第5卷 第1期 力学学报 Vol. 5, No. 1
1962 年 2 月 ACTA MECHANICA SINICA Feb., 1962

研究簡报

圓柱体具有圓弧裂縫的扭轉問題*

王开福
（复旦大学）

一、引言

設一圓柱体的圓截面，从該截面边界上任意两点出发，分别具有一条任意曲綫形状的裂縫，如图 1 所示，对于这种一般性的裂縫圓截面的扭轉問題，到目前还沒有解决．在最簡单的情况下，即从圓截面任意直径的两端出发，沿着直径的两条裂縫 $\overline{AP_1}$ 和 $\overline{CP_2}$（如图 2 所示）的扭轉問題，在 1942 年威格尔斯沃斯[1]得到了解决，但其裂縫 $\overline{AP_1}$ 和 $\overline{CP_2}$ 的长度都不能等于該圓截面的半径；而在本文中对其找出了复扭曲函数，同时对更广泛扭轉問題［即从圓截面边界上任意两对称点出发，具有两条任意长的正交于边界的圓弧形裂縫 $\widehat{AP_1}$ 和 $\widehat{CP_2}$（如图 3 所示）的扭轉問題］的复扭曲函数进行了研究．

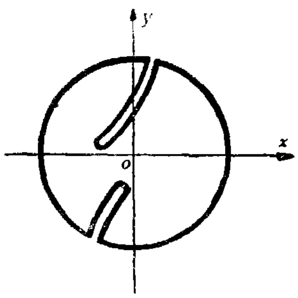

图 1

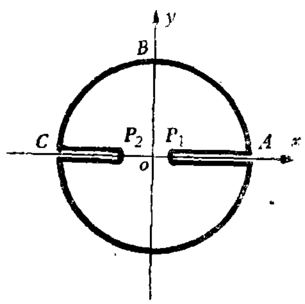

图 2

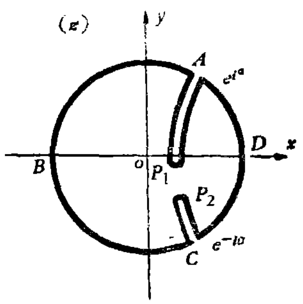

图 3

二、討論将具有圓弧裂縫的圓截面，映照到半无限平面的映照函数

設如图 3 所示圓截面的方程为

$$x^2 + y^2 = R_1^2. \tag{1}$$

又設与圓截面边界正交的圓弧形裂縫的方程为

$$(x - a)^2 + y^2 = R_2^2. \tag{2}$$

其中常数 a 由图 3 所示的几何关系为

---

* 1960 年 1 月 10 日收到．

$$a = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}. \tag{3}$$

将方程(1),(2)变换为复变数 $z(=x+iy)$ 的方程,则分别为

$$z\bar{z} = R_1^2, \tag{4}$$

$$z\bar{z} - a(z+\bar{z}) + R_1^2 = 0. \tag{5}$$

首先取映照函数

$$z = R_1 \frac{t - e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}t - 1}, \tag{6}$$

其中角度 α 按图 3 所示的几何关系易得

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{R_2}{R_1}. \tag{7}$$

映照函数(6)将具有裂縫的圆(如图 3)映照到具有裂縫 $\overline{A'P'_1}$ 和 $\overline{C'P'_2}$ 的上半 t 平面,如图 4 所示. 取圓截面中两裂縫的端点 P_1, P_2 的坐标分别为 z_1, z_2, 将其映照到 t 平面中对应的两点 P'_1, P'_2 的坐标为

$$\left.\begin{aligned} P'_1,\quad t &= \frac{z_1 - e^{i\alpha}R_1}{e^{i\alpha}z_1 - R_1} = im, \\ P'_2,\quad t &= \frac{z_2 - e^{i\alpha}R_1}{e^{i\alpha}z_2 - R_1} = in. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

另取映照函数

$$T = t^2, \tag{9}$$

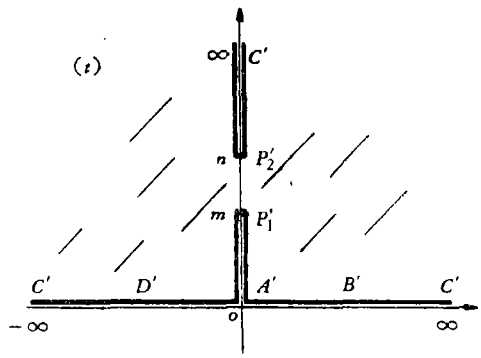

图 4

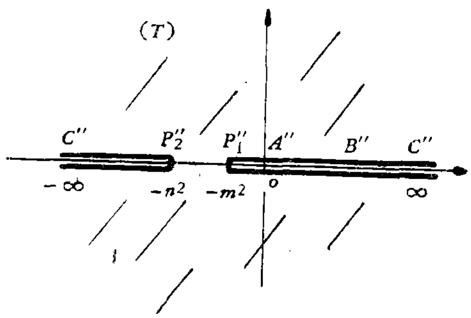

图 5

将具有裂縫 $\overline{A'P'_1}$ 和 $\overline{C'P'_2}$ 的上半 t 平面(如图 4)映照到具有裂縫 $\overline{C''P''_2}$ 和 $\overline{P''_1C''}$ 的整个 T 平面(如图 5). 再取映照函数

