

混凝土的徐变、松弛与弹性后效*

趙祖武
(天津大学)

提 要

混凝土的徐变理論在工程中有重要的意义。它的綫性理論基础已由 Н. Х. Арутюнян^[1] 建立。目前广泛应用的弹性徐变理論及老化理論都以迭加原理作为基础,它們的区别在于选择了不同的函数作为积分方程的核。但是核的选择对于表示混凝土徐变性质有影响,特别是对弹性后效影响甚大。本文对于用积分表示可复变形的方式进行研究,并提出一个核的形式,能較好地表达徐变及弹性后效性能。还利用級数求出松弛曲綫,并与試驗数据作了比較。

一、混凝土的徐变与弹性后效

我們限于研究应力較小的綫性理論,因为相对來說,它比較简单,而且試驗資料也較多。

根据試驗^[2,3],在加载后不长的时期內,徐变曲綫的坡度,即变形速度,依赖于应力作用时间的长短及混凝土的龄期。经过一定時間后,变形速度只依赖于观测时刻的龄期,不同龄期加载的徐变曲綫成为互相平行的曲綫。在应力較小时,徐变变形与应力成正比^[1,2]。迭加原理适用于徐变变形^[1]。卸载后,徐变变形的一部分是可恢复的,我們称之为弹性后效或可复变形^[2]。根据这些資料,我們对混凝土的徐变作如下假定:在每一无限小時間 dt 內,应力冲量 σdt 产生两部分徐变变形。第一部分是 $\sigma K(t-\tau, \tau) d\tau$, 它与龄期 τ 有关,并且随時間的增加而减小,即与 $(t-\tau)$ 有关,此处 t 是观测的时刻;当 $(t-\tau)$ 无限增长时,它趋于零,因此它是可复变形。第二部分是 $\sigma F_1(\tau) d\tau$, 它与龄期有关,但在時間过程中保持不变,是不可复变形。在应力作用的历史过程中,这两部分变形的总和組成徐变变形。可以写出徐变方程:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E(t)} + \int_{t_0}^t \sigma K(t-\tau, \tau) d\tau + \int_{t_0}^t \sigma \left[F(\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{E(\tau)} \right) \right] d\tau, \quad (1)$$

式中右方第一項是弹性瞬时变形;第二項中的函数 K 应有以下性质:

$$[K(t-\tau, \tau)]_{(t-\tau) \rightarrow \infty} = 0, \quad (2a)$$

$$\left[\int_{t_0}^t K(t-\tau, \tau) d\tau \right]_{(t-t_0) \rightarrow \infty} = \text{常值}; \quad (2b)$$

第三項积分內

$$F(\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{E(\tau)} = F_1(\tau),$$

* 1961年6月14日收到。

这样写法是为了便于由徐变曲线选取具体的函数。因为瞬时变形是随龄期改变的,通常试验曲线只表达了部分徐变变形。

从(1)式可看出,如果适当地选择函数 K 及 F ,则在加载经过一定时期后,第二项已接近于常值,第三项仍在增长,这时变形速度为

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \sigma \cdot F(t),$$

它只依赖于龄期。从(1)式还可看出,在加载后较短时期内,变形速度还与第二项有关,即还依赖于持载时间的长短,这是老化理论所不能表达的。

(1)式与 Н. Х. Арутюнян 的基本方程

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \quad (3)$$

有下列关系:

$$K(t - \tau, \tau) + F(\tau) = - \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau).$$

但如果将徐变度 $C(t, \tau)$ 选取如下的形式:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)f(t - \tau), \quad (4)$$

