

球磨绝对最高粉碎产量装载因数的 推求及球磨在运用中力的关系*

刘先志

(济南山东工学院)

一、引言

現有某厂急欲在增加基本建設費不大的条件下增加产量;經研究現厂全盤設備之后,发现唯一的可能就是考虑提高其一系列的机器中的球磨的绝对生产量。如果可以提高球磨的绝对生产量,則在其以后的,一連串的生产程序中,只要增添不多的非专门技术的劳动工人就可以了。若該球磨的健全程度允許增加装载量,可以說根本不需要开支基本建設費用,就可以达到提高生产的目的。此外,附帶着也可以降低成本及提高劳动生产率。因此,现实迫切要解决的问题有两个,即(1)該厂現在所使用的球磨的健全程度是否允許再增加装载量;(2)現在該厂达到的球磨装载量是否已經就是該球磨的绝对最高产量的装载量。

鑑于球磨在不少种类的重工业中是一个很基本与广泛使用着的一种大型机具,因此本人就趁这个机会,把它的运用性能作一个比較彻底的分析,把可用的結果或可当作一項补充参考材料。不过,因本人知識有限,時間短促,难免有錯誤或遺漏之处,懇請大家指正。

后面彙列的第一种資料曾涉及球磨运用的基本原理,而在其后的四种材料中,我們只能找到一些应用指标的数字,况且在这些指标数字中,各处尚甚不一致,确实令工厂的技术人員难以遵循。在最后一種資料中,著者虽作过球磨使用原理的叙述,然而数量太少。因此,从得到的这六种資料中不但不能一蹴而就的对于本文的要求找出答案,并且資料确实相差的太多;曾渴望由苏联或是欧洲大陆的一些专门科学杂志先找一遍,是否能找到近似的情况作为一种启示。結果,一点这样程度的資料也沒有找到。因此,只好在很缺乏科学研究程度的資料下,来接受这个任务作为一个小小的科学研究题目进行研究,而希望能得出可用的結論。

二、水平軸鼓室球磨运用的基本原理

我們可以理解,球磨这种机具(图1)是一个繞水平軸旋轉的鼓室,在其中我們装载上拟进行磨碎的物料块与工作鋼球(或是鋼段与卵石)。在旋轉的鼓室中,鋼球被轉入一边的鼓室壳壁携行达到一定高度点 A ,鋼球紧接着由此点脱离外壁飞行下落于点 B 处与鼓

* 1958年11月3日收到。

室的另一边的壳壁或物料碰撞。在碰撞时,钢球就把所碰到的物料进行一次击打。这种击打连续重演,到一定时间,物料被粉碎到所要求的程度。

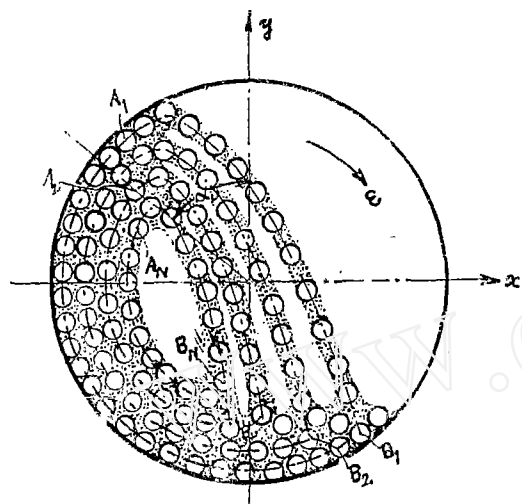


图1. 球磨工作原理

A_v ——脱离点; α_v ——脱离角;
 B_v ——落着点; ω ——鼓室的角速度

的解答。

球磨的工作原理是基于上面一段所叙述的情况,但在球磨的经济利用上及球磨的安全上,仍存在着一些具体的非肯定不可的问题,例如:

(1) 已知鼓室直径,鼓室每分钟应当旋转几周及应当装上多少物料与钢球,方使单位时间中的研磨产量达到最高额?

(2) 鼓室两端轴头的安全尺寸如何核查?

(3) 推动鼓室所需要的功率如何推求?

