac{\sigma_1}{E'} \right)^n, \quad (13)$$

此处 $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$, E 为该温度时外层板材料的 Young 氏模数, ν 是 Poisson 比. 另外,这里还設 n 为某一奇数,否則第二項应改为

$$B'(t) \left| \frac{\sigma}{E'} \right|^{n-1} \frac{\sigma}{E'}.$$

引进无量綱量:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{h}{R}; & \beta &= \frac{h}{l}; & \eta &= \frac{y}{l}; \\ p &= -\frac{N_y}{E'\delta}; & m &= \frac{2M_y}{E'\delta h}; & \bar{q} &= \frac{2l^2}{E'\delta h} q; \\ \bar{w} &= \frac{w}{h}; & \bar{\nu} &= \frac{\nu}{h}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

并以 $\dot{p}$, $\dot{\bar{w}}$ 等表示 $\frac{1}{B'} \frac{\partial p}{\partial t}$ 及 $\frac{1}{B'} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}$. 于是平衡方程(3),(4)以及变形速度与內力的关系便可表示为

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} = \left(2 \frac{\alpha}{\beta^2} p - \bar{q} \right) + 2p \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad (16)$$

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} + m = - \left[\left(\frac{p}{2} + \frac{m}{2} \right)^n - \left(\frac{p}{2} - \frac{m}{2} \right)^n \right], \quad (17)$$

$$2 \left(\beta \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} - \alpha \bar{w} + \beta^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right) + \dot{p} = - \left[\left(\frac{p}{2} + \frac{m}{2} \right)^n + \left(\frac{p}{2} - \frac{m}{2} \right)^n \right]. \quad (18)$$

这就是问题的全部基本方程(这里我们假设了上下层板的温度相同)。根据壳体的支持情况,边界条件当 $\eta = 0$ 或 $\eta = 1$ 时为

$$\bar{w} = m = 0 \quad (19)$$

及

$$\int_0^1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} d\eta = 0. \quad (20)$$

问题的初始状态应由弹性平衡方程解出。此时相应的方程为

$$\frac{d^4 \bar{w}}{d\eta^4} + \frac{2\alpha}{\beta^2} p + 2p \frac{d^2 \bar{w}}{d\eta^2} = \bar{q}, \quad (21)$$

$$\frac{dp}{d\eta} = 0, \quad (22)$$

$$2 \left[\beta \frac{d\bar{v}}{d\eta} - \alpha \bar{w} + \frac{\beta^2}{2} \left(\frac{d\bar{w}}{d\eta} \right)^2 \right] + p = 0, \quad (23)$$

$$\beta^2 \frac{d^2 \bar{w}}{d\eta^2} = -m; \quad (24)$$

边界条件当 $\eta = 0$ 或 $\eta = 1$ 时为

$$\bar{w} = m = 0$$

及

$$\int_0^1 \frac{d\bar{v}}{d\eta} d\eta = 0. \quad (25)$$

这个问题在[5]中有详细的讨论。

三、扁壳蠕变跳跃的临界状态

跳跃现象是一种瞬时的变形过程,蠕变变形一般还来不及发生直接作用,因此发生跳跃的临界状态是由瞬时平衡的性质所决定的。所以我们只需要去决定蠕变发展到什么程

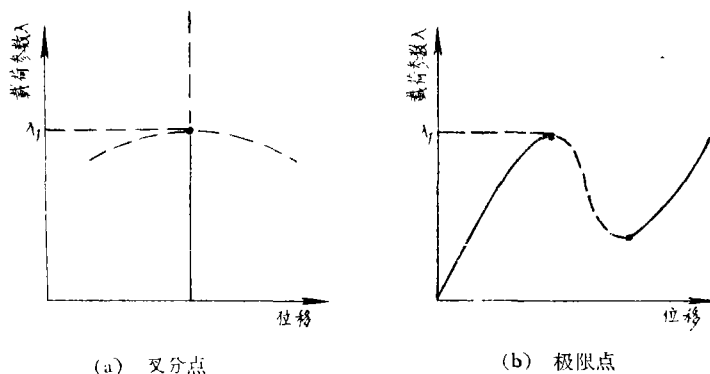


图 2

度,扁壳将发生弹性跳跃. 弹性跳跃的临界状态一般有两种情形,一种是所谓叉分点,另一种是所谓极限点(见图2). 在叉分点,弹性平衡在小扰动范围内是中性平衡^[1]. 不难证明在极限点时,弹性平衡在小扰动范围内也是中性平衡. 事实上,在极限点*A*以前(图中*OA*段),扰动载荷 $\delta\bar{q}$ 对其本身引起的扰动挠度 $\delta\bar{w}$ 所作之功大于零[见图2(b)],即