$$S = \frac{n^2(m^2 + T)}{(n^2 + T)}, \tag{10}$$

将具有裂縫 $\overline{C''P''_2}$ 和 $\overline{P''_1C''}$ 的整个 T 平面映照到具有沿正实軸 $\overline{P'''_1P'''_2}$ 裂縫的整个 S 平面,如图 6 所示. 最后取映照函数

$$\xi = S^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

将具有沿正实軸 $\overline{P'''_1P'''_2}$ 裂縫的整个 S 平面映照到上半 ξ 平面(如图 7). 綜合以上各映

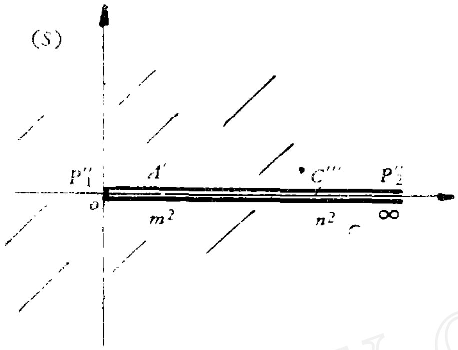

图 6

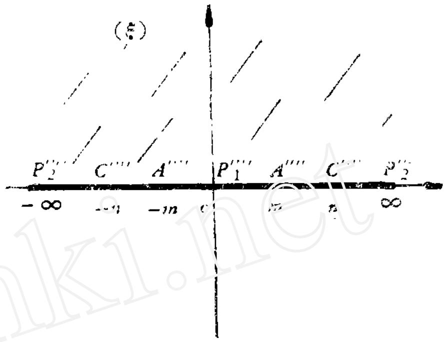

图 7

照函数即得

$$\omega(\xi)=z=R_1\frac{\left[\dfrac{n^2(\xi^2-m^2)}{(n^2-\xi^2)}\right]^{\frac{1}{2}}-c}{c\left[\dfrac{n^2(\xi^2-m^2)}{(n^2-\xi^2)}\right]^{\frac{1}{2}}-1},\tag{12}$$

其中常数 c 为

$$c=e^{i\alpha}.\tag{13}$$

故映照函数(12)就是我們所需要的将裂縫圓与上半平面相互映照的函数. 下节利用大家熟知的求复扭曲函数的公式

$$f(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}}{(\sigma-\xi)}d\sigma\tag{14}$$

来求本文所提出的問題的复扭曲函数.

三、求具有圓弧裂縫圓截面的复扭曲函数

由图 3 所示可知, 截面的边界不是一条連續曲綫, 因此公式(14)中的 $\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}$ 在不同的綫段上积分就取到不同的形式.

在圓弧 $\overset{\frown}{ABC}$ 和 $\overset{\frown}{CDA}$ 上, 由方程(4)知

$$\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}=z\bar{z}=R_1^2.\tag{15}$$

在圓弧形裂縫 $\overset{\frown}{AP_1}$ 和 $\overset{\frown}{CP_2}$ 上, 由方程(5)知

$$\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}=a(\omega(\sigma)+\overline{\omega(\sigma)})-R_1^2.\tag{16}$$

将等式(15), (16)代入公式(14), 即得到

$$2\pi f(\xi)=\int_{-n}^{-m}+\int_{m}^{n}\frac{R_1^2}{(\sigma-\xi)}d\sigma+\int_{-m}^{m}+\int_{-\infty}^{-n}+\int_{n}^{\infty}\frac{a[\omega(\sigma)+\overline{\omega(\sigma)}]-R_1^2}{(\sigma-\xi)}d\sigma=$$

$$=\int_{-n}^{-m}+\int_{m}^{n}\frac{2R_1^2-a[\omega(\sigma)+\overline{\omega(\sigma)}]}{(\sigma-\xi)}d\sigma+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a[\omega(\sigma)+\overline{\omega(\sigma)}]-R_1^2}{(\sigma-\xi)}d\sigma.\tag{17}$$

由大家熟知的柯西积分定理知

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(\sigma)+\overline{\omega(\sigma)}}{(\sigma-\xi)}d\sigma=2\pi i\omega(\xi).\tag{18}$$

