第4卷 第1期
1960 年 1 月

力学学报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 4, No. 1
January, 1960

变系数系統的运动稳定性問題*

張 嗣 瀛
(东北工学院)

在文献[3,4]中，作者曾用形式如 $V = e^{\alpha(t)} \sum_s x_s^2$ 的 V-函数，討論了在时間的定区間上运动稳定性的問題，并得到稳定性的条件. 此文将进一步討論：上述方法，除可用以研究定区間上的稳定性問題外，还可用以研究在 Ляпунов 意义下的稳定性問題. 此外，在文献[3]中，实質上提出了一个确定 Ляпунов 示性数的下界的方法，此处又試将 Ляпунов 示性数加以某种程度的推广，而提出"示性函数"的概念.

§1. 变系数綫性系統

这种系統的受扰运动微分方程为

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)x_1 + \cdots + p_{sn}(t)x_n \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{1.1}$$

其中 $p_{sr}(t)$——时間的有界实連續函数. (1.1)的特征方程形式如下:

$$|p_{sr} - \delta_{sr}\kappa| = 0 \qquad \delta_{sr}\begin{cases} = 1 & \text{当 } s = r \\ = 0 & \text{当 } s \neq r. \end{cases} \tag{1.2}$$

我們先討論当(1.2)只有单根的情形. 設(1.2)有 m 个实根 $\kappa_j(t)$ $(j = 1, \cdots, m)$ 及 2σ 个复数根 $\lambda_i(t) \pm \mu_i(t)\sqrt{-1}$ $(i = m+1, \cdots, n-\sigma)$. 可以用一組形式如下的非异綫性变换将(1.1)化为正則形式:

$$y_s = a_{s1}(t)x_1 + \cdots + a_{sn}(t)x_n \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{1.3}$$

$$x_s = b_{s1}(t)y_1 + \cdots + b_{sn}(t)y_n \qquad (s = 1, \cdots, n). \tag{1.4}$$

其中 $a_{sr}(t)$, $b_{sr}(t)$ 以及 $a_{sr}(t)$的导数都是 t 的有界实連續函数. (1.1)化为如下形式(在有复数根的情形下，必須再作一次綫性变换，将复数部分除去之后，方能得到下面的形式):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_j}{dt} &= \kappa_j y_j + Q_j \qquad (j = 1, \cdots, m), \\ \frac{dy_i}{dt} &= \lambda_i y_i - \mu_i y_{\sigma+i} + Q_i, \\ \frac{dy_{\sigma+i}}{dt} &= \lambda_i y_{\sigma+i} + \mu_i y_i + Q_{\sigma+i} \quad (i = m+1, \cdots, n-\sigma), \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

此处 Q_s $(s = 1, \cdots, n)$ 是变量 y_s 的綫性組合，其系数都应該是已知的.

考慮函数[3,4]

$$V = e^{-\alpha(t)}(y_1^2 + \cdots + y_n^2), \tag{1.6}$$

其中 $\alpha(t)$ 是一个待定的未知函数，假定它是連續的并且是可微的. 根据(1.5)求函数 V 的

* 1959 年 9 月 18 日收到.

导数，得

$$\frac{dV}{dt}=e^{-\alpha(t)}\left\{\sum_{j=1}^{m}(2\kappa_j-\alpha')y_j^2+\sum_{i=m+1}^{n-\sigma}(2\lambda_i-\alpha')(y_i^2+y_{\sigma+i}^2)+\sum_{s=1}^{n}2y_sQ_s\right\}. \quad (1.7)$$

将大括号内的二次型用 H 来表示，并写成

$$H=\sum_{i,j=1}^{n}h_{ij}y_iy_j=\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}^{*}-\delta_{ij}\alpha')y_iy_j \qquad \begin{pmatrix}h_{ij}=h_{ji}\\ h_{ij}^{*}=h_{ji}^{*}\end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

