

高楼刚构分析的矩陣法^{*}

吕子華

(南京建筑工程学校)

提 要

根据本文提出的矩陣法,可将无侧移高层刚构的分析轉化为雅柯比矩陣的計算。繼而將雅柯比矩陣变为对角矩陣和附对角矩陣,而以之作为运算符。对于有侧移的高层刚构,則于事前將各层的相对侧移量設法消去,然后象处理无侧移高层刚构一样的进行矩陣运算。

一、引 言

高楼刚构分析是一个高度复杂的超靜定問題。在解决这个問題时,应用現代一般极为流行的分析方法,諸如力法、形变法^[1]、弯矩分配法^[1]、形变分配法^[1]和不均衡力矩传播法^[6]等等,都免不了需要解算大量联立方程和大量数字計算的繁瑣工作,以致在高层刚构的实际計算中,人們至今仍然不得不优先采用各式各样的近似方法,这原是无可非議的。

1954年初,軍事工程学院陈百屏教授和清华大学金涛教授曾經作过应用矩陣理論分析高层刚构的初步尝试^[7],但以陈、金二氏論文中存在着若干問題,实际应用上有着很大的局限性,因而当时似未受到人們应有的注意。最近,苏联薩伊凱維奇教授对高层刚构的矩陣分析作了比較深入的研究^[2],得到了比較成功的結果。但薩氏方法的基本概念頗为迂迴,計算步骤亦嫌不够簡明直覺,一般实际工作者仍恐未必乐于采用。

根据本文提出的矩陣法,可将无侧移高层刚构的分析轉化为雅柯比矩陣的計算,繼而根据具体問題的特性,进一步將雅柯比矩陣变为对角矩陣和附对角矩陣。利用这些特殊矩陣作为运算符,可以避免大量的数字計算工作。对于有侧移的高层刚构,則根据文献[8]提出的概念,將各层的相对侧移量設法消去,然后象处理无侧移高层刚构一样进行連鎖的矩陣运算,不需要任何修正。

二、形变法的平衡方程

我們知道,应用众所週知的形变法計算如图1所示的高层刚构时,通常可以写出两类平衡方程。第一类是以每一結点的靜力平衡条件为根据的“結点平衡方程”,第二类是以每一层間的靜力平衡条件为根据的“层間平衡方程”。如果沿用一般建筑力学教程中通常采用的記号习惯,我們即可將这两类平衡方程写出如下¹⁾:

^{*} 1959年4月11日收到。

1) 这两类平衡方程在一般极为流行的建筑力学教程中均可找到,例如参考文献[1], 328—333頁。

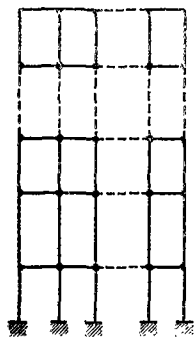


图 1

结点平衡方程

$$2\theta_a \sum_j i_{aj} + \sum_j i_{aj} \theta_j - 3 \sum_j \frac{i_{aj} \delta_{aj}}{l_{aj}} + \frac{1}{2} M_a = 0, \quad (1)$$

层间平衡方程

$$\sum_k \frac{i_m}{h_m} (\theta_m + \theta_{m-1}) - 2 \sum_k \frac{i_m}{h_m^2} \delta_m + \frac{1}{6} (P_m + Q_m^0) = 0. \quad (2)$$

式中总和 $\sum_j$ 必须遍及与结点 a 相刚结的所有桿件；而总和 $\sum_k$ 则须遍及同层所有豎柱； h_m ——第 m 层的豎柱高度； M_a ——结点 a 的不均衡力矩； P_m ——第 m 层以上全部载荷的水平投影； Q_m^0 ——第 m 层所有豎柱因直接载荷而生的端剪力之和。

必须指出，方程(1)和(2)系根据各桿两端均为刚结的情形所导出，若桿端为铰结，则该二式中有关的刚度系数和载荷项，应按一般方法分别予以修正^[1]。

三、无侧移高层刚构的矩阵分析

由于篇幅所限，本文不准备介绍关于一般式高层刚构的研究，而以实用上比较普遍的对称形式作为主题，并且对于各桿的刚度系数提出下列两项规定。

1. 同层豎柱的刚度系数相同，但异层豎柱的刚度系数可以不同；

2. 同层横梁的刚度系数相同，但异层横梁的刚度系数可以不同。

必须指出，对高层刚构的形式作出上项限制，纯粹是为了节省篇幅和行文方便，并非理论上所必需，因而它无碍于本文所提方法的一般性。

(一) 矩阵角变方程 在进行分析如图 2 所示的多跨高层刚构时，为了明确表示一个结点角变的位置，我们在角变 θ 的右下角附加两个指标，第一个指标表明结点所在的层数(由下而上)，第二个指标表明该层由左向右的结点号数。例如，第 m 层第 k 个结点的角变可以记作 θ_{mk} 。至于横梁和豎柱的刚度系数，则分别用记号 i_{bm} 和 i_{cm} 表示，其右下角的第一个字母表示梁或柱，第二个字母表示该梁或柱所在的层数。