从(12)式知 $\omega(\xi)$ 是 ξ 的偶次函数，因此可得下式：

$$\int_{-n}^{-m} + \int_{m}^{n} \frac{\omega(\sigma) + \overline{\omega(\sigma)}}{(\sigma - \xi)} d\sigma = 2\xi \int_{m}^{n} \frac{\omega(\sigma) + \overline{\omega(\sigma)}}{(\sigma^2 - \xi^2)} d\sigma. \tag{19}$$

将等式(18)，(19)代入(17)式，然后再整理化簡即得

$$f(\xi) = a\omega(\xi)i - \frac{1}{2}R_1^2 i + \frac{R_1^2}{\pi}\log\frac{(m+\xi)(n-\xi)}{(m-\xi)(n+\xi)} - \frac{aR_1(t^2+n^2)}{n^2\pi}\xi\sum_{j=1}^{6} Q_j, \tag{20}$$

其中 $Q_j(j=1,2,\cdots,6)$，t 分别为

$$\left.\begin{aligned}
Q_1 &= A_1\int_0^\infty \frac{dt^*}{(mct^*-1)\sqrt{(1+t^{*2})(1+k^2t^{*2})}},\\
Q_2 &= A_2\int_0^\infty \frac{dt^*}{(mt^*-t)\sqrt{(1+t^{*2})(1+k^2t^{*2})}},\\
Q_3 &= A_3\int_0^\infty \frac{dt^*}{(mt^*+t)\sqrt{(1+t^{*2})(1+k^2t^{*2})}},\\
Q_4 &= A_4\int_0^\infty \frac{dt^*}{(m\bar{c}t^*-1)\sqrt{(1+t^{*2})(1+k^2t^{*2})}},\\
Q_5 &= A_5\int_0^\infty \frac{dt^*}{(mt^*-t)\sqrt{(1+t^{*2})(1+k^2t^{*2})}},\\
Q_6 &= A_6\int_0^\infty \frac{dt^*}{(mt^*+t)\sqrt{(1+t^{*2})(1+k^2t^{*2})}};
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$t = \left[\frac{n^2(\xi^2-m^2)}{(n^2-\xi^2)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

此地 $A_j(j=1,2,\cdots,6)$，k 分别为

$$\left.\begin{aligned}
&A_1 = \frac{c^2-1}{c^2t^2-1}, \quad A_2 = \frac{t-c}{2(ct-1)}, \quad A_3 = \frac{t+c}{2(ct+1)},\\
&A_4 = \frac{\bar{c}^2-1}{\bar{c}^2t^2-1}, \quad A_5 = \frac{t-\bar{c}}{2(\bar{c}t-1)}, \quad A_6 = \frac{t+\bar{c}}{2(\bar{c}t+1)};\\
&k = \frac{m}{n}.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

从积分(21)各式看来，在形式上相当整齐簡单，但在一般情况下的裂縫圓截面的柱体扭轉問題，由于积分(21)中各式已不是初等积分了，因此只能根据实际情况的需要，而对(21)各式寻求适当的近似数字計算。

复扭曲函数 $f(\xi)$ 的表达式(20)的求得，也就是本文的目的已經达到．下面将对具有一条圓弧形裂縫的圓截面的复扭曲函数作进一步探討。

四、对具有一条裂縫圓截面的討論

对具有一条裂縫圓截面的情况可分为一种如图 8 所示的裂縫截面，另一种如图 9 所示的裂縫截面．下面仅对如图 8 所示的截面进行分析，也就是上节問題中当 $n\to\infty$ 时的情况．因此将 $n\to\infty$ 代入(20)，(21)，(22)各式，然后对(21)各式进行积分，再經过

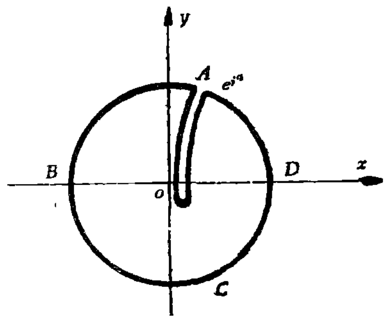

图 8

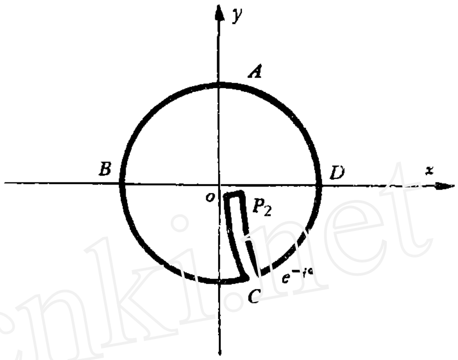

图 9

較繁的演算即可得到

$$f(\xi) = a\omega(\xi)i - \frac{1}{2}R_1^2 i + \frac{R_1^2}{\pi}\log\frac{(m+\xi)}{(m-\xi)} - \frac{aR_1}{\pi}\xi\sum_{j=1}^{4}H_j; \tag{24}$$