那就不能表示徐变曲线平行的性质了。А. В. Яшин^[2]选取的徐变度表达了曲线的平行性质,但是较为复杂。

在卸载后,部分徐变变形恢复的问题是值得注意的,因为在工程结构中,常有应力下降的情况。以前缺乏系统性的弹性后效试验资料,因此有关这问题的结论很不一致。有的文献^[5]认为可复变形是徐变变形的5%至15%,也有文献^[4]认为是15—50%。在最近 А. В. Яшин 的工作^[2]中,提供了比较系统性的卸载试验资料,其中两组试验曲线见图1及图2。由卸载曲线可以看出,除了个别的情况外,恢复的变形与龄期没有明显的关系,并且与应力成正比。(1)式表达了此种性质。在加载后经过一个时期,可复变形已然充分发展,它的总值为

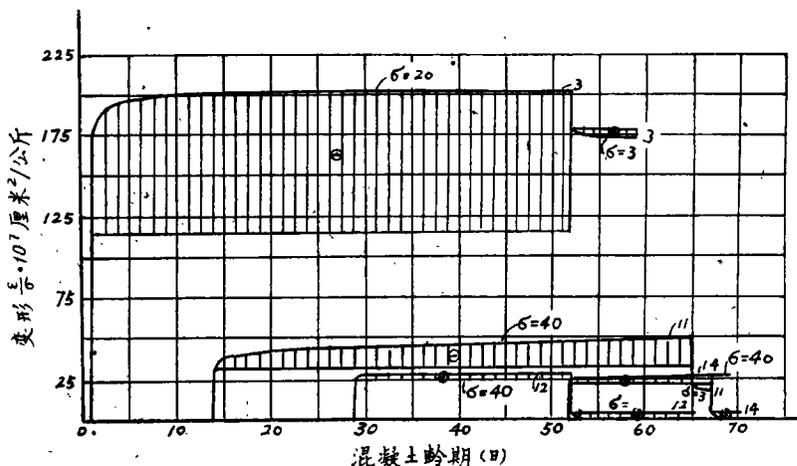


图 1

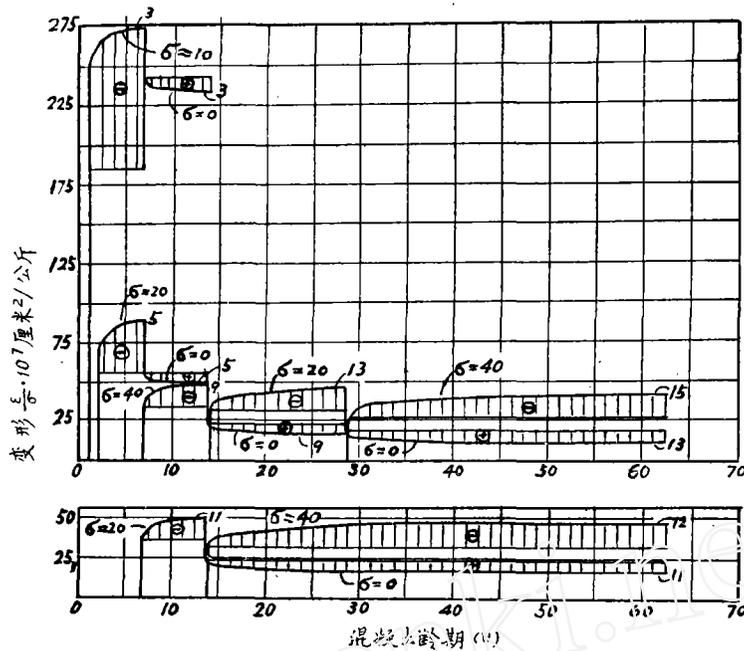


图 2

$$\left[\int_{t_0}^t \sigma K(t-\tau, \tau) d\tau \right]_{t \rightarrow \infty}$$

考虑到函数 K 的性质(2a), 可看出这总值与加载的时刻 t_0 无关:

$$\begin{aligned} \left[\int_{t_0}^t \sigma K(t-\tau, \tau) d\tau \right]_{t \rightarrow \infty} &= \left[\int_{t_0}^{t_1} \sigma K(t-\tau, \tau) d\tau \right]_{t \rightarrow \infty} + \\ &+ \left[\int_{t_1}^t \sigma K(t-\tau, \tau) d\tau \right]_{t \rightarrow \infty} = \left[\int_{t_1}^t \sigma K(t-\tau, \tau) d\tau \right]_{t \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