$$\delta\bar{q} \int_0^1 \delta\bar{w} d\eta > 0.$$

在极限点*A*以后(图中*AB*段)则有

$$\delta\bar{q} \int_0^1 \delta\bar{w} d\eta < 0.$$

因此在极限点时必定有

$$\delta\bar{q} \int_0^1 \delta\bar{w} d\eta = 0,$$

但 $\int_0^1 \delta\bar{w} d\eta \neq 0$, 所以应有 $\delta\bar{q} = 0$ (这个条件实际上可由极限点的定义直接得到). 应用方程(21), $\delta\bar{q} = 0$ 便可表示为

$$\frac{\partial^4 \delta\bar{w}}{\partial \eta^4} + 2 \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right) \delta p + 2\bar{v} \frac{\partial^2 \delta\bar{w}}{\partial \eta^2} = 0, \quad (\text{a})$$

此式正是弹性小扰动稳定问题方程, 这就表明极限点为中性平衡.

根据以上讨论, 无论叉分点或极限点都是中性平衡, 因此确定跳跃临界状态的问题便可归结为根据方程(a)及相应的边界条件决定蠕变发展到什么程度, 扁壳处于弹性中性平衡状态的问题.

决定跳跃临界状态的方程(a)还可从另一种考虑方法得到. 将公式(15), (16)对时间取导数后, 再将它们与式(17), (18)一起看作是变量 $\dot{m}$, $\dot{p}$, $\dot{\bar{w}}$, $\dot{\bar{v}}$ 的线性方程. 其对应的齐次方程为

$$\frac{\partial^2 \dot{m}}{\partial \eta^2} - 2 \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right) \dot{p} - 2p \frac{\partial^2 \dot{\bar{w}}}{\partial \eta^2} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial \eta} = 0, \quad (27)$$

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \dot{\bar{w}}}{\partial \eta^2} + \dot{m} = 0, \quad (28)$$

$$2 \left(\beta \frac{\partial \dot{\bar{v}}}{\partial \eta} - \alpha \dot{\bar{w}} + \beta^2 \frac{\partial \dot{\bar{w}}}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right) + \dot{p} = 0. \quad (29)$$

在跳跃的临界状态时, 问题(15)–(20)应不存在确定的变形速度 $\dot{\bar{w}}$, $\dot{\bar{v}}$ 的解. 考虑到这一事实, 跳跃的临界状态便可根据齐次方程(26)–(29)在相应的边界条件下存在 $\dot{\bar{w}}$, $\dot{\bar{v}}$, $\dot{m}$, $\dot{p}$ 的非全恒等于零的解的条件来决定. 由方程(26)及(28)消去 $\dot{m}$, 使得

$$\beta^2 \frac{\partial^4 \dot{\bar{w}}}{\partial \eta^4} + 2 \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} \right) \dot{p} + 2p \frac{\partial^2 \dot{\bar{w}}}{\partial \eta^2} = 0. \quad (30)$$

于是我们又重新得到了本质上与(a)相同的方程. 根据边界条件(19), (20), 得到所应满足的边界条件为

$$\text{当 } \eta = 0 \text{ 或 } \eta = 1 \text{ 时, } \dot{\bar{w}} = \frac{\partial^2 \dot{\bar{w}}}{\partial \eta^2} = 0 \quad (31)$$

及

$$2\alpha \int_0^1 \ddot{w} d\eta - 2\beta^2 \int_0^1 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \eta} d\eta - \dot{p} = 0, \quad (32)$$