其中 $H_j(j=1,2,3,4)$ 分别为

$$\left.\begin{aligned}
H_1 &= \frac{c^2-1}{[c^2(\xi^2-m^2)-1](c^2m^2+1)^{1/2}}\log\frac{1-(c^2m^2+1)^{\frac{1}{2}}}{cm(c^2m^2+1)^{1/2}-c^2m^2},\\
H_2 &= \frac{\bar{c}^2-1}{[\bar{c}^2(\xi^2-m^2)-1](\bar{c}^2m^2+1)^{1/2}}\log\frac{1-(\bar{c}^2m^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\bar{c}m(\bar{c}^2m^2+1)^{1/2}-c^2m^2},\\
H_3 &= \frac{\cos\alpha\xi^2-2(\xi^2-m^2)^{\frac{1}{2}}+\cos\alpha(1-m^2)}{[\xi^2-2\cos\alpha(\xi^2-m^2)^{1/2}+(1-m^2)]\xi}\log\frac{\xi^2-m^2-\xi(\xi^2-m^2)^{1/2}}{m(\xi-m)},\\
H_4 &= \frac{\cos\alpha\xi^2+2(\xi^2-m^2)^{1/2}+\cos\alpha(1-m^2)}{[\xi^2+2\cos\alpha(\xi^2-m^2)^{1/2}+(1-m^2)]\xi}\log\frac{\xi^2-m^2+\xi(\xi^2-m^2)^{\frac{1}{2}}}{m(\xi-m)}.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

这就是如图 8 所示的复扭曲函数.

五、討 論

本节将对威格尔斯沃斯所研究的問題(如图 2 所示)进行分析. 由如图 3 所示易知,当 $R_2\to\infty$ 时就是威格尔斯沃斯所研究的問題,因此将 $R_2\to\infty$ 代入复扭曲函数 $f(\xi)$ 的表达式(20)中即得到如图 2 所示的裂縫圓截面的复扭曲函数:

$$f(\xi) = -\frac{i}{2}\omega(\xi)^2 + \frac{4R_1^2(n^2+t^2)\xi}{n\sqrt{A}\,\pi(1+t^2)^2}\left\{\frac{(1-t^2)(1+mn)}{\sqrt{A}} + \frac{B-(2A+B)t^2}{2A}D - \frac{\sqrt{A}\,t^2}{\sqrt{E}}\log t\cdot\frac{2\sqrt{E}-\beta}{2E-\beta t^2-2mn\sqrt{E}}\right\}, \tag{26}$$

其中 A, B, D, E, β, t 分别为

$$\left.\begin{aligned}
&A = m^2n^2+m^2+n^2+1,\quad B = m^2+n^2+2,\\
&D = \log\frac{B-2A-2mn\sqrt{A}}{2\sqrt{A}+B},\quad E = m^2n^2+(m^2+n^2)t^2+t^4,\\
&\beta = (m^2+n^2+2t^2)t^2,\quad t = \left[\frac{n^2(\xi^2-m^2)}{(n^2-\xi^2)}\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

因此就得到我們所要求的具有两条直綫裂縫圓截面(如图 2 所示)的复扭曲函数. 我們知道,威格尔斯沃斯[1]的結果并不能解决任一条裂縫的长度等于圓截面的半径的情况, 这是由于他的映照函数所限制. 而映照函数(12)(其中 $c=i$)就不受这个限制,同时从簡单例子中也可以得出与威格尔斯沃斯[1]相同的結果. 例如对于沒有裂縫圓截面的扭轉問題,也就是把具有裂縫圓截面的两条裂縫的长度看作等于零的情况(即当 $m=0$ 和 $n\to\infty$). 若将 $m=0$ 和 $n\to\infty$ 以及 $c=i$ 代入(12)和(26)式, 即得到沒有裂縫的圓截面的映照函数和复扭曲函数,再利用大家熟知的求抗扭刚度的公式

$$D = I + D_0, \tag{28}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\omega(\sigma)}^2 \omega(\sigma) d\omega(\sigma), \\ D_0 &= -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} [f(\sigma) + \overline{f(\sigma)}] d[\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}]. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

經过簡单的計算,即得到大家熟悉的圓柱体的抗扭刚度

$$D = \frac{R_1^4\pi}{2}.$$

而从威格尔斯沃斯[1]的結果同样能得到这个正确的抗扭刚度.

参　考　文　献

[1] Wigglesworth, L. A., Flexure and torsion of a circular shaft with two cracks, *Proc. London Math. Soc.*, **47**, 1942, 20—37.