按照上述记号，若将式(1)应用于图 2 所示无侧移刚构($\delta = 0$)第 m 层的所有结点，即得该层 k 个结点的平衡方程。在这组方程中，必然包含有上下相邻三层的全部结点角变。如果从中解出第 $(m-1)$ 层的结点角变，则得¹⁾

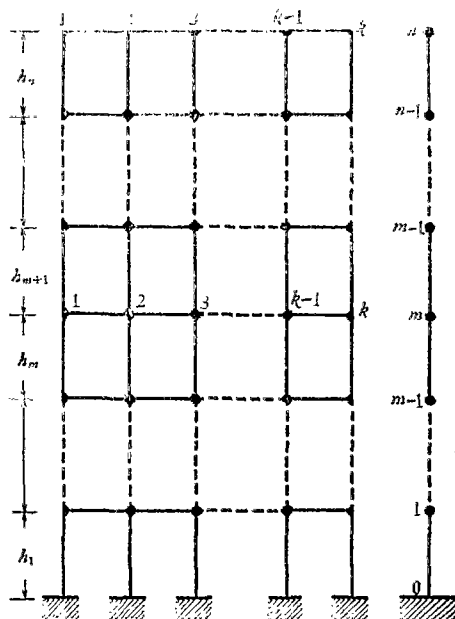


图 2

1) 以结点角变作为初参数的概念，系由天津大学孟昭礼教授首次提出，哈尔滨工业大学王光远同志在文献[8]中作了进一步的发展。

$$\left. \begin{aligned} \theta_{(m-1)1} &= - \left[\frac{i_{C(m+1)}}{i_{Cm}} \theta_{(m+1)1} + \frac{2 \sum i_{m1}}{i_{Cm}} \theta_{m1} + \frac{i_{Bm}}{i_{Cm}} \theta_{m2} + \frac{M_{m1}}{2i_{Cm}} \right], \\ \theta_{(m-1)2} &= - \left[\frac{i_{C(m+1)}}{i_{Cm}} \theta_{(m+1)2} + \frac{i_{Bm}}{i_{Cm}} \theta_{m1} + \frac{2 \sum i_{m2}}{i_{Cm}} \theta_{m2} + \frac{i_{Bm}}{i_{Cm}} \theta_{m3} + \frac{M_{m2}}{2i_{Cm}} \right], \\ \theta_{(m-1)3} &= - \left[\frac{i_{C(m+1)}}{i_{Cm}} \theta_{(m+1)3} + \frac{i_{Bm}}{i_{Cm}} \theta_{m2} + \frac{2 \sum i_{m3}}{i_{Cm}} \theta_{m3} + \frac{i_{Bm}}{i_{Cm}} \theta_{m4} + \frac{M_{m3}}{2i_{Cm}} \right], \\ &\dots\dots\dots \\ \theta_{(m-1)k} &= - \left[\frac{i_{C(m+1)}}{i_{Cm}} \theta_{(m+1)k} + \frac{i_{Bm}}{i_{Cm}} \theta_{m(k-1)} + \frac{2 \sum i_{mk}}{i_{Cm}} \theta_{mk} + \frac{M_{mk}}{2i_{Cm}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

式中 $\sum i_{mj}$ 为第 m 层第 j 个结点所含杆件的刚度系数之和; M_{mj} 为第 m 层第 j 个结点的不均衡力矩。

根据矩阵理论^[3], 我们不难把方程组(a)写作如下的矩阵形式:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \theta_{(m-1)1} \\ \theta_{(m-1)2} \\ \theta_{(m-1)3} \\ \vdots \\ \theta_{(m-1)k} \end{vmatrix} &= - \frac{i_{C(m+1)}}{i_{Cm}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_{(m+1)1} \\ \theta_{(m+1)2} \\ \theta_{(m+1)3} \\ \vdots \\ \theta_{(m+1)k} \end{vmatrix} \\ &- \frac{1}{i_{Cm}} \begin{vmatrix} 2 \sum i_{m1}, i_{Bm}, & 0 & 0 & \dots & 0 \\ i_{Bm}, & 2 \sum i_{m2}, i_{Bm}, & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i_{Bm}, & 2 \sum i_{m3}, & i_{Bm} & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & i_{Bm}, 2 \sum i_{mk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_{m1} \\ \theta_{m2} \\ \theta_{m3} \\ \vdots \\ \theta_{mk} \end{vmatrix} - \frac{1}{2i_{Cm}} \begin{vmatrix} M_{m1} \\ M_{m2} \\ M_{m3} \\ \vdots \\ M_{mk} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

如果将高层刚构看作一个悬臂, 而将每一层横梁比拟作一个结点(图 2), 并称之为矩阵结点, 则下列形式的行向量

$$\Psi_m = \begin{vmatrix} \theta_{m1} \\ \theta_{m2} \\ \vdots \\ \theta_{mk} \end{vmatrix}; \Psi_{m-1} = \begin{vmatrix} \theta_{(m-1)1} \\ \theta_{(m-1)2} \\ \vdots \\ \theta_{(m-1)k} \end{vmatrix}; \dots\dots\dots; \Psi_1 = \begin{vmatrix} \theta_{1,1} \\ \theta_{1,2} \\ \vdots \\ \theta_{1,k} \end{vmatrix} \quad (4)$$