式(30)–(32)便为用来决定跳跃临界状态的方程及边界条件,其中 $\ddot{w}$, p 是随蠕变变形而逐渐变化的,它们应由方程(15)–(18)解出。 p 在这里可视为一本征值。以后的具体计算表明,最小的本征值所对应的状态便是最先达到的跳跃临界状态。

我们设扁壳的几何形状是完全规则的,这时由于对称关系,在跳跃发生之前变形将对称于中点 $(\eta = \frac{1}{2})$ 。不难看出,无论 $\ddot{w}$ 的形式如何,

$$\left. \begin{aligned} \ddot{w} &= c_k \sin 2k\pi\eta, & k &= 1, 2, \dots \\ \dot{p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

是问题(30)–(32)的一组本征函数,其对应的本征值为

$$p = \frac{4k^2\beta^2\pi^2}{2}. \quad (34)$$

具有实际意义的是 $k=1$ 的情形,此时

$$p = 2\beta^2\pi^2. \quad (35)$$

式(33)不是问题(30)–(32)的本征函数的全体,但由以下讨论可知,在一定条件下 $p = 2\beta^2\pi^2$ 确为最小本征值。因此它确定了发生反对称形式跳跃的临界状态。

现在讨论对称形式跳跃发生的条件以及在什么情况下转变为反对称形式的跳跃。近似地设

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u} &= a \sin \pi\eta, \\ \ddot{w} &= a \sin \pi\eta, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

对式(30)应用 Галёркин 方法,并计算式(32),得

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\beta^2\pi^4}{2} - p\pi^2 \right) a + 2 \left(\frac{2\alpha}{\beta^2\pi} - \frac{a\pi^2}{2} \right) \dot{p} &= 0, \\ \left(\frac{2\alpha}{\pi} - \frac{\pi^2\beta^2 a}{2} \right) a - \frac{\dot{p}}{2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

令此方程组之行列式为零,并引进变量

$$\zeta = \left(\frac{4\alpha}{\beta^2\pi} - a \right) \sqrt{2n}, \quad (38)$$

使得发生对称方式跳跃的条件为

$$p = \frac{\pi^2\beta^2}{2} \left(1 + \frac{\zeta^2}{n} \right). \quad (39)$$

令式(35)与式(39)中的 p 相等就可得对称跳跃转变为反对称跳跃的分界点为

$$\zeta^2 = 3n. \quad (40)$$

由于 p 随蠕变变形是先增大而后减小(参看图3),所以根据(35)及(39),可得如下结论:

- 1) 如果跳跃发生于 $\zeta^2 < 3n$ 时,则临界状态由公式(39)决定,而变形方式是对称的;
- 2) 如果跳跃发生于 $\zeta^2 > 3n$ 时,则临界状态由公式(35)决定,而变形方式是反对称的。

式(39)、(40)都是近似的。显然,式(39)偏高而条件(40)偏低。式(35)则是完全精

确的解.

值得指出,如果采用蠕变的强化理论,在以上的近似范围内,所得结论仍将相同.

由公式(35)或(39)确定的发生跳跃的条件是完全理想的.在实际情形中由于各种随机因素的干扰,跳跃总是有不同程度的提前.但是对本文考虑的问题来讲,随机因素的影响并不象对其他一些问题(例如受轴向压力的圆柱壳问题)的影响那样严重.

四、蠕变跳跃的临界时间

由于存在蠕变现象,扁壳经过一定时间之后,就可能达到跳跃的临界状态,而不可避免地发生跳跃.这个时间称为跳跃临界时间.

要计算临界时间,就要积分方程(15)–(20).可以看出,要精确地解出它们是极为困难的,同时由于蠕变规律本身的分散性,这样做也是没有必要的.我们将采取以下的近似步骤来解问题.

