

蠕变引起的拱坝应力重新分布*

朱伯芳

(水利水电科学研究院)

提 要

拱坝是最安全最经济的一种混凝土坝,但到目前为止,对拱坝的研究存在着一个共同的缺点,即没有考虑时间的因素,认为在静荷重作用下坝内应力是恒定不变的。事实上,由于混凝土的蠕变,坝内应力将随着时间而重新分布。本文对这个问题进行比较全面的研究,建立了基本方程,并求出了在静荷重及温度作用下的具体解答。从文中算例可以看出,在静荷重作用下,混凝土蠕变使拱座应力逐渐增加而拱冠应力逐渐减小,根据基础弹性模量的不同,应力变化幅度为10~50%。温度应力则普遍降低20~45%。

一、基本方程

今考虑图1所示拱坝。由于蠕变,拱座反力 $X(t)$ 及 $M(t)$ 都是时间 t 的函数。但因拱坝承受的水压力和温度变化是左右对称的,反力 Y 与时间无关。根据弹性蠕变理论的迭加原理,可将超静定拱(a)分解为数个静定结构之和,即 $(a) = (b) + (c) + (d) + (e)$ 。

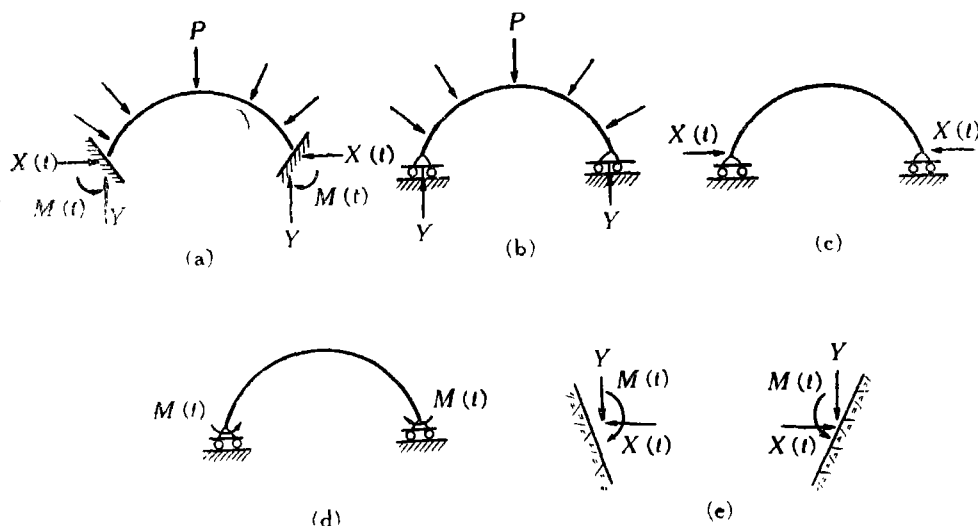


图 1

(a) 超静定拱, 两端与弹性基础连接, 拱座反力 $M(t)$ 及 $X(t)$ 为时间 t 的函数。(b) 静定拱, 两端为铰轴支座, 拱座变位 $\Delta(p, t)$ 及 $\theta(p, t)$ 为时间 t 的函数。(c) 静定拱,

* 1960年8月10日收到。

两端为铰轴支座, 受水平力 $X(t)$ 的作用, 拱座变位为 $\Delta[X(t)]$ 及 $\theta[X(t)]$. (d) 静定拱, 两端为铰轴支座, 受力矩 $M(t)$ 的作用, 拱座变位为 $\Delta[M(t)]$ 及 $\theta[M(t)]$. (e) 弹性基础, 在水平力 $X(t)$ 及力矩 $M(t)$ 作用下, 角变形为 $\alpha M(t)$, 水平变位为 $\beta X(t)$. 引用 Vogt 公式, $\alpha = \frac{5.075}{E_2 h^2}$, $\beta = \frac{1.556}{E_2}$; E_2 为基础弹性模量, h 为拱厚度. 由于对称, y 方向的变位不引起拱应力. 另外, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 引起的基础角变位及 $M(t)$ 引起的基础线变位均甚微小, 可以忽略. (原则上可以考虑, 并无困难, 不过计算稍繁冗.)