故知只要持载时期足够长(实际上也不是很长), 可复变形的总值与加载及卸载的龄期无关。于是函数 K 中的第二个变量 τ 只影响曲线的形状, 实际上我们可取 $K(t-\tau)$, 即只与持载时间有关。这时徐变方程为

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(t)} + \int_{t_0}^t \sigma K(t-\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \sigma \left[F(\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau \quad (5)$$

(1)式或(5)式表示卸载也适用迭加原理。试验^[2]指出, 在卸载时, 迭加原理不完全适用。但本文后面的具体数字表明, (5)式既能相当好地表达徐变曲线, 也能较好地表达可复变形, 这是因为迭加原理仍能近似地用于卸载情况的缘故。

在(5)式中, $\frac{1}{E(t)}$, $K(t-\tau)$, $F(\tau)$ 都是单调下降的函数, 它们的微商则是单调上升的函数。它们可以相当好地表示如下:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E(t)} &= A + \sum_i B_i e^{-a_i t}, \\ K(t-\tau) &= \sum_i C_i e^{-\lambda_i (t-\tau)}, \end{aligned}$$

$$F(\tau) = \sum_i D_i e^{-\beta_i \tau}.$$

代入(5)式,即得

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \sigma \left(A + \sum_i B_i e^{-\alpha_i t} \right) + \int_{t_0}^t \sigma \sum_i C_i e^{-\lambda_i(t-\tau)} d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \sigma \left[\sum_i D_i e^{-\beta_i \tau} + \sum_i \alpha_i B_i e^{-\alpha_i \tau} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

当 σ 为常值时,有

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\sigma} = & \left(A + \sum_i B_i e^{-\alpha_i t_0} \right) + \sum_i \frac{C_i}{\lambda_i} [1 - e^{-\lambda_i(t-t_0)}] + \\ & + \sum_i \frac{D_i}{\beta_i} [e^{-\beta_i t_0} - e^{-\beta_i t}], \end{aligned} \quad (7)$$

式中右方后二项是徐变度。

通常弹性徐变理论采用的徐变度如下式:

$$C(t, \tau) = \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau} \right) [1 - e^{-\lambda(t-\tau)}], \quad (8)$$

将(8)式代入(3)式,则可复变形为

$$\int_{t_0}^t \sigma \left(C_0 \lambda + \frac{A_1 \lambda}{\tau} - \frac{A_1}{\tau^2} \right) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau.$$

从这式子看出,当加载龄期较小时,可能得到负值的可复变形,即卸载后徐变变形不仅不减小,反而继续增长,如图3所示。这是与实验不符合的;也是不合理的。我们来看一个实际工程使用的混凝土。例如可采用的徐变度参数为

$$A_1 = 2C_0, \quad \lambda = 0.03.$$

根据这样的参数计算后,得到一些结果如下。如果在龄期6日加载、在8日以前卸载时,可复变形为负值。如果在2日加载,则在21日以前为负值。如果在1日加载,则在373日以前为负值。可复变形不仅可为负值,并且其绝对值可以是很大的数字。例如在2日加载,到

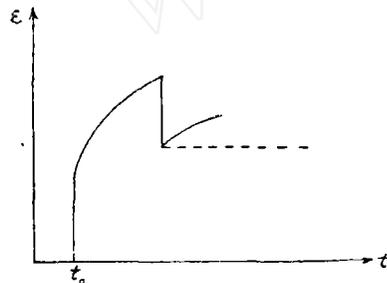


图 3

6日时可复变形的绝对值约为徐变变形的二倍,到9日时约为一倍,到13日时约为一半;在1日加载,到8日时可复变形的绝对值约为徐变变形的二倍,即若在此时卸载,徐变变形最终将增长二倍,并且经过23日即已增长一倍。这样的结果显然与真实情况相差太大了。