可以叫做矩阵结点角变, 或简称矩阵角变。于是方程(3)可以写为

$$\Psi_{m-1} = - \frac{i_{C(m+1)}}{i_{Cm}} E_{(k)} \Psi_{m+1} - \mathcal{A}_m \Psi_m - \frac{1}{2i_{Cm}} \|M_i\|_m^k. \quad (5)$$

上式中的 $E_{(k)}$ 为一 k 阶单位矩阵。 $\|M_i\|_m^k$ 表示元素为第 m 层结点不均衡力矩的 k 阶行

向量,它可以简称为矩陣不均衡力矩. $\mathcal{A}$ 表示一个 k 阶雅柯比矩陣,它具有下列形式:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha_2 & \beta & \cdots & 0 \\ 0 & \beta & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha_k \end{pmatrix}. \quad (\text{b})$$

雅柯比矩陣(b)中的元素全由各杆的刚度系数所組成,因而它可以称为雅柯比刚度矩陣.

式(5)就是本文所称的矩陣角变方程. 不难理解,应用这种方程分析无侧移高层刚构时,必須按照下列程序来进行:先将顶层的矩陣角变 Ψ_n 当作已知的初参数,繼而根据方程(5)经过連鎖式的矩陣运算,可以依次求得第 $n-1$, 第 $n-2$, $\cdots$, 直至底层的矩陣角变 Ψ_{n-1} , Ψ_{n-2} , $\cdots$, Ψ_0 . 然后根据底层柱脚的边界条件(見后第三段),即可求得顶层的矩陣角变 Ψ_n , 从而可以立即算出原来刚构的全部結点角变.

(二)雅柯比刚度矩陣的割換 由矩陣角变方程(5)不难看出,根据前段所述的程序进行无侧移高层刚构的内力分析时,必然要遇到一系列同型雅柯比矩陣的运算問題,而这一运算工作可能是相当繁瑣颇为不便的. 为了避免运用上的这一困难,我們可以根据矩陣理論將公式(b)型的雅柯比矩陣改写成下列形式:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_k \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{c})$$

上式右端的第一項是一个 k 阶对角矩陣,如果采用克氏(Кронекер)記号,它可以記作^[4]

$$\|\alpha_i \delta_{ij}\|^k, \text{ 其中 } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}. \quad (6)$$

右端的第二、第三两个矩陣,在构造上有着显明的特点. 一个是:右隣附对角綫上的元素都等于1,而所有其余的元素均等于零. 另一个是:左隣附对角綫上的元素为1,而其余的元素均等于零. 为行文方便計,我們將前者称为右隣附对角矩陣,后者称为左隣附对角矩陣. 若用 F 和 H 分别表示这两个矩陣,則有

$$F_{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, H_{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}; \quad (7)$$

其中右下角的 k 系表示矩阵的阶。非常明显, 矩阵 F 与 H 是互为转置矩阵的。于是(c)型的雅柯比矩阵可以写为

$$A = \|\alpha_i \delta_{ij}\|^k + \beta(F_{(k)} + H_{(k)}), \quad (d)$$

而矩阵角变方程等于

$$\Psi_{m-1} = -\frac{i_{C(m+1)}}{i_{Cm}} E_{(k)} \Psi_{m+1} - \left\{ \|\alpha_i \delta_{ij}\|_m^k + \frac{i_{Bm}}{i_{Cm}} (F_{(k)} + H_{(k)}) \right\} \Psi_m - \frac{\|M_j\|_m^k}{2i_{Cm}}. \quad (8)$$

根据矩阵相乘的定义, 关于对角矩阵和附对角矩阵的作用, 我们可以写出下列三个法则:

法则 I 用对角矩阵左乘(或右乘)任一同型矩阵 A 时, 等于将矩阵 A 中的各列(或各行)的元素分别乘以对角矩阵的相应元素。

法则 II 用右邻附对角矩阵 F 左乘(或右乘)任一同型矩阵 A 时, 等于将矩阵 A 的元素整体地向上(或向右)平行移动一列(或一行); 因此项平移而被挤出矩阵记号之外的第一列(或最右一行)元素消失了, 而最下一列(或第一行)元素空下的位置则用零代替。

法则 III 用左邻附对角矩阵 H 左乘(或右乘)任一同型矩阵 A 时, 等于将矩阵 A 的元素整体地向下(或向左)平行移动一列(或一行); 因此项平移而被挤出矩阵记号之外的最后一列(或第一行)元素消失了, 而第一列(或最后一行)元素空下的位置则用零代替。

往后即将看到, 利用对角矩阵和附对角矩阵的上述特性, 将使我们在无侧移高层刚构分析的过程中, 免去大量的数字运算。特别是附对角矩阵的作用, 如同一个普通的运算符一般。

(三)边界条件 如前所述, 通过矩阵角变方程可以求出底层柱脚的矩阵角变与顶层矩阵角变的线性关系。显然, 这样求出的矩阵角变关系必须符合柱脚的支承条件。目前一般应用的柱脚支承情况有铰支和固定的两种, 对于这样的支承情况, 其边界条件为