在任何时间, 拱座混凝土与岩石的变形必须连续, 由此得

$$\left. \begin{aligned} \Delta(p, t) + \Delta[X(t)] + \Delta[M(t)] + \beta X(t) &= 0, \\ \theta(p, t) + \theta[X(t)] + \theta[M(t)] + \alpha M(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

混凝土龄期超过 28 天以后, 龄期对蠕变的影响已不显著^[2]. 拱坝受力一般在浇筑半年至一年以后, 因此不必考虑混凝土龄期, 蠕变度可用下式表示:

$$c(t, \tau) = c_1 [1 - e^{-k_1(t-\tau)}],$$

式中 c_1 及 k_1 为常数, τ 为加荷时间, $t - \tau$ 为荷重持续时间, 混凝土弹性模量为 E_1 . 以上变形规律可用图 2 所示模型代表. 根据实验, 水工混凝土可近似地取 $c_1 = \frac{1}{E_1}$, $k_1 = 0.030 \frac{1}{\text{天}}$. 今设 $\Delta_x =$ 单位水平力

$[X(t) = 1]$ 作用下拱座的弹性水平变位, $\theta_x =$ 单位水平力 $[X(t) = 1]$ 作用下拱座的弹性角变形, Δ_m 为单位力矩 $[M(t) = 1]$ 作用下拱座的弹性水平变位, θ_m 为单位力矩 $[M(t) = 1]$ 作用下拱座的弹性角变形 (Δ_x, θ_x 等算式见附录). 可以证明, 当蠕变变形的泊松比等于弹性变形的泊松比时, 在 $X(t)$ 作用下, 拱座总水平变位及总角变位 (包括蠕变及弹性变形) 分别为

$$\begin{aligned} \Delta[X(t)] &= \Delta_x \cdot \left\{ X(t) - E_1 \int_0^t X(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} c(t, \tau) d\tau \right\} = \\ &= \Delta_x \cdot \left\{ X(t) + E_1 c_1 k_1 \int_0^t X(\tau) e^{-k_1(t-\tau)} d\tau \right\}, \\ \theta[X(t)] &= \theta_x \cdot \left\{ X(t) + E_1 c_1 k_1 \int_0^t X(\tau) e^{-k_1(t-\tau)} d\tau \right\}. \end{aligned}$$

在 $M(t)$ 作用下, 拱座的总水平变位及总角变位分别为

$$\begin{aligned} \Delta[M(t)] &= \Delta_m \cdot \left\{ M(t) + E_1 c_1 k_1 \int_0^t M(\tau) e^{-k_1(t-\tau)} d\tau \right\}, \\ \theta[M(t)] &= \theta_m \cdot \left\{ M(t) + E_1 c_1 k_1 \int_0^t M(\tau) e^{-k_1(t-\tau)} d\tau \right\}. \end{aligned}$$

以上各式代入 (1) 式, 得变形连续条件如下:

$$\left. \begin{aligned} \Delta(p, t) + \Delta_x [X(t) + E_1 c_1 k_1 \int_0^t X(\tau) e^{-k_1(t-\tau)} d\tau] + \\ + \Delta_m [M(t) + E_1 c_1 k_1 \int_0^t M(\tau) e^{-k_1(t-\tau)} d\tau] + \beta X(t) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

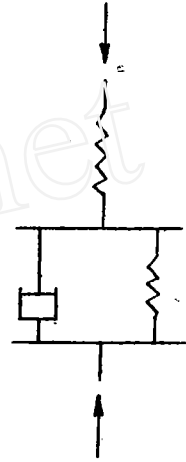


图 2

$$\begin{aligned} & \theta(p, t) + \theta_x [X(t) + E_1 c_1 k_1 \int_0^t X(\tau) e^{-k_1(t-\tau)} d\tau] + \\ & + \theta_m [M(t) + E_1 c_1 k_1 \int_0^t M(\tau) e^{-k_1(t-\tau)} d\tau] + \alpha M(t) = 0. \end{aligned}$$

上式是一个第二类伏特拉(Volterra)积分方程组,自由项 $\Delta(p, t)$ 及 $\theta(p, t)$ 是已知的. 因此我們得到結論:混凝土蠕变引起的拱坝应力重分布問題归結于求解积分方程組(2).