本文的主要目的,就是要试一下,能否把上列的几个非肯定不可的问题作出可用

三、钢球的脱离点与落着点及在运动中的装载内半径^[1]

在脱离点 A_v (图2) 处,重为 G_K 的钢球的离心力 $\frac{G_K}{g} \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 R_v$ 与钢球重力的径向分量 $G_K \cos \alpha_v$ 维持平衡的公式是

$$\frac{G_K}{g} \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 R_v = G_K \cos \alpha_v \quad (1)$$

或

$$\alpha_v = \cos^{-1} \frac{v_{0v}^2}{g R_v} \equiv \cos^{-1} \frac{\omega^2 R_v}{g} \quad (2)$$

其中 α_v = 脱离点 A_v 的向径与通过鼓室中心铅垂线所成之角,简称脱离角;

$R_v = R_0 - (2v - 1) r_0$ = 有关层的钢球球心的运行圆周半径,其中次第指数 v 自 $v = 1$ 至 $v = N$,而 N 为共有的钢球层数;

R_0 = 鼓室内圆周半径;

g = 地心对单位质量的引力;

r_0 = 钢球的半径;

$\omega = \frac{\pi n}{30}$ = 鼓室旋转的角速度;

n = 鼓室每分钟的转数;

v_{0v} = 钢球在有关脱离点 A_v 处的切向速度。

公式(2)显示,脱离角 α_v 是鼓室角速度 ω 与钢球运行圆周半径 R_v 的函数,意即:为已知的 ω 与 R_v ,各层的钢球自被公式(1)所确定的点 A_v 用切向速度 v_{0v} 脱离鼓室壳壁(或物

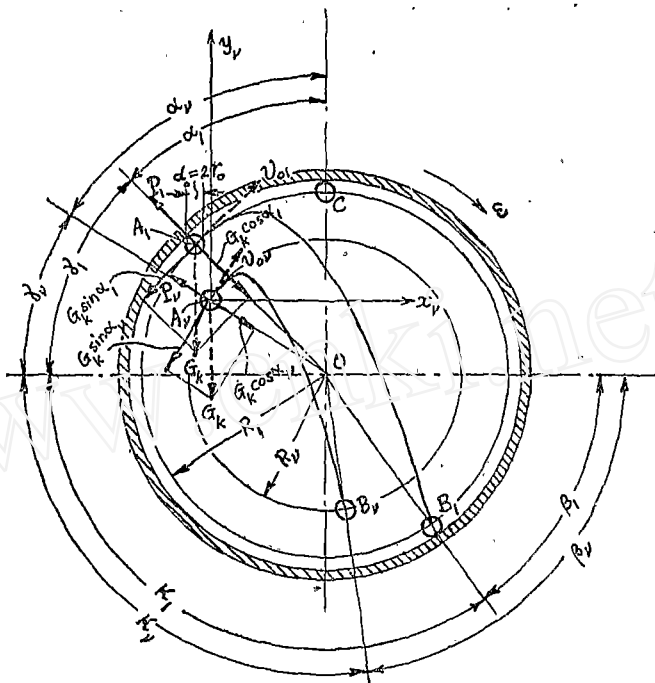


图2. 钢球在鼓室中的运动轨迹

料)的内表面,而沿抛物线 $A_v B_v$ 飞行下落. 若以通过脱离点 A_v 的坐标系 $x_{A_v} y$ 作为参照坐标系,则这些抛物线的方程是

$$y = x \tan \alpha_v - \frac{g}{2v_{0v}^2 \cos^2 \alpha_v} x^2. \quad (3)$$

此外,不难推得,依照通过点 A_v 的坐标系 $x_{A_v} y$,各层钢球轨道同心圆的方程是

$$x^2 - 2R_v x \sin \alpha_v + y^2 + 2R_v y \cos \alpha_v = 0. \quad (4)$$

再用钢球于脱离点处在向径方向的平衡条件(2),可将抛物线(3)化为

$$2R_v y \cos \alpha_v = 2R_v x \sin \alpha_v - \frac{x^2}{\cos^2 \alpha_v}. \quad (5)$$