1) 固定柱脚:

$$\Psi_0 = 0, \quad (9)$$

2) 铰支柱脚:

$$\Psi_0 = -\frac{1}{2} \Psi_1; \quad (10)$$

其中 Ψ_0 与 Ψ_1 分别表示底层柱脚与底层横梁的矩阵角变。

四、无侧移高楼刚构的计算实例

设有一座三间五层的对称刚构, 受有如图 3 所示的对称载荷。假定所有杆件的刚度系数全为 1, 其余的几何尺寸则如图所示。由于结构形式与载荷全系对称, 因而以下的计算只限在半个刚构中进行。

1. 各结点由图示载荷作用而生的不平衡力矩载于表 1。

表 1

结 点	结 点 1	结 点 2
层 数	吨 米	吨 米
第 五 层	-6.4	6.4
第 四 层	-4.0	-4.0
第 三 层	-4.0	-4.0
第 二 层	-8.0	-4.8
第 一 层	-8.0	-4.8

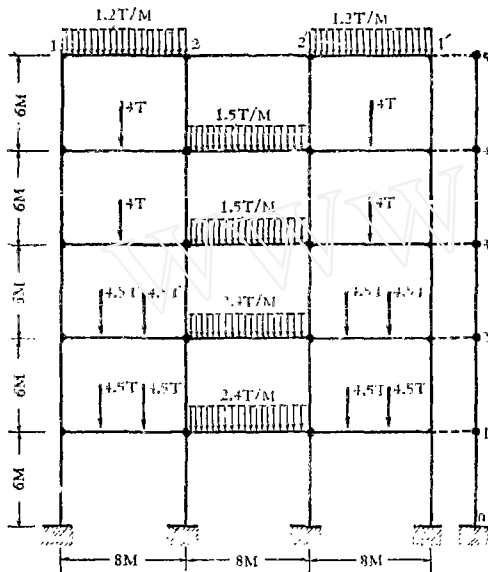


图 3

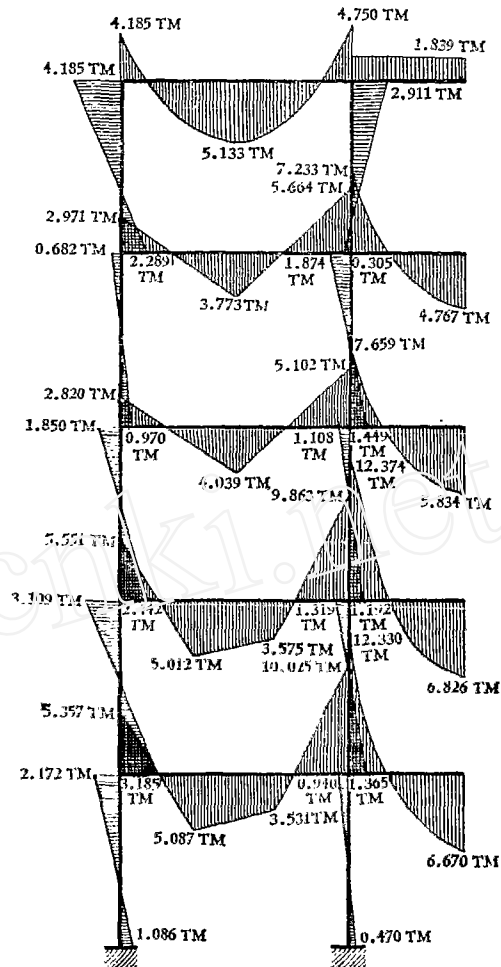


图 4

2. 根据公式(4),各层的未知矩陣角变为

$$\Psi_5 = \begin{Bmatrix} \theta_{5,1} \\ \theta_{5,2} \end{Bmatrix}; \quad \Psi_4 = \begin{Bmatrix} \theta_{4,1} \\ \theta_{4,2} \end{Bmatrix}; \quad \dots; \quad \Psi_1 = \begin{Bmatrix} \theta_{1,1} \\ \theta_{1,2} \end{Bmatrix}.$$

3. 根据方程(8)以及上文所述的三个法则,即可求得各层矩陣角变与顶层矩陣角变的关系如下:

$$\Psi_4 = - \begin{Bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{Bmatrix} \Psi_5 - \begin{Bmatrix} -3.2 \\ 3.2 \end{Bmatrix};$$

$$\Psi_3 = -E\Psi_5 - \left(\begin{Bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{Bmatrix} + F+H \right) \Psi_4 - \begin{Bmatrix} -2.0 \\ -2.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24 & 11 \\ 11 & 35 \end{Bmatrix} \Psi_5 + \begin{Bmatrix} -14.0 \\ 21.2 \end{Bmatrix};$$

$$\Psi_2 = -E\Psi_4 - \left(\begin{Bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{Bmatrix} + F+H \right) \Psi_3 - \begin{Bmatrix} -2.0 \\ -2.0 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 151 & 100 \\ 100 & 251 \end{Bmatrix} \Psi_5 - \begin{Bmatrix} -61.6 \\ 129.2 \end{Bmatrix};$$