如果岩石也产生蠕变,只要将(2)式中的 $\beta X(t)$ 及 $\alpha M(t)$ 分別换成

$$\beta [X(t) + E_2 c_2 k_2 \int_0^t X(\tau) e^{-k_2(t-\tau)} d\tau] \text{ 及 } \alpha [M(t) + E_2 c_2 k_2 \int_0^t M(\tau) e^{-k_2(t-\tau)} d\tau].$$

但岩石蠕变甚小,一般不必考虑.

今采用运算微积分法解上述积分方程组. 对(2)式进行拉普拉斯变换,得

$$\begin{aligned} & L[\Delta(p, t)] + L[X(t)] \cdot \left[\Delta_x + \frac{E_1 c_1 k_1 \Delta_x}{s + k_1} + \beta \right] + \\ & + L[M(t)] \cdot \left[\Delta_m + \frac{E_1 c_1 k_1 \Delta_m}{s + k_1} \right] = 0, \\ & L[\theta(p, t)] + L[X(t)] \cdot \left[\theta_x + \frac{E_1 c_1 k_1 \theta_x}{s + k_1} \right] + \\ & + L[M(t)] \cdot \left[\theta_m + \frac{E_1 c_1 k_1 \theta_m}{s + k_1} + \alpha \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

解之,得

$$\begin{aligned} L[X(t)] &= \frac{U_2(s)L[\theta(p, t)] - V_2(s)L[\Delta(p, t)]}{U_1(s) \cdot V_2(s) - U_2(s)V_1(s)}, \\ L[M(t)] &= \frac{V_1(s)L[\Delta(p, t)] - U_1(s)L[\theta(p, t)]}{U_1(s)V_2(s) - U_2(s)V_1(s)}. \end{aligned} \quad (4)$$

式中

$$\begin{aligned} U_1(s) &= \Delta_x \left(1 + \frac{E_1 c_1 k_1}{s + k_1} \right) + \beta, & U_2(s) &= \Delta_m \left(1 + \frac{E_1 c_1 k_1}{s + k_1} \right), \\ V_1(s) &= \theta_x \left(1 + \frac{E_1 c_1 k_1}{s + k_1} \right), & V_2(s) &= \theta_m \left(1 + \frac{E_1 c_1 k_1}{s + k_1} \right) + \alpha. \end{aligned}$$

在式(2)中令蠕变度 $c_1 = 0$, 得到不考虑蠕变的弹性解如下:

$$\begin{aligned} X(0) &= \frac{\Delta_m \theta_p - \Delta_p \theta_m - \alpha \Delta_m}{\Delta_x \theta_m - \Delta_m \theta_x + \alpha \Delta_x + \beta \theta_m + \alpha \beta}, \\ M(0) &= \frac{\theta_x \Delta_p - \theta_p \Delta_x - \beta \theta_p}{\Delta_x \theta_m - \Delta_m \theta_x + \alpha \Delta_x + \beta \theta_m + \alpha \beta}. \end{aligned} \quad (5)$$

二、水压力作用下的应力重分布

設在水压力及其他靜荷重作用下拱座瞬时弹性变形为 Δp 及 θ_p , 可証明, 当蠕变变形泊松比等于弹性变形泊松比时, 拱座总变形为

$$\begin{aligned} \Delta(p, t) &= \Delta p \cdot [1 + E_1 c_1 (1 - e^{-k_1 t})], \\ \theta(p, t) &= \theta p [1 + E_1 c_1 (1 - e^{-k_1 t})]. \end{aligned} \quad (6)$$