不采用(8)式为徐变度,但所取徐变度式子中包含与(8)式相同的项,例如 A. B. Яшин^[2] 的徐变度式子,也可能发生与上述相似的情形。

现在来看(7)式是否能表示徐变曲线。对 A. B. Яшин^[2] 第六组试件试算的结果可用下式为徐变度:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\sigma} \times 10^7 = & 8.93[1 - e^{-0.8(t-t_0)}] + 3630[e^{-3.0t_0} - e^{-3.0t}] + \\ & + 27.0[e^{-0.15t_0} - e^{-0.15t}] + 19.1[e^{-0.004t_0} - e^{-0.004t}], \end{aligned} \quad (9)$$

表 1 徐变度的理論值与实验值比較

$t-t_0$ t_0	1	2	3	5	10	20	30	60
2	19.34 (16.28)	23.5 (21.5)	25.5 (24.6)	29.7 (28.6)	32.1 (34.3)	38.0 (38.5)	42.1 (39.9)	42.9 (42.1)
7	8.5 (6.3)	10.7 (9.7)	11.7 (11.7)	13.6 (14.1)	15.8 (17.0)	19.0 (19.3)	20.4 (20.4)	23.1 (22.3)
14	6.1 (5.5)	7.6 (8.1)	8.6 (9.5)	9.4 (10.9)	13.5 (12.3)	15.4 (13.4)	16.0 (14.2)	(16.1)
29	4.1 (5.0)	5.2 (7.4)	6.3 (8.4)	7.5 (9.3)	8.1 (9.9)	10.3 (10.5)	10.5 (11.2)	(12.9)

(9)式的数值与实验的比較列于表 1. 沒有括弧的数字是实验值,有括弧的数字是(9)式的数值. 按照(9)式的徐变度計算比率的可复变形为 8.93×10^{-7} (持載時間超过 3 日). 这数字与图 2 曲綫比較也是大致相符的. 由表 1 所列数字,可以认为(6)式既能表示徐变曲綫,也能表示弹性后效性质,并且在第一个积分中只取一項就够了:

$$\varepsilon = \sigma \left(A + \sum_i B_i e^{-\lambda_i t} \right) + \int_{t_0}^t \sigma C e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau + \int_{t_0}^t \sigma \left[\sum_i D_i e^{-\beta_i \tau} + \sum_i \alpha_i B_i e^{-\alpha_i \tau} \right] d\tau. \quad (10)$$

此式虽然包含許多参数,但由实验曲綫确定这些参数并不十分麻煩. 先由实验資料找出可复变形数值,再从徐变曲綫减去这些数值,可得到只由第二个积分表示的徐变变形,即老化理論. 利用曲綫平行的关系不难求出 D_i 及 B_i .

由图 2 中看出,当龄期很小时加载,并且应力作用時間不长,例如在 1 日加载,7 日卸載,可复变形要稍大一些. 为表示这种情形,我們可将(10)式中第一个积分改为

$$\int_{t_0}^t \sigma [C' + C'' e^{-\gamma \tau}] e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau,$$

式中 γ 的数值比較大,除了龄期很小时以外,一般可以将含有它的項 $C'' e^{-\gamma \tau}$ 略去. 現有实验資料还是比較少的,这种情况是試驗誤差抑或真实情况,目前尚难判断. 一般情况下我們宁可采用比較简单的(10)式.

(10)式比老化理論的方程只多出第一个积分,我們可以用它来估計老化理論在什么情况下适用. 在龄期較小,或应力变化不大而作用時間較长的情况下,老化理論可較好地表示徐变性质. 这时第一个积分的数值在徐变变形中只占一很小部分.