把公式(4)与(5)联合,即得

$$x^2 - \frac{x^2}{\cos^2 \alpha_v} + y^2 = 0 \quad (6)$$

或

$$y = \pm x \tan \alpha_v. \quad (6a)$$

将(6a)代入(4)则得,

$$\left(\frac{x}{\cos^2 \alpha_v} - 4R_v \sin \alpha_v \right) x = 0 \quad (7)$$

或

$$x_{0v} = 4R_v \sin \alpha_v \cos^2 \alpha_v, \quad x_{A_v} = 0. \quad (8)$$

上二式的第一式代表落着点 B_v 至脱离点 A_v 的横坐标距,第二式代表脱离点 A_v 本身地点

的圆周上, 这个圆周的圆心是位于鼓室中的豎立半径的点 O' 上。

利用公式(2)与(15), 可将公式(13)与(14)化为

$$\beta_v = 3 \cos^{-1} \frac{\omega^2 R_v}{g} - \frac{\pi}{2}, \quad (17)$$

$$K_v = \frac{3\pi}{2} - 3 \cos^{-1} \frac{\omega^2 R_v}{g}. \quad (18)$$

若视上二式是钢球层圆圈半径 R_v 的函数, 则用上二式所绘成的曲线 $B_1 B_N O$ (图4) 即代表各层钢球落着点的几何位置。这条曲线在鼓室的中心的地方切遇鼓室的水平方向的直径, 因为依照公式(2), 当 $R_v = 0$ 时, 我们得出 $\cos \alpha_v = 0$, 意即 $\alpha_v = 90^\circ$ 。但依据公式(13), 则 $\beta_{R_v=0} = 3\alpha_{R_v=0} - \frac{\pi}{2} = 180^\circ$; 这样就证实了在点 O 附近曲线 $OB_N B_1$ 的性质。

上面的论证并不意味着, 在钢球下落时, 钢球就会一定停留在曲线 $B_1 B_N O$ 的各点上。例如, 有关层的钢球不会落到一段曲线 $B_N O$ 的相应点上就停止前进, 它们一定继续下落直至碰到物料为止。因此, 上面的分析的用意是要弄清楚, 是否不同层的钢球在下落中会发生碰撞。

上面已经足够清楚, 经过曲线段 $B_N O$ 的钢球一定也会再经过曲线段 $B_1 B_N$ 的某些点。可是两线段 $B_N O$ 与 $B_1 B_N$ 是属于不同层的钢球, 因此若不将钢球的层数加以限制, 不同层的钢球会在下落中发生碰撞, 结果有损于粉碎工作。因此, 装裁物的最小半径 R_N 的选择必须使最内层的钢球尚能自由下落, 而不与其他各层的钢球在下落中互相碰撞。为要达到这个要求, 装料的各层 (具有半径自 $R_1 + r_0$ 至 $R_N - r_0$) 的钢球的落下点应当取落着点曲线的 $B_1 B_N$ 段, 而不可使用点 B_N 以上的 $B_N O$ 一段。换句话说, 就是要使最内层钢球的落着点是在点 B_N , 意即: 若系依照通过原点 O 的坐标系, 我们须使其横坐标距有最大数值。若以脱离点为原点, 则依照公式(8), 落着点的横坐标距是 $x_{B_v} = 4R_v \sin \alpha_v \cos^2 \alpha_v$ 。若依照通过鼓室中心的坐标系, 则这个横坐标距应写为

$$\begin{aligned} x'_{B_v} &= x_{B_v} - R_v \sin \alpha_v = 4R_v \sin \alpha_v \cos^2 \alpha_v - R_v \sin \alpha_v = \\ &= \frac{g}{\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2} (4 \sin \alpha_v \cos^3 \alpha_v - \sin \alpha_v \cos \alpha_v). \end{aligned} \quad (19)$$

使一次微分导数

$$\frac{dx'_{B_v}}{d\alpha_v} = \frac{g}{\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2} (4 \cos^4 \alpha_v - 12 \sin^2 \alpha_v \cos^2 \alpha_v - \cos^2 \alpha_v + \sin^2 \alpha_v)$$

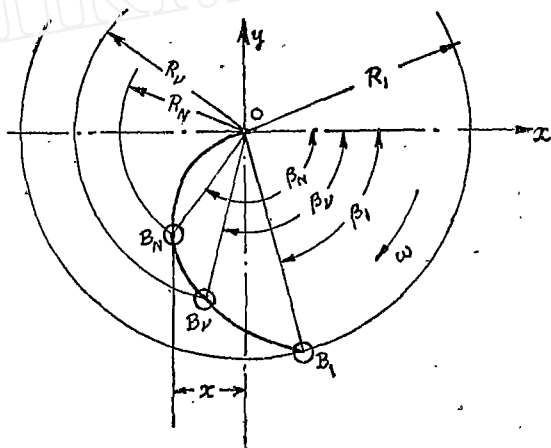


图4. 各层钢球落着点的几何位置

等于零,則得

$$16 \cos^4 \alpha_v - 14 \cos^2 \alpha_v + 1 = 0 \quad (20)$$

或

$$\alpha_N = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{7 - \sqrt{33}}}{4} \right) \approx 73^\circ 50'. \quad (21)$$