$$\Psi_1 = -E\Psi_3 - \left(\begin{Bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{Bmatrix} + F+H \right) \Psi_2 - \begin{Bmatrix} -4.0 \\ -2.4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 982 & 840 \\ 840 & 1822 \end{Bmatrix} \Psi_5 + \begin{Bmatrix} -222.4 \\ 824.0 \end{Bmatrix};$$

$$\Psi_0 = -E\Psi_2 - \left(\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + F + H \right) \Psi_1 - \begin{bmatrix} -4.0 \\ -2.4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 6581 & 6762 \\ 6762 & 13343 \end{bmatrix} \Psi_5 - \begin{bmatrix} -452.8 \\ 5414.0 \end{bmatrix}.$$

4. 利用边界条件 $\Psi_0 = 0$ 可得

$$\left. \begin{aligned} 6581\theta_{5,1} + 6762\theta_{5,2} - 452.8 &= 0, \\ 6762\theta_{5,1} + 13343\theta_{5,2} + 5414.0 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

解此二元联立方程, 即得

$$\theta_{5,1} = 1.013438, \quad \theta_{5,2} = -0.919349.$$

既知顶层的结点角变, 则由第(3)段列出的矩阵角变关系不难算得全部结点角变之值如表 2 所示.

表 2

Ψ_6	$\theta_{6,1}$	1.013438	Ψ_4	$\theta_{4,1}$	0.065597	Ψ_3	$\theta_{3,1}$	0.209673	Ψ_2	$\theta_{2,1}$	0.505762	Ψ_1	$\theta_{1,1}$	0.542956
	$\theta_{6,2}$	-0.919349		$\theta_{4,2}$	0.383307		$\theta_{3,2}$	0.170603		$\theta_{2,2}$	0.212799		$\theta_{1,2}$	0.234015
	$\theta'_{6,2}$	0.919349		$\theta'_{4,2}$	-0.383307		$\theta'_{3,2}$	-0.170505		$\theta'_{2,2}$	-0.212799		$\theta'_{1,2}$	-0.234015
	$\theta'_{6,1}$	-1.013438		$\theta'_{4,1}$	-0.065597		$\theta'_{3,1}$	-0.209673		$\theta'_{2,1}$	-0.505762		$\theta'_{1,1}$	-0.542956

根据求出的结点角变之值, 利用熟知的角变位移公式算得各杆端力矩, 从而绘出刚构的弯矩图如图 4 所示.

五、有侧移高楼刚构的矩阵分析

(一) 矩阵角变方程 我们知道, 在一般性载荷作用下, 图 5 所示的高层刚构必将发生一定量的侧移. 如果略去各杆的轴向伸缩, 此项独立侧移数则和刚构的层数相等. 若将方程(1)应用于刚构第 m 层 (图 4) 的所有结点, 并注意到同层竖柱的相对侧移均相同, 即