二、混凝土的松弛

变形固定为常值,应力逐漸減小的现象称为松弛. 混凝土的徐变与龄期有关,因此它的松弛問題也与龄期有关. 混凝土的松弛曲綫給計算温度干縮应力很大的方便.

将(10)式对 t 求微商,以参数 λ 乘(10)式,将二者相加后再求对 t 的微商,就将积分方程(10)轉变为微分方程:

$$\left(A + \sum_i B_i e^{-\alpha_i t} \right) \sigma'' + \left[C + \lambda A + \sum_i B_i (\lambda - \alpha_i) e^{-\alpha_i t} + \sum_i D_i e^{-\beta_i t} \right] \sigma' + \left[\sum_i D_i (\lambda - \beta_i) e^{-\beta_i t} \right] \sigma = \varepsilon'' + \lambda \varepsilon', \quad (11)$$

式中字母右上角的撇号表示对 t 的微商。

在松弛问题中, $\varepsilon'' = \varepsilon' = 0$, 故得松弛方程

$$\left(A + \sum_i B_i e^{-\alpha_i t} \right) \sigma'' + \left[C + \lambda A + \sum_i B_i (\lambda - \alpha_i) e^{-\alpha_i t} + \sum_i D_i e^{-\beta_i t} \right] \sigma' + \left[\sum_i D_i (\lambda - \beta_i) e^{-\beta_i t} \right] \sigma = 0. \quad (12)$$

这是变系数线性微分方程。作变换

$$\theta = e^{-st}, \quad (13)$$

其中 s 是一个常数, 并且是 α_i 及 β_i 的最大公约数, 即

$$\alpha_i = \bar{\alpha}_i s, \quad \beta_i = \bar{\beta}_i s,$$

其中 $\bar{\alpha}_i$ 及 $\bar{\beta}_i$ 都是正整数。为方便起见, 再取符号 $\bar{\lambda}$: $\lambda = \bar{\lambda}s$ 。经变换后的松弛方程为

$$\left[A + \sum_i B_i \theta^{\bar{\alpha}_i} \right] s^2 \theta^2 \sigma'' - \left[C + \bar{\lambda} A s - A s + \sum_i B_i (\bar{\lambda} - \bar{\alpha}_i - 1) s \theta^{\bar{\alpha}_i} + \sum_i D_i \theta^{\bar{\beta}_i} \right] s \theta \sigma' + \left[\sum_i D_i (\bar{\lambda} - \bar{\beta}_i) s \theta^{\bar{\beta}_i} \right] \sigma = 0. \quad (14)$$

此处的微商是对 θ 的微商。于是可看出方程(12)有奇点 $\theta = 0^{[1]}$, 它的判定方程

$$r(r-1)As^2 - r(C + \bar{\lambda}As - As)s = 0$$

有两个根:

$$r = 0 \quad \text{及} \quad r = -\frac{C + \bar{\lambda}As}{As}, \quad (15)$$

所以可将方程(14)的两个线性独立解展开为 θ 的幂级数。为了方便起见, 我们直接看方程(12), 它的两个线性独立解可写成

$$\sigma_1 = e^{-rst} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nst} \quad (16)$$

及

$$\sigma_2 = \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{-mst} + k e^{-rst} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nst} \cdot t, \quad (17)$$

其中 r 是第二个根, k 为一常数。

现在先看第一个解, 以(16)式代入(12)式, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) A s n a_n e^{-nst} + \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r+\bar{\alpha}_i - \bar{\lambda}) B_i s a_n e^{-(n+\bar{\alpha}_i)st} + \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{\lambda} - n - r - \bar{\beta}_i) D_i a_n e^{-(n+\bar{\beta}_i)st} = 0. \quad (18)$$

有了具体的 $\bar{\alpha}_i$ 和 $\bar{\beta}_i$ 的数值, 就可以整理方程的左方, 得到 e^{-st} 的幂级数。令级数各项的系数等于零, 就得到许多代数方程, 用它们来求 a_n 。第一个方程, 即零次幂的系数等于零,