因此,点 B_N 是相应于具有角度 $\alpha_N = 73^\circ 50'$ 的脱离点的落着点;因而,装料在运动状态中的内半径应为

$$R_N \geq \left(\frac{30}{\pi n} \right)^2 g \cos \alpha_N = \left(\frac{30}{2\pi n} \right)^2 g \sqrt{7 - \sqrt{33}}. \quad (22)$$

依据上面得出的结果,可以结论:位于半径 $R < R_N$ 的圆周上的钢球,在下落中会与其相邻料层下落的钢球互相碰撞。此外,自然应保证使

$$R_1 - R_N \geq (N - 1)2r_0 \quad \text{或} \quad N \leq 1 + \frac{R_1 - R_N}{2r_0}, \quad (23)$$

其中 N 代表在运动状态中钢球排列成的层数。在使用球磨时,应当切实保证遵循上面这些条件。

四、相应于绝对最高研磨产量,鼓室的转数^[1]

对一个已知的装载层,钢球工作的最有利条件是,它应当有其最高的下落距离;此距离应自抛物线的最高顶点算起至落着点为止。在这样的条件下,当钢球与鼓室壳壁的内表面或物料碰撞的瞬间,钢球一定具有最大的功能而完成最大的粉碎功量。

很显然,钢球自脱离点至抛物线的顶点所升的高度是 $\frac{v_{0v}^2 \sin^2 \alpha_v}{2g}$;再根据公式(10),自脱离点至落着点的高度差是 $4R_v \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v$ 。因此,自抛物线的顶点算起钢球的总落下高度必为

$$H_v = \frac{v_{0v}^2 \sin^2 \alpha_v}{2g} + 4R_v \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v, \quad (24)$$

若将关系

$$v_{0v} = \frac{\pi n}{30} R_v, \quad n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g \cos \alpha_v}{R_v}} \quad (25)$$

代入公式(24),則得总落下高度

$$H_v = \frac{9}{2} R_v \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v. \quad (26)$$

若使 $\frac{dH_v}{d\alpha_v} = \frac{9}{2} R_v (2 \sin \alpha_v \cos^2 \alpha_v - \sin^3 \alpha_v)$ 等于零,就得出钢球下落有最大距离应当相应于一个脱离角

$$\alpha_v = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

然依照公式(2) $\alpha_v = \cos^{-1} \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 \frac{R_v}{g}$ 的关系,每层钢球须有其各层所属之脱离角,意即:我

們不可能在运动中使一切层的鋼球得到共同的脱离角 $\alpha_v = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$. 因此, 我們只好照顾有最高下落距离的最外层鋼球, 而使

$$\alpha_{opt} = \alpha_1 = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 54^\circ 40'. \quad (27)$$

这样, 最外层鋼球的最高下落距离是

$$H_{Imax} = \sqrt{3} R_1. \quad (28)$$

当选取鼓室每分钟的轉数时, 应当这样注意: 若使鼓室的轉数比绝对最大产量应有的轉数稍微小些, 就会降低产量; 但若使轉数比最大产量轉数稍微提高一点, 就会使各落下点向上推移 (意即, 使脱离角缩小), 也就縮減了鋼球的总落下高度, 而也就降低了产量. 若再使轉数大大的提高, 就会产生这样大的离心力, 以致使鋼球紧压在鼓室壳壁的内表面上, 全然不再落下. 这样, 鼓室的粉碎产量就会等于零.

相应于点 C (图 2) 上的离心力正等于鋼球的重量, 的鼓室轉数称为临界轉数. 很显然, 在这种情况下, 有关系

$$\frac{G_K}{g} \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 R_1 = G_K, \quad (29)$$

自其中得出临界轉数

$$n_{cr} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{R_1}}, \quad (30)$$

其中 R_1 为最外层鋼球的旋轉半径. 鋼球鼓室的生产操作轉数应小于其临界轉数.