設 ψ_k 是方程

$$|h_{ij}^{*}+\delta_{ij}\psi|=0 \quad (1.9)$$

的最小的那一个根。因为(1.8)可以化成标准形式：

$$H=(-\psi_1-\alpha')\xi_1^2+\cdots+(-\psi_n-\alpha')\xi_n^2,$$

其中 $\psi_1,\cdots,\psi_n$ 是(1.9)的根，所以条件

$$-\psi_k-\alpha'(t)\leqslant 0 \quad (1.10)$$

成立时，就应該有 $H\leqslant 0$，从而又有 $\frac{dV}{dt}\leqslant 0$，或

$$V\leqslant V_0. \quad (1.11)$$

由(1.10)式，得到

$$-\alpha(t)\leqslant\int\psi_k(t)\,dt+C.$$

于是根据此式，对于函数(1.6)可将关系式(1.11)换写成如下的形式：

$$\exp\left[\int\psi_k(t)\,dt/t\right](y_1^2+\cdots+y_n^2)\leqslant\exp\left[\int\psi_k(t)dt/t_0\right](y_{10}^2+\cdots+y_{n0}^2),$$

或者再写成

$$(y_1^2+\cdots+y_n^2)\leqslant(y_{10}^2+\cdots+y_{n0}^2)\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\psi_k(t)\,dt\right]. \quad (1.12)$$

至此我們就得到了一个討論稳定問題的基本关系式。由此关系式，不难得出如下的結論：如果积分

$$\int_{t_0}^{t}\psi_k(t)\,dt \quad (1.13)$$

对于任何 $t\geqslant t_0$ 都有一定的下界，則未受扰运动是稳定的（在 Ляпунов 意义下）；如果当 $t\to\infty$ 时，积分(1.13)趋于 $+\infty$，則未受扰运动还是漸近稳定的。

文献[2]中曾用积分的有界性討論过稳定問題。

如果(1.2)式有重根，則仍可用一般的方法，将(1.1)化为正則形式，然后作和上面类似的討論。

还可指出：用(1.12)式可以討論在文献[3]中所提出的定区間上的稳定問題，亦即給定 A,λ,t_0,T 四个数，若 $\sum_s y_{s0}^2\leqslant\lambda$，要求在定区間 $[t_0,T]$ 上，使 $\sum_s y_s^2\leqslant A$。如果使用(1.12)，則可討論在定区間 $[t_0,T]$ 上积分(1.13)的性質，据此选择系統的参数，以保証满足所提出的对于稳定性的要求。

下面是两个算例。

例 1　考慮系統[1]

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \left(-\frac{1}{2}+\varepsilon a\cos 2t\right)x_1+(1-\varepsilon a\sin 2t)x_2,\\
\frac{dx_2}{dt} &= (-1-\varepsilon a\sin 2t)x_1+\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon a\cos 2t\right)x_2
\end{aligned}\right\} \tag{1.14}
$$

(其中 ε 是参数). 它的特征方程的根为

$$\kappa = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{1-\varepsilon^2 a^2}$$

(此处設 $\varepsilon^2 a^2 < 1$). 于是,相应的綫性变换及反变换如下:

$$y_1 = \frac{\varepsilon a\cos 2t}{1-\varepsilon a\sin 2t}x_1 + x_2, \qquad y_2 = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2 a^2}}{1-\varepsilon a\sin 2t}x_1;$$

$$x_1 = \frac{1-\varepsilon a\sin 2t}{\sqrt{1-\varepsilon^2 a^2}}y_2, \qquad x_2 = y_1 + \frac{-\varepsilon a\cos 2t}{\sqrt{1-\varepsilon^2 a^2}}y_2.$$

利用它們可以将(1.14)式化为如下的形式:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= -\frac{1}{2}y_1 - \sqrt{1-\varepsilon^2 a^2}\,y_2 + \frac{2\varepsilon a(\varepsilon a-\sin 2t)}{\sqrt{1-\varepsilon^2 a^2}(1-\varepsilon a\sin 2t)}y_2,\\
\frac{dy_2}{dt} &= -\frac{1}{2}y_2 + \sqrt{1-\varepsilon^2 a^2}\,y_1 + \frac{2\varepsilon a\cos 2t}{1-\varepsilon a\sin 2t}y_2.
\end{aligned}\right\} \tag{1.15}
$$