首先,不难估计到扁壳中弯矩比较小,所以我们在方程(17)及(18)中暂时保留 m 的一次项.其次,从以后的初步估计表明,在跳跃前绝大部分时间里,弹性变形速度远小于蠕变变形速度,只有在发生跳跃的临界状态邻近,弹性变形速度才有可能达到极大的数值.因此,对于计算临界时间也不妨将弹性变形略去.于是方程(17),(18)便简化为

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \eta^2} = -n \left(\frac{p}{2} \right)^{n-1} m, \quad (17a)$$

$$\beta^2 \frac{\partial \dot{v}}{\partial \eta} = \alpha \dot{w} - \beta \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \eta} - \left(\frac{p}{2} \right)^n. \quad (18a)$$

将式(17a)对 η 微分两次,以式(15)代入,得

$$\frac{\partial^4 \dot{w}}{\partial \eta^4} + \frac{4n}{\beta^2} \left(\frac{p}{2} \right)^n \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \eta^2} = -\frac{n}{\beta^2} \left(\frac{p}{2} \right)^{n-1} \left[\frac{2\alpha}{\beta^2} p - \bar{q} \right]. \quad (41)$$

利用式(18a),条件(20)可改写成

$$\alpha \int_0^1 \dot{w} d\eta - \beta^2 \int_0^1 \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \eta} d\eta - \left(\frac{p}{2} \right)^n = 0. \quad (42)$$

于是问题简化为在边界条件(19)及补充条件(42)下求解方程(41).我们用 Галёркин 方法近似解之.将式(36)代入式(42),得

$$\frac{2\alpha}{\pi} \dot{a} - \frac{\beta^2 \pi^2}{2} \dot{a} a - \left(\frac{p}{2} \right)^n = 0. \quad (43)$$

将式(36)再代入式(41),两边乘以 $\sin \pi \eta d\eta$, 由 0 至 1 积分,得

$$\beta^2 \pi^2 \dot{a} - 4n \left(\frac{p}{2} \right)^n a + \frac{4n}{\pi^3} \left(\frac{p}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{2\alpha}{\beta^2} p - \bar{q} \right) = 0. \quad (44)$$

由式(38)引进变量 ζ 之后,式(43),(44)可简化为

$$\frac{\pi^3 p}{\sqrt{2n\bar{q}}} = \frac{2\zeta}{\zeta^2 + 1}, \quad (45)$$

$$\dot{\zeta} = -\frac{4n}{\beta^2 \pi^2} \left(\frac{\sqrt{2n\bar{q}}}{\pi^3} \right)^n \frac{\zeta^{n-1}}{(\zeta^2 + 1)^n}. \quad (46)$$

式(45)即确定了 p 随 ζ 变化的规律(图3).由公式(45)及跳跃条件(35)或(39)便可决定跳跃临界状态时的 ζ_{cr} , 然后由式(46)就可得临界时间 t_{cr} 的公式为

$$\frac{4n}{\pi^2\beta^2} \left(\frac{\sqrt{2n\bar{q}}}{\pi^3} \right)^n \int_0^{t_{cr}} B'(t) dt = \int_{\zeta_{cr}}^{\zeta_0} \frac{(\zeta^2 + 1)^n}{\zeta^{n-1}} d\zeta \quad (47)$$

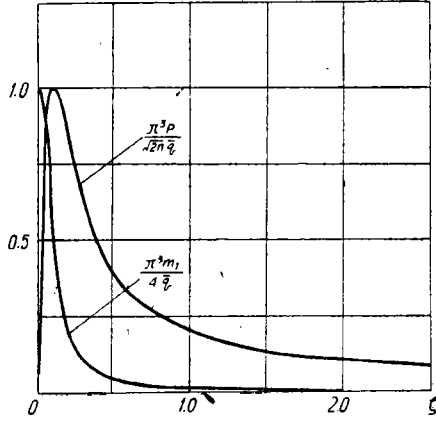


图 3

其中 ζ_0 为初始弹性平衡状态。以下分条列出各有关公式。

(1) ζ_{cr} 的计算: 当

$$\zeta_{cr}^2 = \frac{\sqrt{2n}}{\beta^2} \frac{\bar{q}}{\pi^5} \zeta_{cr} - 1 > 3n \quad (48)$$

时, ζ_{cr} 由公式

$$\zeta_{cr} = \frac{\sqrt{2n\bar{q}}}{2\beta^2\pi^5} + \sqrt{\frac{n\bar{q}^2}{2\beta^4\pi^{10}} - 1} \quad (49)$$