为确定球磨的绝对最高产量, 我們需要使最外层的鋼球得到最有利的工作条件 (用脱离角 $\alpha_1 = 54^\circ 40'$). 該层有最大数目的鋼球, 并且一定在既定的情况中有决定性的作用.

自关系 (24) 易于看出, 绝对最大产量的轉数是

$$n_{opt} = \frac{30}{\pi \sqrt{3}} \sqrt{\frac{g}{R_1}}. \quad (31)$$

此外, 对绝对最高产量的情况, 根据公式 (22), 我們得出鋼球最内层的半径

$$R_{Nopt} \equiv R_N = \frac{\sqrt{21 - 3\sqrt{33}}}{4} R_1 \approx 0.482 R_1, \quad (32)$$

而根据公式 (16), 在运动中装載鋼球上界綫的圆周半径是

$$\rho_{opt} = \frac{\sqrt{3}}{2} R_1 \approx 0.866 R_1. \quad (33)$$

此刻, 若将关系

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_{opt} &= \frac{1}{\sqrt{3}}, & y &= R_1 \cos \alpha_{opt}, \\ \nu_{0l} \equiv \nu_{opt} &= R_1 \frac{\pi n_{opt}}{30}, & n_{opt} &= \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g \cos \alpha_{opt}}{R_1}} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

代入拋物綫公式(3),則得

$$x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}R_1x - \frac{2}{9}R_1^2 = 0; \quad (35)$$

及其二根是

$$x = \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)R_1. \quad (36)$$

因为根据这里的情势, x 不可能有負值, 所以得

$$(y = -R_1 \cos \alpha_{opt}), \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}}R_1 = R_1 \sin \alpha_{opt}. \quad (37)$$

根据上式可作重要結論: 为绝对最高产量的球磨操作, 最外层鋼球的拋物綫正通过鼓室的中心. 这个規律使我們很容易迅速的把最外层鋼球的拋物綫繪于正确的位置.

五、各层鋼球的拋物綫长度

因为以后的研究需要各层鋼球的拋物綫长度, 因此在本节中, 我們特地預先将各层鋼球在鼓室内的拋物綫长度方程推求出来.

为便于推算, 把拋物綫的最高点 (图 5) 当作此处坐标系的原点, 这样可用諸关系

$$x_v = v_{0v} \cos \alpha_v \cdot t, \quad y_v = \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_{0v}^2 = g R_v \cos \alpha_v$$

得出相应于通过拋物綫最高点的坐标系的拋物綫方程

$$x_v^2 = \frac{2v_{0v}^2 \cos^2 \alpha_v}{g} y_v = 2R_v \cos^3 \alpha_v \cdot y_v. \quad (38)$$

因此, 拋物綫的长度应为

$$S_{pv} = \int_{x_{1v}}^{x_{2v}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_v^2} dx_v$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_v = \frac{x_v}{R_v \cos^3 \alpha_v}.$$

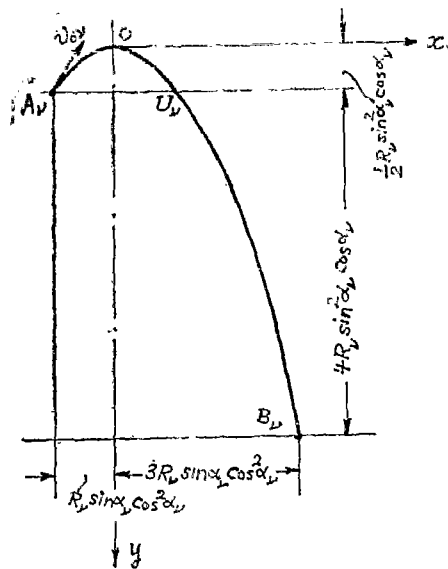


图 5. 各层鋼球的拋物綫长度核算

用易于証明的上下积分界限

$$\left. \begin{aligned} x_{1v} &= x_{Av} = -R_v \sin \alpha_v \cos^2 \alpha_v, \\ x_{2v} &= x_{Bv} = 3R_v \sin \alpha_v \cos^2 \alpha_v, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