代入式(4), 并进行拉普拉斯反变换, 整理后得

$$X(t) = \frac{(1 + E_1 c_1)[(1 + E_1 c_1)(\Delta_m \theta_p - \Delta_p \theta_m) - \alpha \Delta_p]}{(1 + E_1 c_1)^2(\Delta_x \theta_m - \Delta_m \theta_x) + (1 + E_1 c_1)(\alpha \Delta_x + \beta \theta_m) + \alpha \beta} + \\ + \frac{e^{-s_1 t}(E_1 c_1 k_1 + k_1 - s_1)[(k_1 - s_1)(\Delta_m \theta_p - \Delta_p \theta_m - \alpha \Delta_p) + E_1 c_1 k_1(\Delta_m \theta_p - \Delta_p \theta_m)]}{A_1 s_1(s_1 - s_2)} - \\ - \frac{e^{-s_2 t}(E_1 c_1 k_1 + k_1 - s_2)[(k_1 - s_2)(\Delta_m \theta_p - \Delta_p \theta_m - \alpha \Delta_p) + E_1 c_1 k_1(\Delta_m \theta_p - \Delta_p \theta_m)]}{A_1 s_2(s_1 - s_2)}, \quad (7a)$$

$$M(t) = \frac{(1 + E_1 c_1)^2(\theta_x \Delta_p - \Delta_x \theta_p) - \beta \theta_p(1 + E_1 c_1)}{(1 + E_1 c_1)^2(\Delta_x \theta_m - \Delta_m \theta_x) + (1 + E_1 c_1)(\alpha \Delta_x + \beta \theta_m) + \alpha \beta} + \\ + \frac{e^{-s_1 t}(E_1 c_1 k_1 + k_1 - s_1)[(k_1 - s_1)(\theta_x \Delta_p - \Delta_x \theta_p - \beta \theta_p) + E_1 c_1 k_1(\theta_x \Delta_p - \Delta_x \theta_p)]}{A_1 s_1(s_1 - s_2)} - \\ - \frac{e^{-s_2 t}(E_1 c_1 k_1 + k_1 - s_2)[(k_1 - s_2)(\theta_x \Delta_p - \Delta_x \theta_p - \beta \theta_p) + E_1 c_1 k_1(\theta_x \Delta_p - \Delta_x \theta_p)]}{A_1 s_2(s_1 - s_2)}, \quad (7b)$$

式中

$$s_{1,2} = \frac{A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1 A_3}}{2A_1}, \quad A_1 = \Delta_x \theta_m - \Delta_m \theta_x + \alpha \Delta_x + \beta \theta_m + \alpha \beta,$$

$$A_2 = k_1[2(1 + E_1 c_1)(\Delta_x \theta_m - \Delta_m \theta_x) + (2 + E_1 c_1)(\alpha \Delta_x + \beta \theta_m) + 2\alpha \beta],$$

$$A_3 = k_1^2[(1 + E_1 c_1)^2(\Delta_x \theta_m - \Delta_m \theta_x) + (1 + E_1 c_1)(\alpha \Delta_x + \beta \theta_m) + \alpha \beta].$$

由此可以计算任意时间 t 拱座反力与力矩, 从而计算全拱应力。当时间趋于无限 $t \rightarrow \infty$ 时, $e^{-s_1 t} = e^{-s_2 t} = 0$, 故

$$\left. \begin{aligned} X(\infty) &= \frac{(\Delta_m \theta_p - \Delta_p \theta_m)(1 + E_1 c_1)^2 - \alpha \Delta_p(1 + E_1 c_1)}{(\Delta_x \theta_m - \Delta_m \theta_x)(1 + E_1 c_1)^2 + (\alpha \Delta_x + \beta \theta_m)(1 + E_1 c_1) + \alpha \beta}, \\ M(\infty) &= \frac{(\theta_x \Delta_p - \Delta_x \theta_p)(1 + E_1 c_1)^2 - \beta \theta_p(1 + E_1 c_1)}{(\Delta_x \theta_m - \Delta_m \theta_x)(1 + E_1 c_1)^2 + (\alpha \Delta_x + \beta \theta_m)(1 + E_1 c_1) + \alpha \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