计算。当由式(49)算出之 ζ_{cr} 不满足式(48)时, 则须应用条件(39), 即应由公式

$$\frac{\beta^2\pi^5}{2\sqrt{2n\bar{q}}} \left(1 + \frac{\zeta^2}{\pi} \right) = \frac{2\zeta}{\zeta^2 + 1} \quad (50)$$

确定。实际计算可采用图解法, 较大的根即为 ζ_{cr} 。如果方程(50)不存在正实根, 就表明扁壳达不到理想的跳跃临界状态。应注意当 ζ_{cr} 小到接近于 1 时, 本节所用的近似步骤不能给出可靠的结果。对于这种情形, 以下将作说明。当 $\zeta_{cr} > 3n \gg 1$ 时, 式(49)可简化为

$$\zeta_{cr} \approx \frac{\sqrt{2n\bar{q}}}{\beta^2\pi^5} \quad (51)$$

(2) ζ_0 的计算: 初始弹性平衡位置可由式(21)–(25)解出^[5]。当初始弹性挠度很小时, 可用下列近似公式:

$$\zeta_0 \approx \sqrt{2n} \left(\frac{4\alpha}{\pi^3\beta^2} - \frac{\bar{q}}{\frac{\pi^5}{4} + \frac{8\alpha^2}{\pi\beta^2}} \right) \quad (52)$$

(3) t_{cr} 的计算: 当蠕变规律(13)给定后, 我们不难由式(47)计算 t_{cr} 。如果 t_{cr} 相当长而 B' 可视为一常值, 则式(47)可写成

$$\frac{4nB'}{\pi^2\beta^2} \left(\frac{\sqrt{2n\bar{q}}}{\pi^3} \right)^n t_{cr} = \int_{\zeta_{cr}}^{\zeta_0} \frac{(\zeta + 1)^n}{\zeta^{n-1}} d\zeta \quad (53)$$

当 n 已知时, 此式很易积分。式(53)有时还可简化, 设 ζ_{cr} 不过分小(例如, 不小于 1), 不难看出, 只要

$$\frac{n+2}{\zeta_0^2} \ll 1, \quad (54)$$

式(53)就可简化为

$$\frac{4nB'}{\pi^2\beta^2} \left(\frac{\sqrt{2n\bar{q}}}{\pi^3} \right)^n t_{cr} \approx \int_{\zeta_{cr}}^{\zeta_0} \zeta^{n+1} d\zeta = \zeta_0^{n+2} - \zeta_{cr}^{n+2} \quad (55)$$

条件(54)通常能满足。进一步我们还可注意到, 如果

$$(\zeta_{cr}/\zeta_0)^{n+2} \ll 1, \quad (56)$$

式(55)中 ζ_{cr} 尚可删去。这表明此时无需精确计算 ζ_{cr} 。

五、若干问题的讨论

先简略地讨论一下略去 m^2 的二次以上的项及弹性变形的問題。将式(15)积分, 并注意 $m(0) = m(1) = 0$, 使得

$$m = \left(\frac{2\alpha}{\beta} p - \bar{q} \right) \cdot \frac{1}{2} \eta(\eta - 1) + 2p\bar{w} \approx \left(\frac{4\bar{q}}{\pi^3} - 2p\zeta \right) \sin \pi\eta = m_1 \sin \pi\eta. \quad (57)$$

以式(45)代入, 得

$$m_1 = \frac{4\bar{q}}{\pi^3} \left(\frac{1}{1 + \zeta} \right), \quad (58)$$

此曲线亦绘于图3中。由此可知, 只有当 ζ 很小时, $\frac{\pi^3 m_1}{4\bar{q}}$ 才变得大起来。 m_1 与 p 之比为

$$\frac{m_1}{p} = \frac{m_{\max}}{p} = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{1}{\zeta}. \quad (59)$$