在这种情形下,(1.9)式的形式如下:

$$
\begin{vmatrix}
-1+\psi & \dfrac{2\varepsilon a(\varepsilon a-\sin 2t)}{\sqrt{1-\varepsilon^2 a^2}(1-\varepsilon a\sin 2t)}\\
\dfrac{2\varepsilon a(\varepsilon a-\sin 2t)}{\sqrt{1-\varepsilon^2 a^2}(1-\varepsilon a\sin 2t)} & -1+\dfrac{4\varepsilon a\cos 2t}{1-\varepsilon a\sin 2t}+\psi
\end{vmatrix} = 0,
$$

它的根为

$$\psi = 1 - \frac{2\varepsilon a\cos 2t}{1-\varepsilon a\sin 2t} \pm \left|\frac{2\varepsilon a}{\sqrt{1-\varepsilon^2 a^2}}\right|.$$

于是我們討論下面的积分:

$$\int_{t_0}^{t}\left\{1-\frac{2\varepsilon a\cos 2t}{1-\varepsilon a\sin 2t}-\left|\frac{2\varepsilon a}{\sqrt{1-\varepsilon^2 a^2}}\right|\right\}dt.$$

因为

$$\varepsilon a\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2t}{1-\varepsilon a\sin 2t} = -\ln(1-\varepsilon a\sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

所以得到穩定条件如下:

$$1-\left|\frac{2\varepsilon a}{\sqrt{1-\varepsilon^2 a^2}}\right| \geqslant 0.$$

根据此式,参数 ε 应該滿足

$$|\varepsilon| \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}\,a} \doteq \frac{1}{2.236\,a}. \tag{1.16}$$

在[1]中, Н. Г. Четаев 用不同的方法所得到的結果是

$$|\varepsilon| \leqslant \frac{1}{2a}.$$

例 2　考慮系統[1)]

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + (-1+\mu\sin t)x_2,\\
\frac{dx_2}{dt} &= x_1
\end{aligned}\right\} \tag{1.17}
$$

(其中 μ 是参数). 其特征方程的根为

$$
\kappa = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3-4\mu\sin t}
$$

(此处設 $3-4\mu\sin t > 0$).

于是我們应該用下面的綫性变换和反变换:

$$
y_1 = \frac{-1}{2(-1+\mu\sin t)}x_1 + x_2,\quad y_2 = \frac{\sqrt{3-4\mu\sin t}}{2(-1+\mu\sin t)}x_1;
$$

$$
x_1 = \frac{2(-1+\mu\sin t)}{\sqrt{3-4\mu\sin t}}y_2,\quad x_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{3-4\mu\sin t}}y_2.
$$

由这些綫性变换得到(1.17)的正則形式:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= -\frac{1}{2}y_1 - \frac{\sqrt{3-4\mu\sin t}}{2}y_2 + \frac{\mu\cos t}{(-1+\mu\sin t)\sqrt{3-4\mu\sin t}}y_2,\\
\frac{dy_2}{dt} &= -\frac{1}{2}y_2 + \frac{\sqrt{3-4\mu\sin t}}{2}y_1 + \left(\frac{-2\mu\cos t}{3-4\mu\sin t} - \frac{\mu\cos t}{(-1+\mu\sin t)}\right)y_2.
\end{aligned}\right\} \tag{1.18}
$$

在以上的条件下,(1.9)式为

$$
\begin{vmatrix}
-1+\psi & \dfrac{\mu\cos t}{(-1+\mu\sin t)\sqrt{3-4\mu\sin t}}\\
\dfrac{\mu\cos t}{(-1+\mu\sin t)\sqrt{3-4\mu\sin t}} & -1+2\left(\dfrac{-2\mu\cos t}{3-4\mu\sin t} - \dfrac{\mu\cos t}{-1+\mu\sin t}\right)+\psi
\end{vmatrix} = 0,
$$

由此得到

$$
\psi = \left[1 - \left(\frac{-2\mu\cos t}{3-4\mu\sin t} - \frac{\mu\cos t}{-1+\mu\sin t}\right)\right] \pm \left|\frac{2\mu\cos t}{3-4\mu\sin t}\right|.
$$