令混凝土的长期弹性模量为 $E^* = \frac{E_1}{1 + E_1 c_1}$, 则得长期的静定弹性变形: $\Delta'_m = \Delta_m(1 + E_1 c_1)$, $\Delta'_p = \Delta_p(1 + E_1 c_1)$, $\dots$ 。由式(8),

$$\left. \begin{aligned} X(\infty) &= \frac{\Delta'_m \theta'_p - \theta'_m \Delta'_p - \alpha \Delta'_p}{\Delta'_x \theta'_m - \Delta'_m \theta'_x + \alpha \Delta'_x + \beta \theta'_m + \alpha \beta}, \\ M(\infty) &= \frac{\theta'_x \Delta'_p - \Delta'_x \theta'_p - \beta \theta'_p}{\Delta'_x \theta'_m - \Delta'_m \theta'_x + \alpha \Delta'_x + \beta \theta'_m + \alpha \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

比较式(9)和式(5)可知, $M(\infty)$ 和 $X(\infty)$ 等于按照长期弹性模量 E^* 计算的弹性解。当岩石弹性模量趋于无限大时, $\alpha = \beta = 0$ 。在(5), (8)二式中, 令 $\alpha = \beta = 0$, 此时二式完全相同。可知, 当岩石无限刚固时, 拱坝在静荷重作用下应力不随时间而改变。

兹举一算例来具体说明拱坝应力随时间而改变的情况。拱坝半径 $r = 100$ 米, 厚度 25 米, 中心角 40 度, 水头 100 米, $E_1 = 2 \times 10^6$ 吨/米², $c_1 = 0.50 \times 10^{-6}$ 米²/吨, $k_1 = 0.030 \frac{1}{\text{天}}$, $E_2 = 2 \times 10^6$ 吨/米²。计算结果见表 1。

岩石弹性模量不同时, 应力变化幅度也不同。野外实测资料说明岩石弹性模量一般

表 1 静水压力作用下拱内力与力矩的变化

时 间 (天)	拱 座		拱 冠	
	水 平 力 $X(t)$ (吨)	弯 矩 $M(t)$ (吨米)	轴 向 力 $N_a(t)$ (吨)	力 矩 $M_0(t)$ (吨米)
0	800	30200	1478	-28800
7	822	31300	1500	-27500
14	837	32100	1515	-26600
28	857	33000	1535	-25600
90	878	33700	1556	-24800
180	880	33800	1558	-24700
360	880	33800	1558	-24700
∞	880	33800	1558	-24700

表 2 基础弹性模量不同时拱座反力的变化

$\frac{E_{\text{拱座}}}{E_{\text{混凝土}}}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	∞
$\frac{M(\infty)}{M(0)}$	152%	136	122	112	107	103	102	100
$\frac{X(\infty)}{X(0)}$	151%	133	120	110	105	102	101	100

不高于混凝土的弹性模量,从表 2 可见,内力重分布的幅度为 10% 至 50%。

三、稳定温度作用下的应力重分布

坝内温度分布一般是非线性的,根据平面截面假设,可将温度应力分解为三部分,即非线性温度,上下游线性温差及均匀温度,如图 3, (a) = (b) + (c) + (d)。

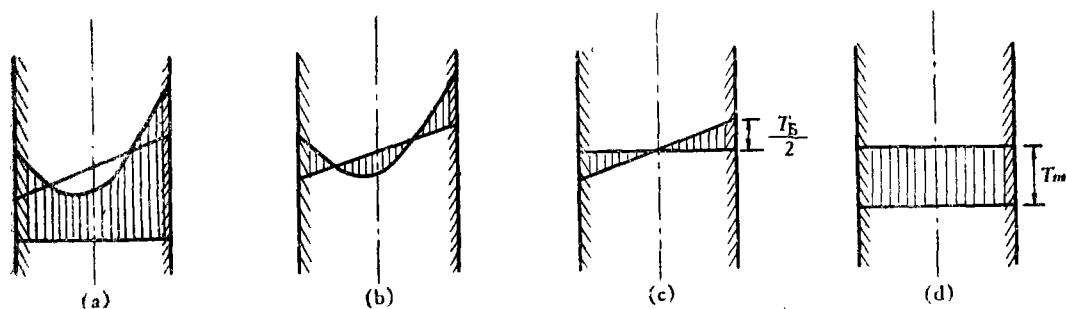


图 3

(1) 非线性温度引起的应力:

这些应力在任一断面都是本身自相平衡而且不引起拱座变位,故可按均质体计算:

$$\sigma^*(t) = \frac{\sigma_0}{1 + E_1 c_1} [1 + E_1 c_1 e^{-gt}], \quad (10)$$

式中

$$g = (1 + E_1 c_1) k_1.$$

(2) 上下游线性温差引起的应力:

$$\theta(p, t) = \frac{\alpha_1 T_0 r \varphi_0}{h} = \theta_1, \quad \Delta(p, t) = \frac{\alpha_1 r^2 T_0}{h} (\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) = \Delta_1,$$

α_1 = 綫膨胀系数, 据此由式(4)得

$$X(t) = a_0 + a_1 e^{-s_1 t} + a_2 e^{-s_2 t}; \quad (11)$$

$$a_0 = \frac{(\Delta_m \theta_1 - \theta_m \Delta_1)(1 + E_1 c_1) - \alpha \Delta_1}{(\Delta_x \theta_m - \Delta_m \theta_x)(1 + E_1 c_1)^2 + (\alpha \Delta_x + \beta \theta_m)(1 + E_1 c_1) + \alpha \beta},$$

$$a_1 = \frac{(k_1 - s_1)[(\Delta_m \theta_1 - \theta_m \Delta_1)(E_1 c_1 k_1 + k_1 - s_1) - \alpha \Delta_1(k_1 - s_1)]}{A_1 s_1(s_1 - s_2)},$$

$$a_2 = \frac{-(k_1 - s_2)[(\Delta_m \theta_1 - \theta_m \Delta_1)(E_1 c_1 k_1 + k_1 - s_2) - \alpha \Delta_1(k_1 - s_2)]}{A_1 s_2(s_1 - s_2)}.$$

$$M(t) = b_0 + b_1 e^{-s_1 t} + b_2 e^{-s_2 t}; \quad (12)$$

$$b_0 = \frac{(\theta_x \Delta_1 - \Delta_x \theta_1)(1 + E_1 c_1) - \beta \theta_1}{(\Delta_x \theta_m - \Delta_m \theta_x)(1 + E_1 c_1)^2 + (\alpha \Delta_x + \beta \theta_m)(1 + E_1 c_1) + \alpha \beta},$$

$$b_1 = \frac{(k_1 - s_1)[(\theta_x \Delta_1 - \Delta_x \theta_1)(E_1 c_1 k_1 + k_1 - s_1) - \beta \theta_1(k_1 - s_1)]}{A_1 s_1(s_1 - s_2)},$$

$$b_2 = \frac{-(k_1 - s_2)[(\theta_x \Delta_1 - \Delta_x \theta_1)(E_1 c_1 k_1 + k_1 - s_2) - \beta \theta_1(k_1 - s_2)]}{A_1 s_2(s_1 - s_2)}.$$

(3) 均匀温度引起的应力:

在均匀温度作用下, 拱座的静定变形为

$$\Delta(p, t) = \alpha T_m r \sin \phi_0 = \Delta_0, \quad \theta(p, t) = 0.$$

因此在(11), (12)两式中令 $\theta_1 = 0$, $\Delta_1 = \Delta_0$, 则得到均匀温度作用下的应力解.

当时間趋于无限 $t \rightarrow \infty$ 时, $e^{-s_1 t} = e^{-s_2 t} = 0$, 可証在稳定温度作用下, 混凝土蠕变使温度应力不断降低, 经过長時間后降低到按混凝土长期弹性模量計算的应力.

表 3 是具体数例, 基本数据同前.