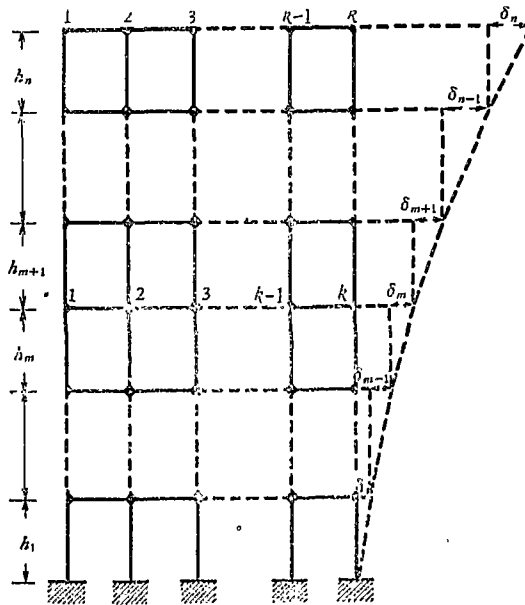


图 5

得該层 k 个結点的平衡方程。从这組方程中解出第 $m-1$ 层的結点角变,并从中消去上下相隣两层的相对側移量^[8],乃有

$$\begin{aligned}
 \theta_{(m-1)1} &= \frac{(3-2k)\Sigma i_{m1} + 6i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{m1} + \frac{3\Sigma i_{m2} + (12-k)i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{m2} + \\
 &+ \frac{3\Sigma i_{m3} + 12i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{m3} + \dots + \frac{3\Sigma i_{mk} + 6i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{mk} - \\
 &- \frac{i_{C(m+1)}}{i_{Cm}} \theta_{(m+1)1} + \frac{3\Sigma M_m - kM_{m1} - (h_m P_m + h_{m+1} P_{m+1})}{2ki_{Cm}}, \\
 \theta_{(m-1)2} &= \frac{3\Sigma i_{m1} + (6-k)i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{m1} + \frac{(3-2k)\Sigma i_{m2} + 12i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{m2} + \\
 &+ \frac{3\Sigma i_{m3} + (12-k)i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{m3} + \frac{3\Sigma i_{m4} + 12i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{m4} + \dots + \\
 &+ \frac{3\Sigma i_{mk} + 6i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{mk} - \frac{i_{C(m+1)}}{i_{Cm}} \theta_{(m+1)2} + \\
 &+ \frac{3\Sigma M_m - kM_{m2} - (h_m P_m + h_{m+1} P_{m+1})}{2ki_{Cm}}, \\
 \theta_{(m-1)3} &= \frac{3\Sigma i_{m1} + 6i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{m1} + \frac{3\Sigma i_{m2} + (12-k)i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{m2} + \\
 &+ \frac{(3-2k)\Sigma i_{m3} + 12i_{Bm}}{2ki_{Cm}} \theta_{m3} + \frac{3\Sigma i_{m4} + (12-k)i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{m4} + \\
 &+ \dots + \frac{3\Sigma i_{mk} + 6i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{mk} - \frac{i_{C(m+1)}}{i_{Cm}} \theta_{(m+1)3} + \\
 &+ \frac{3\Sigma M_m - kM_{m3} - (h_m P_m + h_{m+1} P_{m+1})}{2ki_{Cm}}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \theta_{(m-1)k} &= \frac{3\Sigma i_{m1} + 6i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{m1} + \frac{3\Sigma i_{m2} + 12i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{m2} + \dots + \\
 &+ \frac{3\Sigma i_{m(k-1)} + (12-k)i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{m(k-1)} + \frac{(3-2k)\Sigma i_{mk} + 6i_{Bm}}{ki_{Cm}} \theta_{mk} - \\
 &- \frac{i_{C(m+1)}}{i_{Cm}} \theta_{(m+1)k} + \frac{3\Sigma M_m - kM_{mk} - (h_m P_m + h_{m+1} P_{m+1})}{2ki_{Cm}}.
 \end{aligned} \tag{e}$$

式中 ΣM_m 为第 m 层所有結点的不均衡力矩之和。

如果采用公式(4)表示的矩陣角变記号,则方程組 (e) 即可写成下列矩陣形式:

$$\Psi_{m-1} = -\frac{i_{C(m+1)}}{i_{Cm}} E(k) \Psi_{m+1} + \frac{1}{ki_{Cm}} \left\| \alpha_{ij} \right\|_m^k \Psi_m + \frac{\mathfrak{M}_m}{2ki_{Cm}}, \tag{11}$$

式中 $\left\| \alpha_{ij} \right\|_m^k$ 表示元素为各杆刚度系数組成的 k 阶刚度矩陣; $\mathfrak{M}$ 表示与載荷有关的行向量,它們分別具有下列形式:

$$\|\alpha_{ij}\|^k = \begin{vmatrix} (3-2k)\Sigma i_{m1} + 6i_{Bm}, 3\Sigma i_{m2} + (12-k)i_{Bm}, 3\Sigma i_{m3} + 12i_{Bm}, \dots, 3\Sigma i_{mk} + 6i_{Bm} \\ 3\Sigma i_{m1} + (6-k)i_{Bm}, (3-2k)\Sigma i_{m2} + 12i_{Bm}, 3\Sigma i_{m3} + (12-k)i_{Bm}, 3\Sigma i_{m4} + 12i_{Bm}, \dots, 3\Sigma i_{mk} + 6i_{Bm} \\ 3\Sigma i_{m1} + 6i_{Bm}, 3\Sigma i_{m2} + (12-k)i_{Bm}, (3-2k)\Sigma i_{m3} + 12i_{Bm}, 3\Sigma i_{m4} + (12-k)i_{Bm}, \dots, 3\Sigma i_{mk} + 6i_{Bm} \\ \dots\dots\dots \\ 3\Sigma i_{m1} + 6i_{Bm}, 3\Sigma i_{m2} + 12i_{Bm}, \dots, 3\Sigma i_{m(k-1)} + (12-k)i_{Bm}, (3-2k)\Sigma i_{mk} + 6i_{Bm} \end{vmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathfrak{M} = \begin{vmatrix} 3\Sigma M_m - kM_{m1} - (h_m P_m + h_{m+1} P_{m+1}) \\ 3\Sigma M_m - kM_{m2} - (h_m P_m + h_{m+1} P_{m+1}) \\ 3\Sigma M_m - kM_{m3} - (h_m P_m + h_{m+1} P_{m+1}) \\ \dots\dots\dots \\ 3\Sigma M_m - kM_{mk} - (h_m P_m + h_{m+1} P_{m+1}) \end{vmatrix}. \quad (13)$$

式(11)就是适用于有側移高层剛構的矩陣角變方程。象分析无側移高层剛構一样,利用这一方程,經過連鎖的矩陣运算,可以求出有側移高层剛構的各层矩陣角變与頂层矩陣角變的关系。

求出了各层的結点角變之后,各层的相对側移可按下列公式計算:

$$\delta_m = \frac{h_m}{2k} \sum_k (\theta_{mk} + \theta_{(m-1)k}) + \frac{h_m^2 P_m}{12k i_{cm}}. \quad (14)$$