根据此式,我們进行积分(1.13)的計算:因为有

$$
\int_0^{2\pi}\frac{2\mu\cos t}{3-4\mu\sin t}\,dt = -\frac{1}{2}\ln(3-4\mu\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 0,
$$

$$
\int_0^{2\pi}\frac{\mu\cos t}{-1+\mu\sin t}\,dt = \ln(-1+\mu\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 0,
$$

所以根据上面的理論,只要

$$
\int_0^{2\pi}\left\{+1 - \left|\frac{2\mu\cos t}{3-4\mu\sin t}\right|\right\}dt > 0,
$$

則未受扰运动就将是漸近稳定的;但是

---

1) 此例見 Б. С. Разумихин 的博士論文. 在該文中,这一例題前的理論部分在文献 [2] 中已发表.

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{2\mu\cos t}{3-4\mu\sin t}\right|dt = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\frac{2\mu\cos t}{3-4\mu\sin t}\right| = \ln\frac{3-4\mu}{3+4\mu},$$

所以稳定条件为

$$\ln\frac{3-4\mu}{3+4\mu} < 2\pi.$$

如果选择参数 μ，使

$$|\mu| < \frac{3}{4}, \tag{1.19}$$

則就能滿足上面的稳定条件.

Б. С. Разумихин 在使用"最优二次型"后，得到漸近稳定条件为

$$|\mu| < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

§2. 非 綫 性 系 統

这种系統的受扰运动方程为

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)x_1 + \cdots + p_{sn}(t)x_n + X_s \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{2.1}$$

其中 $X_s = X_s(t, x_1, \cdots, x_n)$ 是变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的解析函数. 在其展式中的項不低于二阶. 同时，这些項的系数是 t 的有界实連續函数.

如果(2.1)的第一近似方程［亦即綫性方程(1.1)］的特征方程的根和上节所討論的情形一样，則可用上节的綫性变换(1.3)，(1.4)将(2.1)化为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_j}{dt} = \kappa_j y_j + Q_j + Y_j \qquad (j = 1, \cdots, m),\\
&\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i - \mu_i y_{\sigma+i} + Q_i + Y_i,\\
&\frac{dy_{\sigma+i}}{dt} = \lambda_i y_{\sigma+i} + \mu_i y_i + Q_{\sigma+i} + Y_{\sigma+i} \qquad (i = m+1, \cdots, n-\sigma),
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

此处 $Y_s = a_{s1}X_1 + \cdots + a_{sn}X_n \quad (s = 1, \cdots, n)$，$Q_s$ 仍如同上节.

如果我們的討論只限制在下面的区域内：

$$t \geqslant t_0,\ |x_s| \leqslant h \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{2.3}$$

(其中 h——充分小的数)，于是，由于 h 充分小，当对于(2.2)求函数(1.6)的导数 $\frac{dV}{dt}$ 时，$\frac{dV}{dt}$ 的符号就不会受含 Y_s 的項所影响，而仍旧完全可以由二次型 H(1.8)的符号所确定. 因而，在条件(2.3)下，§1 中的結論对于非綫性系統仍然有效.

§3. "示 性 函 数"

在研究变系数系統的稳定問題时，А. М. Ляпунов 曾提出关于函数的"示性数"的概念[1]. 借助于示性数，可以在一定程度上判断函数随时間的消长性质. 但是，用这种办法判断函数的消长性质有时是很粗略的. 例如，对于指数多項式：

$$a_1 t^{m_1} + a_2 t^{m_2} + \cdots + a_n t^{m_n}$$

(其中 a_s——常数，n——一定的数，m_s——整数或分数)，不論 m_s 为正或为負，多項式的示性数都为零．因而据此不能得出函数消长的結論．但若 m_s 为正数，当 $t \to \infty$ 时，多項式是无界的；m_s 为負数时，多項式又随 $t \to \infty$ 而是消逝的．

用示性数来判断 Ляпунов 意义下的稳定問題，归結为确定系統的解的最小示性数的正負符号，当为正时，則漸近稳定，为負时，則不稳定．但当示性数为零时，則根据上述理由，不能得到关于稳定性的結論．