是恒等式,故 a_0 为任意值。以后逐次利用一个方程求一个 a_n , 它们都可以用 a_0 来表示。这样就可以得到第一个解

$$\sigma_1 = a_0 e^{-rst} \sum_{n=0}^{\infty} a'_n e^{-nst}, \quad (19)$$

其中 $a'_n = a_n/a_0$ 是已知的数值了。

再看第二个解,以(17)式代入(12)式,得

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} ms[As(m-\bar{\lambda})-C]b_m e^{-mst} + \\ & + \sum_i \sum_{m=0}^{\infty} ms^2(m+\bar{\alpha}_i-\bar{\lambda})B_i b_m e^{-(m+\bar{\alpha}_i)st} + \\ & + \sum_i \sum_{m=0}^{\infty} [\bar{\lambda}-(m-\bar{\beta}_i)]sD_i b_m e^{-(m+\bar{\beta}_i)st} + \\ & + k' \sum_{n=0}^{\infty} [C-(2n+2r-\bar{\lambda})As]a'_n e^{-(n+r)st} + \\ & + k' \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\lambda}-(2n+2r+\bar{\alpha}_i)]sB_i a'_n e^{-(n+r+\bar{\alpha}_i)st} + \\ & + k' \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} D_i a'_n e^{-(n+r+\bar{\beta}_i)st} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

此处 $k' = k/a_0$, $a'_n = a_n/a_0$ 。

通常由实验数字计算出来的 r 不是整数,这时可令 k' 为零,则求系数 b_m 的方法与 a_n 相同,于是得到

$$\sigma_2 = b_0 \sum_{m=0}^{\infty} b'_m e^{-mst}, \quad (21)$$

其中 $b'_m = \frac{b_m}{b_0}$ 是已知数了。

若 r 为整数,在整理后, e^{-rst} 项的系数中将没有 b_r 。这时如果 e^{-rst} 的系数恒等于零(例如当 r 小于全部 $\bar{\alpha}_i$ 及 $\bar{\beta}_i$ 时), b_r 将是任意值,可以认为它等于零;同时令 $k' = 0$ 。如果 e^{-rst} 的系数不是零,我们要设 $k' \neq 0$, 将(20)式整理为 e^{-st} 的幂级数,使各项的系数等于零,就可得到用 b_0 表示的 b_m 及 k' 了;这时第二个解是

$$\sigma_2 = b_0 \left[\sum_{m=0}^{\infty} b'_m e^{-mst} + k'' e^{-rst} \sum_{n=0}^{\infty} a'_n e^{-nst} \cdot t \right], \quad (22)$$

其中 $b'_m, a'_n, k'' = k'/b_0$ 都是已知的了。

我们已得到两个线性独立的解,它们的和就是通解,其中包含的两个任意常数 a_0 及 b_0 由始值条件确定。始值条件是松弛开始时的初应力及应力下降的初速度。设在 t_0 时开始松弛,即在 t_0 以前无变形,在 t_0 以后变形为常值。初应力

$$\sigma(t_0) = \frac{\varepsilon}{A + \sum_i B_i e^{-a_i t_0}} \quad (23)$$

将(10)式对 t 求微商,得

$$\dot{\sigma}' = \sigma' \left(A + \sum_i B_i e^{-\alpha_i t} \right) + C\sigma - \lambda \int_{t_0}^t \sigma C e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau + \sigma \sum_i D_i e^{-\beta_i t}.$$

令 $\dot{\sigma}' = 0$ 及 $t = t_0$, 即得初速度

$$\sigma'(t_0) = - \frac{C + \sum_i D_i e^{-\beta_i t_0}}{A + \sum_i B_i e^{-\alpha_i t_0}} \sigma(t_0). \quad (24)$$