(二)边界条件 通过矩陣角變方程列出了各层矩陣角變与頂层矩陣角變的綫性关系之后,再以底层弹性結点的靜力平衡条件

$$\Sigma M_{1,1} = 0; \quad \Sigma M_{1,2} = 0; \quad \dots\dots\dots; \quad \Sigma M_{1,k} = 0 \quad (15)$$

作为边界条件,即可算得原来剛構的結点角變。

六、有側移高樓剛構的計算实例

設有一座三間五层的对称剛構,受有如图 6 所示的水平風載荷。假定其几何尺寸与图 3 相同。由于結構形式对称及載荷可以分解为对称与反对称,因而以下的計算仅限在半个剛構中进行。因图 6 所示剛構在对称載荷作用下各杆不产生弯矩,故此处不予討論。

1. 根据方程(11),并注意公式(12)和(13),即可求得各层矩陣角變与頂层矩陣角變的关系如下:

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= \begin{vmatrix} 2 & 9.5 \\ 5 & 3.5 \end{vmatrix} \Psi_5 + \begin{vmatrix} -15 \\ -15 \end{vmatrix}; \\ \Psi_3 &= -E\Psi_5 + \begin{vmatrix} 1.5 & 11 \\ 6.5 & 3 \end{vmatrix} \Psi_4 + \begin{vmatrix} -45 \\ -45 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 57 & 52.75 \\ 28 & 71.25 \end{vmatrix} \Psi_5 + \begin{vmatrix} -232.5 \\ -187.5 \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$$\Psi_2 = -E\Psi_4 + \begin{vmatrix} 1.5 & 11 \\ 6.5 & 3 \end{vmatrix} \Psi_3 + \begin{vmatrix} -67.5 \\ -67.5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 391.5 & 853.375 \\ 449.5 & 553.125 \end{vmatrix} \Psi_5 + \begin{vmatrix} -2463.75 \\ -2126.25 \end{vmatrix};$$

$$\Psi_1 = -E\Psi_3 + \begin{vmatrix} 1.5 & 11 \\ 6.5 & 3 \end{vmatrix} \Psi_2 + \begin{vmatrix} -82.5 \\ -82.5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5474.75 & 7311.6875 \\ 3865.25 & 7135.0625 \end{vmatrix} \Psi_5 + \begin{vmatrix} -26934.375 \\ -22288.125 \end{vmatrix}.$$

2. 应用方程(1), 并注意公式(14), 展开边界条件(15), 并将有关的角变代入, 乃有

$$\left. \begin{aligned} 44929.0\theta_{5,1} + 58267.13\theta_{5,2} - \\ - 218261.25 = 0, \\ 52141.5\theta_{5,1} + 98710.75\theta_{5,2} - \\ - 304852.50 = 0. \end{aligned} \right\}$$