因此，可以預見：如果用"使示性数为正"的条件来建立稳定判据，則所得到的結果一定过于严苛．

此处，試在某种程度上推广示性数的概念，提出"示性函数"的概念，并在此基础上討論变系数系統的运动稳定性問題．

考虑实变数 t 的正(或負)函数[1] $x(t)$．設这一函数是有界的，并且是可微的，于是对于这样的 $x(t)$ 总存在另外一个函数 $\lambda(t)$，它由

$$\lambda(t) = -\frac{d}{dt}\ln x(t)$$

或者

$$\lambda(t) = -\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} \tag{3.1}$$

来确定．根据此式，我們有

$$x \exp\left[\int_{t_0}^{t} \lambda(t)\,dt\right] = x_0. \tag{3.2}$$

由此可見，对于任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\left.\begin{aligned} &x \exp\left[\int_{t_0}^{t} (\lambda(t) + \varepsilon)\,dt\right] = x_0 e^{\varepsilon t} \to \infty \qquad (\text{当 } t \to \infty),\\ &x \exp\left[\int_{t_0}^{t} (\lambda(t) - \varepsilon)\,dt\right] = x_0 e^{-\varepsilon t} \to 0 \qquad (\text{当 } t \to \infty). \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

函数 $\lambda(t)$ 的这种性质，非常类似于 Ляпунов 的示性数，我們試称 $\lambda(t)$ 是 $x(t)$ 的"示性函数"．(3.1)式就是示性函数的結构性的定义．

根据 $\lambda(t)$，可以判断函数 $x(t)$ 的消长性质．事实上，可将(3.2)式写成

$$x = x_0 \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \lambda(t)\,dt\right]. \tag{3.4}$$

由此可以推知：

1）　如果积分 $\int_{t_0}^{t} \lambda(t)\,dt$ 随着 t 的无限增大而趋于 $+\infty$，則 $x(t)$ 是消逝的；

2）　如果积分 $\int_{t_0}^{t} \lambda(t)\,dt$ 随着 t 的无限增大而趋于 $-\infty$，則 $x(t)$ 是无界的[2]；

---

1) 看来，此处加于 $x(t)$ 的条件似乎过于局限；但是，正是这种函数（例如 $\sum_s x_s^2$，恆正及恆負二次型等），在研究稳定問題中起着重要作用．

2) 1)，2) 两点原有不妥之处，蒙秦元勋、王慕秋两同志指出，得以修正，作者謹此致謝．

3) 如果对于任何 $t \geqslant t_0$, 积分

$$\int_{t_0}^{t} \lambda(t)\, dt$$

有一个下界,則 $x(t)$是有界的. 例如

1) $x(t) = t^3 \quad (t > 0)$,

根据(3.1)式,我們有

$$\lambda(t) = -\frac{1}{t^3} 3t^2 = -\frac{3}{t},$$

因而

$$\int_{t_0}^{t} \lambda(t)\, dt = -3 \ln \frac{t}{t_0}.$$

2) $x(t) = t^{-3} \quad (t > 0)$,

$$\lambda(t) = \frac{3}{t}, \qquad \int_{t_0}^{t} \lambda(t)\, dt = 3 \ln \frac{t}{t_0};$$

3) $x(t) = 2 + \sin t$,

$$\lambda(t) = -\frac{\cos t}{2 + \sin t},$$

$$\int \lambda(t)\, dt = \int -\frac{\cos t}{2 + \sin t} = -\ln(2 + \sin t),$$

由此可見,对于任何 $t > 0$, 我們有

$$0 \geqslant \int_{t_0}^{t} \lambda(t)\, dt \geqslant -\ln 3,$$

亦即积分存在一个下界, 所以 $x(t) = 2 + \sin t$ 是有界的. 但是上面三个例題中的函数,其示性数均为零.

由以上的討論及例題可見: 示性函数可以揭示出用示性数判断不出来的函数的消长性質.

§4. 用示性函数的概念討論稳定性問題

現在用上节提出的概念研究变系数系統的稳定性問題.