所以在式(18)中含 m^2 的项与只含 p 的项之比为 $\frac{n-1}{\zeta^2}$ 。所以大致可以认为略去 m 的二次以上的项所引起的相对误差的量级为

$$\frac{n-1}{\zeta^2} \approx \frac{n-1}{2n} \left(\frac{h}{f} \right)^2, \quad (60)$$

f 是扁壳中点的瞬时矢高。通常这是一个可略去的小量, 所以略去 m 的二次以上的项是可以的。但是当 ζ 较小时, 前节的公式就不很可靠。不过进一步的估计表明, 只要 ζ_0 比较大(例如满足条件(54)), 即使 ζ_{cr} 稍小一些(但不过分小), 式(53)或(55)仍然可以应用。原因是 ζ 小时, 变形速度也大, 所以它对总的临界时间的影响并不大。类似的估计可知, 当变形未接近临界状态以前, 略去弹性变形所引起的相对误差的量级为 $1/\zeta^3$, 因此它比略去 m 二次方以上的项所产生的误差还要小些。在接近临界状态时, 一般说来弹性变形可能迅速增加, 但其经历的阶段不长, 所以也不会对临界时间有很大的影响。

关于 ζ_{cr} 很小(例如, 接近于1)的情形, 应区分 ζ_0 是否满足条件(54)的两种情形。对于满足条件(54)的情形, 上段已经指出仍可按所给公式计算临界时间。至于 ζ_0 也很小的情形, 本文没有讨论。

在实际情况中, 由于各种随机干扰因素的影响, 跳跃一般总是提前发生。我们可以用

$$\Delta \bar{q} = \bar{q}_{cr} - \bar{q}$$

来大致表示可能发生跳跃的安全度, $\bar{q}_{cr}$ 为对应于某一 ζ 值 ($\zeta \geq \zeta_{cr}$) 时的上临界载荷, 根据公式(51), 有

$$\Delta \bar{q} \approx \frac{\beta^2 \pi^5}{\sqrt{2n}} \zeta - q. \quad (61)$$

参 考 文 献

- [1] Hoff, N. J., A survey of the theories of creep buckling, *Proc. 3-rd U. S. National Congr. Appl. Mech.*, 1958, 29—50.

- [2] Нэш, W., Обзор новых исследований по устойчивости тонких оболочек, *Сб. Механика II. Л.*, **5**, 1960.
- [3] Piao, T. H. H., Creep buckling of curved beam under lateral loading. *Proc. 3-rd U. S. National Congr. Appl. Mech.*, 1958, 649—654.
- [4] Качанов, Л. М., Теория ползучести, Физматгиз, 1960, 69.
- [5] Вольмир, А. С., Гибкие пластинка и оболочка, Гостехиздат, 1956, 240—251.
- [6] Койтер, В. Т., Устойчивость и закритическое поведение упругих систем, *Сб. Механика II. Л.*, **5**, 1960, 99—110.

SNAPPING OF A LONG CURVED PANEL INDUCED BY CREEP

LIU SHIH-NING

(Peking Aeronautical Institute)

ABSTRACT

In this paper, the problem of snapping of a infinitely long curved sandwich panel under external uniform pressure, induced by creep, is discussed. We suppose that the deformation of panel before buckling is symmetrical. The determination of the critical condition of snapping is reduced to an eigenvalue problem. The critical condition is

$$p = 2\beta^2\pi^2$$

for the case of $\xi^2 > 3n$ (antisymmetrical snapping), and the critical condition is

$$p = \frac{\beta^2\pi^2}{2} \left(1 + \frac{\xi^2}{n} \right)$$

for the case of $\xi^2 < 3n$ (symmetrical snapping).

The critical lifetime of panel snapping is calculated approximately. The general stress-strain relation assumes the form

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E'} + B' \left(\frac{\sigma}{E'} \right)^n.$$

It is shown that, in the most practical condition, a satisfactory approximation of lifetime can be obtained by neglecting the elastic part of deformation and the higher power of the nondimensional moment. Thus we obtain a very simple formula as following:

$$\frac{4nB'}{\pi^2\beta^2} \left(\frac{\sqrt{2nq}}{\pi^2} \right)^n t_{cr} = \int_{\xi_{cr}}^{\xi_0} \frac{(\xi + 1)^n}{\xi^{n-1}} d\xi.$$