表 3 稳定温度作用下拱坝温度蠕变应力

时 間 (天)	非綫性 温度 $\frac{\sigma^*(t)}{\sigma_0}$	上 下 游 綫 性 温 差				均 匀 温 度			
		拱 座		拱 冠		拱 座		拱 冠	
		$X(t)$	$M(t)$	$N_0(t)$	$M_0(t)$	$X(t)$	$M(t)$	$N_0(t)$	$M_0(t)$
0	1.000	-8.03	-776	-8.03	-824	-211	648	-211	-624
7	0.828	-6.28	-674	-6.28	-712	-192	615	-192	-542
14	0.716	-5.14	-602	-5.14	-633	-178	588	-178	-484
28	0.593	-3.88	-518	-3.88	-541	-161	548	-161	-423
90	0.502	-3.04	-446	-3.04	-464	-142	495	-142	-361
180	0.500	-3.04	-443	-3.04	-461	-141	491	-141	-360
360	0.500	-3.04	-443	-3.04	-461	-141	490	-141	-360
∞	0.500	-3.04	-443	-3.04	-461	-141	490	-141	-360

四、温度正弦变化时的应力重分布

外界气温和水温的变化均在坝内引起正弦变化的温度場, 考虑蠕变的应力重分布可

計算如下.

(1) 非綫性分布温度引起的应力:

弹性应力

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin \omega t.$$

由式(10)得蠕变应力

$$\begin{aligned} \sigma^*(t) &= \frac{1}{1 + E_1 c_1} \int_0^t [1 + E_1 c_1 e^{-g(t-\tau)}] \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ &= \frac{\sigma_0}{1 + E_1 c_1} \left[\sin \omega t + E_1 c_1 \omega \cdot \frac{(g \cos \omega t + \omega \sin \omega t)}{g^2 + \omega^2} (1 + e^{-gt}) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e^{-gt} = 0$.

(2) 上下游綫性温差引起的应力:

拱座靜定变形为

$$\Delta(p, t) = \Delta_1 \sin \omega t, \quad \theta(p, t) = \theta_1 \sin \omega t, \quad (14)$$

$$\frac{1}{\Delta_1} \frac{\partial \Delta(p, t)}{\partial t} = \frac{1}{\theta_1} \frac{\partial \theta(p, t)}{\partial t} = \omega \cos \omega t,$$

由式(11)及式(12),得

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_0^t [a_0 + a_1 e^{-s_1(t-\tau)} + a_2 e^{-s_2(t-\tau)}] \frac{1}{\Delta_1} \frac{\partial \Delta(p, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ &= \left(a_0 + \frac{a_1 \omega^2}{s_1^2 + \omega^2} + \frac{a_2 \omega^2}{s_2^2 + \omega^2} \right) \sin \omega t + \left(\frac{a_1 s_1 \omega}{s_1^2 + \omega^2} + \frac{a_2 s_2 \omega}{s_2^2 + \omega^2} \right) \cos \omega t - \\ &\quad - \left(\frac{a_1 s_1 \omega}{s_1^2 + \omega^2} e^{-s_1 t} + \frac{a_2 s_2 \omega}{s_2^2 + \omega^2} e^{-s_2 t} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

同理.

$$\begin{aligned} M(t) &= \left(b_0 + \frac{b_1 \omega^2}{s_1^2 + \omega^2} + \frac{b_2 \omega^2}{s_2^2 + \omega^2} \right) \sin \omega t + \left(\frac{b_1 s_1 \omega}{s_1^2 + \omega^2} + \frac{b_2 s_2 \omega}{s_2^2 + \omega^2} \right) \cos \omega t - \\ &\quad - \left(\frac{b_1 s_1 \omega}{s_1^2 + \omega^2} e^{-s_1 t} + \frac{b_2 s_2 \omega}{s_2^2 + \omega^2} e^{-s_2 t} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

当时間趋于无限($t \rightarrow \infty$)时,以上各式中的 $e^{-s_1 t} = e^{-s_2 t} = 0$.

(3) 均匀温度引起的应力:

拱座靜定变形为

$$\Delta(p, t) = \Delta_0 \sin \omega t, \quad \theta(p, t) = 0.$$

与(14)式比較,可見上节 $X(t)$ 和 $M(t)$ 的公式均可用于本节,只是在計算系数 a_0, a_1, a_2 及 b_0, b_1, b_2 时令 $\theta_1 = 0, \Delta_1 = \Delta_0$.