例: 我們仍用 A. B. Яшин^[2] 的第六組試件为例. 前已求得徐变度曲綫, 所以徐变度的参数如下:

$$C = 8.93, \quad D_1 = 10890, \quad D_2 = 4.05, \quad D_3 = 0.0764, \\ \lambda = 0.8, \quad \beta_1 = 3.0, \quad \beta_2 = 0.15, \quad \beta_3 = 0.004;$$

弹性模量的参数为

$$A = 29.4, \quad B_1 = 2800, \quad B_2 = 11.1, \\ \alpha_1 = 3.14, \quad \alpha_2 = 0.10.$$

选 $s = 0.002$, 有

$$\bar{\lambda} = 400, \quad \bar{\alpha}_1 = 1570, \quad \bar{\alpha}_2 = 59, \\ \bar{\beta}_1 = 1500, \quad \bar{\beta}_2 = 75, \quad \bar{\beta}_3 = 2.$$

由(15)式算得

$$r = 551.87,$$

它不是整数, 因此两个线性独立解为(19)及(21). 分别由(18)式及(20)式求出 a_n 及 b_m 如下:

$$\begin{array}{llll} a'_2 = +0.1808 & b'_2 = +0.470 & a'_{1500} = +99.5 & b'_{79} = +0.069 \\ a'_4 = +0.01645 & b'_4 = +0.1104 & a'_{1502} = +18.0 & b'_{150} = +143.0 \\ a'_{50} = -1.40 & b'_6 = +0.0172 & a'_{1504} = +1.65 & b'_{1502} = +67.6 \\ a'_{52} = -0.258 & b'_{52} = -0.00476 & a'_{1570} = -27.2 & b'_{1504} = +16.0 \\ a'_{54} = -0.024 & b'_{54} = -0.00224 & a'_{1572} = -4.95 & b'_{1506} = +2.5 \\ a'_{75} = +0.333 & b'_{56} = -0.00052 & a'_{1574} = -0.45 & b'_{1572} = -0.0656 \\ a'_{77} = +0.061 & b'_{75} = +0.626 & & b'_{1574} = -0.0308 \\ a'_{79} = +0.005 & b'_{77} = +0.294 & & b'_{1576} = -0.0072 \end{array}$$

其余的 a_n 及 b_m 等于零或数值很小, 可以略去不计. 在计算系数 b_m 时, r 虽然不是整数, 但它接近于整数 552, 因此需要估计 b_{552} 的数值, 看它是否可以略去. 由计算它的代数方程, 不难直接看出它是很小的. 松弛曲綫的级数包含很多项, 为简单起见, 可将指数相差很少的项并为一项, 例如将

$$0.626e^{-75st} + 0.294e^{-77st} + 0.069e^{-79st}$$

改为 $(0.626 + 0.294 + 0.069)e^{-75st}$, 这样作不会引起较大的误差, 因为后两项的系数较小. 最后得到松弛曲綫的式子

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & a_0 e^{-1.104t} [1 + 0.1808e^{-0.004t} + 0.01654e^{-0.008t} - \\ & - 1.682e^{-0.10t} + 0.399e^{-0.15t} + 119.2e^{-3.0t} - 32.6e^{-3.16t}] + \\ & + b_0 [1 + 0.470e^{-0.004t} + 0.1104e^{-0.008t} + 0.0172e^{-0.012t} - \end{aligned}$$

$$- 0.00752e^{-0.101t} + 0.989e^{-0.15t} + 229.1e^{-3.0t} - 0.1036e^{-3.16t}] ,$$

再利用始值条件(23)及(24)就可以求得常数 a_0 及 b_0 。表 2 示理論值与实验值的比較, 括弧内的数字为理論值。

表 2 松弛曲綫的理論值与实验值

$t - t_0$	0	1	8	28	58
2	20.1 (20.1)	13.5 (14.2)	10.0 (10.9)	8.17 (9.34)	8.17 (8.82)
6.75	40.8 (40.8)	32.25 (32.7)	27.7 (25.1)	23.5 (22.8)	23.5 (21.8)
29	40.2 (40.2)	34.3 (32.9)	31.7 (28.8)	31.7 (27.8)	