解此二元联立方程, 即得

$$\theta_{5,1} = 2.707434; \quad \theta_{5,2} = 1.658206.$$

根据上文第(1)段求出的矩阵角变关系和公

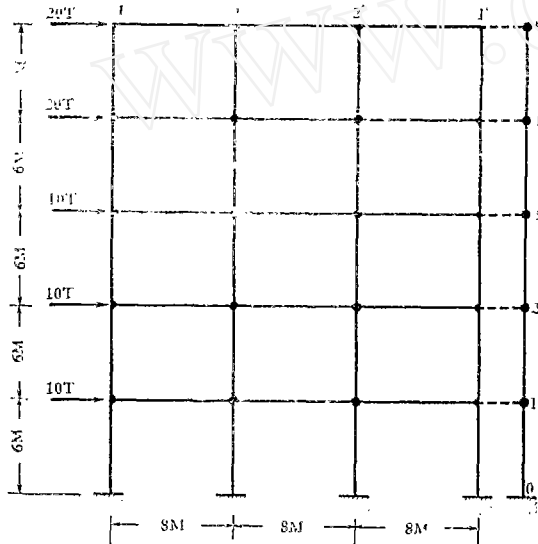


图 6

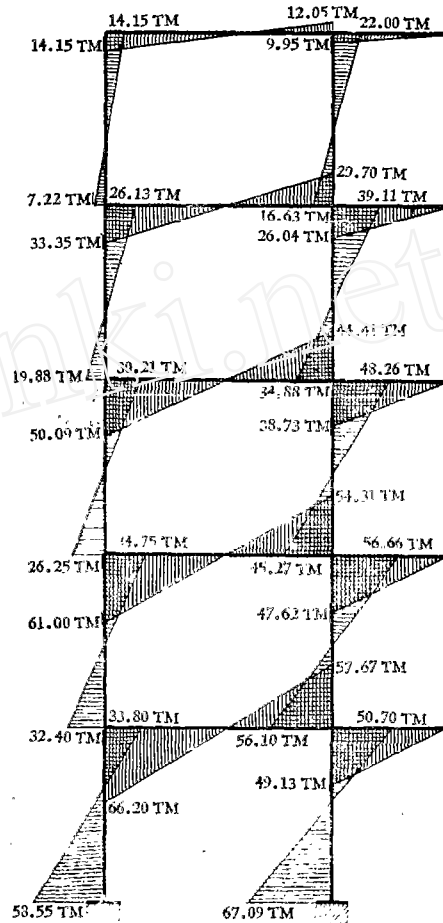


图 7

式(14), 即可依次算得全部结点角变和各层相对侧移之值如表 3 所示。

表 3

Ψ_6	$\theta_{6,1}$	2.707434	Ψ_5	$\theta_{5,1}$	0.167825	Ψ_4	$\theta_{4,1}$	9.294104	Ψ_3	$\theta_{3,1}$	11.281956	Ψ_2	$\theta_{2,1}$	12.458370
	$\theta_{6,2}$	1.658206		$\theta_{5,2}$	4.340891		$\theta_{4,2}$	6.455329		$\theta_{3,2}$	7.936777		$\theta_{2,2}$	8.187718
	$\theta'_{6,2}$	1.658206		$\theta'_{5,2}$	4.340891		$\theta'_{4,2}$	6.455329		$\theta'_{3,2}$	7.936777		$\theta'_{2,2}$	8.187718
	$\theta'_{6,1}$	2.707434		$\theta'_{5,1}$	0.167825		$\theta'_{4,1}$	9.294104		$\theta'_{3,1}$	11.281956		$\theta'_{2,1}$	12.458370
δ_6	δ_6	37.311534	δ_5	δ_5	69.387226	δ_4	δ_4	89.952249	δ_3	δ_3	104.797232	δ_2	δ_2	33.469132
	δ_6	37.311534		δ_5	69.387226		δ_4	89.952249		δ_3	104.797232		δ_2	33.469132

根据上列角变和侧移绘制的弯矩图如图 7 所示。

七、結 論

1. 綜合以上所述可見,利用本文提出的矩陣角變和矩陣角變方程的概念,可將高樓剛構的分析問題,歸結為矩陣角變間綫性關係的連鎖運算。這一矩陣運算不僅具有系統的和機械的工作程序,而且也有顯明的物理觀念。它既不需要解析大量的聯立方程,也避免了大量迭代的數字計算工作。

2. 為行文方便和節省篇幅計,本文僅僅討論了對稱式高樓剛構的分析問題。但是必須指出,不論是在原則上還是在實踐上,矩陣法的適用範圍,都無此項限制。對於任何形式的高樓剛構,本法都是可以應用的。

本文全部插圖承葛文源同志協助繪制,附此致謝!

參 考 文 獻

- [1] Рабинович, И. М., Курс строительной механика, часть II, 1954.
- [2] Шайкевич, В. Д., Матричный метод расчета регулярных стержневых систем, "Расчет пространственных конструкций", выпуск IV, 1953, стр. 143~181.
- [3] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, 1953.
- [4] Cross, H. and Morgan, N. D., "Continuous Frames of Reinforced Concrete", 1932.
- [5] 金望植編譯:形變分配法,中國科學圖書儀器公司出版,1954.
- [6] 張方齡:變截面剛構分析續編,科學出版社出版,1956.
- [7] 陳百屏,金濤:多層排架的矩陣分析,土木工程學報,1954.
- [8] 王光遠:以初參數法計算多層剛架及連框桁架,哈爾濱工業大學學報,1955.

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА МНОГОЭТАЖНЫХ РАМНЫХ КАРКАСОВ

Люй Цзы-хуа

(Накинский Инженерно-Строительный Техникул)

РЕЗЮМЕ

В настоящей статье изложен разработанный автором новый метод расчета многоэтажных рам на базе теории матриц. За основные неизвестные матричного метода принимаем матричные угловые деформации, а именно матрицы-столбцы, элементами которых служат обычные неизвестные угловые деформации жестких узлов каждого этажа.

При расчете многоэтажных рам по предлагаемому методу в настоящей статье задачи прочности рам привести к задачам математического расчета так называемых "матричных угловых уравнении". Это уравнение примет вид:

Для несвободной рамы,

$$\Psi_{m-1} = -\frac{i_{c(m+1)}}{i_{cm}} E_{(k)} \Psi_{m+1} - \left[\|\alpha_i \delta_{ij}\|_m^k + \frac{i_{bm}}{i_{cm}} (F_{(k)} + H_{(k)}) \right] \Psi_m - \frac{1}{2i_{cm}} \|M_i\|_m^k.$$

Для свободной рамы,

$$\Psi_{m+1} = -\frac{i_{c(m+1)}}{i_{cm}} E_{(k)} \Psi_{m+1} + \frac{1}{k i_{cm}} \|\alpha_{ij}\|_m^k \Psi_m + \frac{1}{2k i_{cm}} \mathfrak{M}_m,$$

где Ψ — матричная угловая деформация; $E_{(k)}$ — единичная квадратная матрица порядка k ; $F_{(k)}$ — наддиагональная квадратная матрица порядка k ; $H_{(k)}$ — поддиагональная квадратная матрица порядка k ; $\|\alpha_i \delta_{ij}\|^k$ — диагональная квадратная матрица порядка k ; $\|\alpha_{ij}\|^k$ — квадратная матрица порядка k ; $\|M_j\|^k$, $\mathfrak{M}$ — зависящий от нагрузок матричные векторы.

www.cnki.net