可以指出:在§1中所用的方法,实質上就是提出了寻求函数$(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$的示性函数 $\lambda(t)$的下界的一个方法. 此点論証如下:

在§1中,我們对于 V-函数(1.6),曾經得到关系式(1.12). 今証明:(1.12)式中的 $\psi_k(t)$就是函数 $\sum_s y_s^2$ 的示性函数 $\lambda(t)$的下界,亦即

$$\psi_k(t) \leqslant \lambda(t). \tag{4.1}$$

我們假設(4.1)是不正确的,于是应該有

$$\psi_k(t) > \lambda(t),$$

或者写成

$$\psi_k(t) = \lambda(t) + \delta(t) \qquad [\delta(t) > 0].$$

将此式代入(1.12),得到

$$\left(\sum_s y_s^2\right) \exp\left[\int_{t_0}^{t} (\lambda(t) + \delta(t))\, dt\right] \leqslant \left(\sum_s y_{s0}^2\right).$$

引入一个任意的 $\varepsilon>0$，根据上式可得到

$$\left(\sum_s y_s^2\right)\exp\left[\int_{t_0}^t(\lambda(t)+\varepsilon)\,dt\right]\leqslant\left(\sum_s y_{s_0}^2\right)\exp\left[\int_{t_0}^t(\varepsilon-\delta(t))\,dt\right].$$

因为 $\varepsilon>0$ 是任意的，故可以这样选取 ε：使 $\varepsilon<\delta(t)$，于是 $\varepsilon-\delta(t)$ 就是一个負数；因而根据上式推得

$$\left(\sum_s y_s^2\right)\exp\left[\int_{t_0}^t(\lambda(t)+\varepsilon)\,dt\right]\to 0\qquad(\text{当 } t\to\infty),$$

但这是不可能的．因为既然 $\lambda(t)$ 是 $\left(\sum_s y_s^2\right)$ 的示性函数，則它必須有(3.3)式所表示的性質．但这与(3.3)式相矛盾．

这样，就証明了(4.1)式的成立．

由 § 1 的算例表明，用这种方法可以得到質量相当好的稳定判据．

自然会引起一个問題，即：可否进一步改进稳定判据的質量．例如，对于方程組(1.1)，可以代替函数(1.6)而采用如下的更普遍形式的函数：

$$V=e^{c(t)}\sum_{s,r}a_{sr}x_sx_r,\tag{4.2}$$

其中 $\sum_{s,r}a_{sr}x_sx_r$ 是一個正二次型；a_{sr} 是未定的，可以用常数，也可以用时間的函数．如果用 § 1 的方法进行討論，对于函数(4.2)，可以得到类似于(1.12)的关系式．显然，由(4.2)式出发所得到的稳定判据的質量，应該与二次型的結构（亦即系数 a_{sr}）相关．但是，如何建立这个二次型，此与 Ляпунов 的直接方法中如何建立 Ляпунов 函数应該是同一性質的問題．

参　考　文　献

[1] Н. Г., Четаев, Устойчивость движения, ГИТТЛ, 1955.

[2] Разумихин, Б. С., Оценки решений системы дифференциальных уравнений возмущенного движения с переменными коэффициентами, *ПММ* **XXI**, вып. 1, 1957 г.

[3] Чжан Сы-ин (张嗣瀛), Об устойчивости движения на конечном интервале времени, *ПММ* **XXIII**, вып. 2, 1959 г.

[4] Чжан Сы-ин (张嗣瀛), Об оценках решений систем дифференциальных уравнений, накоплении возмущения и устойчивости движения на конечном интервале времени, *ПММ* **XXIII**, вып. 4, 1959 г.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Чжан Сы-ин

(*Северо-восточный политехнический институт*)

Резюме

При помощи функций вида $V = e^{\alpha(t)} \sum_s X_s^2$, примененных в работах[3,4] для решения задачи об устойчивости движения на конечном интервале времени, можно разрешить задачу устойчивости движения в смысле Ляпунова.

Вывод об устойчивости заключается в том, что если интеграл (1.13) имеет определенный нижний предел для всяких $t \geqslant t_0$, то невозмущенное движение устойчиво; если при $t \to \infty$ интеграл (1.13) стремится к $+\infty$, то невозмущенное движения ассимптотически устойчиво.

В работе ещё попытается в известной мере обобщить понятие о характеристичном числе Ляпунова и представлено понятие о "характеристичной функций".