在徐变方程(10)中, 第一个积分内的影响函数取 $e^{-\lambda(t-\tau)}$ 。这样作会低估了徐变的初速度, 因此也会低估了松弛曲綫的初速度, 所以在松弛开始最初几个小时的应力要比真实情况低(不过这可能是不太重要的)。如果我们取 $\sum_i C_i e^{-\lambda_i(t-\tau)}$ 为影响函数, 就可以改进它, 理論及計算原則仍旧不变, 只是將增加計算工作量。A. B. Яшин 也曾計算第六組試件的松弛曲綫, 在龄期 2 日開始松弛的应力低于实验数据, 相差达 30% 之多, 其原因可能是未正确的反映弹性后效性質。

我們引用了 A. B. Яшин 的試驗資料。他的試驗不是沒有缺点的, 例如每組只有一个試件。但是考虑到由徐变方程演算出的理論松弛曲綫与实验基本符合, 因此仍能由他的試驗得出一些結論。关于弹性后效問題, 仍需繼續进行有系統的試驗, 以便完全确定它的性質, 并进一步檢驗我們提出的假定。因为考虑到混凝土性質的复杂性, 个别試驗不足以作为最后定論的根据。

参 考 文 献

- [1] Арутюнян, Н. X., Некоторые вопросы теории ползучести, Гос. Изд. Технико-теоретической Литературы, 1952.
- [2] Яшин, А. В., Ползучесть бетона в раннем возрасте, Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций, НИИЖБ, 1959.
- [3] Whitney, C. S., Plain and reinforced concrete arches, *Journal of ACI*, 3, 7, March 1932, 479—519.
- [4] Васильев, П. И., Некоторые вопросы пластических деформаций бетона, *Известия ВНИИГ*, 49, 1953, 83—113.
- [5] Улицкий, И. И., Ползучесть бетона, Гостехиздат УССР, 1948.
- [6] Смирнов, В. И., 高等数学教程 (叶彦謙譯), 第三卷, 第五章。

ПОЛЗУЧЕСТЬ, РЕЛАКСАЦИЯ И УПРУГОЕ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕ БЕТОНА

Чжао Цзу-у

(Тяньцзинский Политехнический Институт)

Резюме

В данной статье представляется соотношение между напряжением и деформацией бетона:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(t)} + \int_{t_0}^t \sigma K(t - \tau, \tau) d\tau + \int_{t_0}^t \sigma \left[F(\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau. \quad (1)$$

Ядро K имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} [K(t - \tau, \tau)]_{(t-\tau) \rightarrow \infty} &= 0, \\ \left[\int_{t_0}^t K(t - \tau, \tau) d\tau \right]_{(t-t_0) \rightarrow \infty} &= \text{const.} \end{aligned}$$

Первый интеграл правой части уравнения (1) является обратимой частью деформации ползучести, которая имеет постоянное значение после достаточно длительного воздействия постоянной нагрузки и не зависит от возраста приложения нагрузки, что приблизительно согласуется с опытным данным. Кроме этого, по уравнению (1) видно, что через достаточно время действия нагрузки все кривые ползучести при равных напряжениях, приложенных в различных возрастах бетона, параллельны и имеют равный уклон $F(\tau)$, зависящий только от возраста.

Принимая $\frac{1}{E}$, K и F следующие выражения

$$\begin{aligned} \frac{1}{E(t)} &= A + \sum_i B_i e^{-a_i t}, \\ K(t - \tau) &= C e^{-\lambda(t-\tau)}, \\ F(\tau) &= \sum_i D_i e^{-\beta_i \tau} \end{aligned}$$

получаются кривые релаксации. Сопоставление расчетных с опытным данным показывает, что максимальное отклонение составляет около 10%.