根据前面同样的具体数据,我們算得以一年为周期的正弦变化温度应力的弹性解和蠕变解如下:

(i) 非綫性温度引起的应力:

弹性解

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin \omega t;$$

蠕变解

$$\sigma^*(t) = 0.555 \sin(\omega t + 13^\circ 50').$$

(ii) 上下游綫性温差引起的应力:

弹性解

$$X(t) = -8.03 \sin \omega t, \quad M(t) = -776 \sin \omega t;$$

蠕变解

$$X^*(t) = -3.59 \sin(\omega t + 20^\circ 30'),$$

$$M^*(t) = -486 \sin(\omega t + 11^\circ 40').$$

(iii) 均匀温度引起的应力:

弹性解

$$X(t) = -211 \sin \omega t, \quad M(t) = 648 \sin \omega t;$$

蠕变解

$$X^*(t) = -151.4 \sin(\omega t + 8^\circ 50'),$$

$$M^*(t) = 523 \sin(\omega t + 6^\circ 50').$$

比較弹性解与蠕变解, 可見蠕变使温度应力普遍降低, 降低幅度为 20% 至 45%.

附 录

在各种荷重作用下拱座弹性变形的算式.

在单位水平力 $X(t) = 1$ 作用下:

$$\Delta_x = \frac{r^3}{E_1 J} \left[\frac{\phi_0}{2} - \frac{3}{4} \sin 2\phi_0 + \phi_0 \cos^2 \phi_0 \right] + \frac{r}{2E_1 A} \left[\phi_0 + \frac{\sin 2\phi_0}{2} \right] +$$

$$+ \frac{1.25r}{2AG_1} \left[\phi_0 - \frac{\sin 2\phi_0}{2} \right],$$

$$\theta_x = \frac{r^2}{E_1 J} (\sin \phi_0 - \phi_0 \cos \phi_0).$$

在单位力矩 $M(t) = 1$ 作用下:

$$\Delta_m = \theta_x = \frac{r^2}{E_1 J} (\sin \phi_0 - \phi_0 \cos \phi_0), \quad \theta_m = \frac{r\phi_0}{E_1 J}.$$

在均布水压力 p 作用下:

$$\Delta p = \frac{pR_u r^3}{E_1 J} \left[-\phi_0 \cos^3 \phi_0 + \frac{3}{2} \sin \phi_0 \cos^2 \phi_0 - \frac{\phi_0 \cos \phi_0}{2} \right] +$$

$$+ \frac{pR_u r}{AE_1} \left[\sin \phi_0 - \frac{1}{2} \sin \phi_0 \cos^2 \phi_0 - \frac{\phi_0}{2} \cos \phi_0 \right] +$$

$$+ \frac{pR_u r}{AG_1} \cos \phi_0 \left[-\frac{\phi_0}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\phi_0 \right],$$

$$\theta_p = \frac{pR_u r^2}{E_1 J} \cos \phi_0 (-\sin \phi_0 + \phi_0 \cos \phi_0);$$

式中 R_u 为拱坝上游面半径; r 为拱中心半径; ϕ_0 为拱坝中心角之半; A 为拱截面面积; J 为拱截面之转动惯量.

参 考 文 献

- [1] Арутюнян, Н. Х., Некоторые вопросы теории ползучести, 1952.
- [2] Панарин, Н. Я., Некоторые вопросы расчета армированного и неармированного бетона с учетом ползучести бетона, 1957.
- [3] Арутюнян, Н. Х., Теория упругого напряженного состояния бетона с учетом ползучести, *ИММ*, т. XIII, вып. 6, 1949.
- [4] 朱伯芳, 拱坝温度应力分析, 水利学报, 1958, № 2.

REDISTRIBUTION OF STRESSES IN ARCH DAMS DUE TO CREEP OF CONCRETE

ZHU BO-FANG

(*Institute of Hydraulic Research*)

ABSTRACT

In this paper, the author offers a method to analyse an arch dam as a visco-elastic body. A system of Volterra integral equations is obtained and solved for static loads with temperature variations. Due to creep of concrete, the stresses vary with time. Under the hydrostatic pressure, the stresses at the abutment increase and the stresses at the crown decrease with time. The amplitude of stress variation is about 10% to 50%, as the ratio of modulus of elasticity of concrete to that of foundation varies from 1 to 8. The reduction of temperature stresses is about 20% to 45%.