則算得各拋物綫的长度

$$S_{pv} = \left(\frac{x_v \sqrt{x_v^2 + R_v^2 \cos^6 \alpha_v}}{2R_v \cos^3 \alpha_v} + \frac{R_v \cos^3 \alpha_v}{2} \log_e \frac{x_v + \sqrt{x_v^2 + R_v^2 \cos^6 \alpha_v}}{R_v \cos^3 \alpha_v} \right) \Big|_{x_{1v}}^{x_{2v}}. \quad (40)$$

将界限代入, 則得

$$\begin{aligned}
 S_{pv} = & \frac{R_v \sin \alpha_v \cos^2 \alpha_v \sqrt{R_v^2 \sin^2 \alpha_v \cos^4 \alpha_v + R_v^2 \cos^6 \alpha_v}}{2R_v \cos^3 \alpha_v} + \\
 & + \frac{3R_v \sin \alpha_v \cos^2 \alpha_v \sqrt{9R_v^2 \sin^2 \alpha_v \cos^4 \alpha_v + R_v^2 \cos^6 \alpha_v}}{2R_v \cos^3 \alpha_v} + \\
 & + \frac{R_v \cos^3 \alpha_v}{2} \log_e \frac{R_v \sin \alpha_v \cos^2 \alpha_v + \sqrt{R_v^2 \sin^2 \alpha_v \cos^4 \alpha_v + R_v^2 \cos^6 \alpha_v}}{R_v \cos^3 \alpha_v} + \\
 & + \frac{R_v \cos^3 \alpha_v}{2} \log_e \frac{3R_v \sin \alpha_v \cos^2 \alpha_v + \sqrt{9R_v^2 \sin^2 \alpha_v \cos^4 \alpha_v + R_v^2 \cos^6 \alpha_v}}{R_v \cos^3 \alpha_v};
 \end{aligned}$$

将上式化簡后, 則得出

$$S_{pv} = \frac{1}{2} \left(\sin \alpha_v \cos \alpha_v (1 + 3\sqrt{1 + 8\sin^2 \alpha_v}) + \cos^3 \alpha_v \log_e \frac{3 \sin \alpha_v + \sqrt{1 + 8\sin^2 \alpha_v}}{1 - \sin \alpha_v} \right) R_v. \quad (41)$$

自然也可用关系

$$\alpha_v = \cos^{-1} \left(\left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 \frac{R_v}{g} \right) = \sin^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi n}{30} \right)^4 \left(\frac{R_v}{g} \right)^2}$$

把公式(41)化成 n 与 R_v 的函数。

六、绝对最高粉碎产量装載因数

在运用鋼球鼓式研磨时, 应当装載多少才能达到绝对最高粉碎产量, 这是一个极重要并且必須先解决的問題。装載混合物的体积与鼓室空間体积之比在本文中被称为装載因数(有些資料中称它为填充因数)。在本文最后所引証的資料中, 装載因数极不一致, 例如在其中可查到, 为鋼球: 装載因数 $\varphi = 0.25 - 0.33$, 为小鋼段則 $\varphi = 0.25 - 0.3$, 为小圓石 $\varphi = 0.3 - 0.4$; 同时又可查到: Л. Б. 雷凡松教授作了研究, 当 $\varphi = 0.4$ 时, 对最外层球体操作最有利。可惜此刻不能获得雷凡松教授研究这个問題的論文。根据上面这些不一致的数字, 就无从决定到底应当装載多少才算使粉碎工作最为有利。因此迫使本人必須重新試驗再分析这个問題, 希望由此导得一个可靠的、准确的数学式子可以預先确定绝对最高产量的装載因数。

为推求绝对最高粉碎产量因数, 我們应当理解, 在鼓室的定常操作下, 在任何瞬吋观察, 总有一部分鋼球与物料借助于离心力、重力以及摩擦力与鼓壳壁不形成相对的位移, 而全部装載量的其余部分則各沿其所属抛物綫用不同的密度分布着。自然, 根据物体在重力場中下落的規律, 离脱离点愈远則鋼球布占的密度愈形疏松。此外, 最內层鋼球的抛物綫与相对稳定的一部分鋼球物料混合体之間, 一定存在着一个一定大小的空隙。

現在試审查每层相隣各鋼球相繼进入抛物綫及其沿抛物綫飞进所用的時間間隔的关系。設鼓室旋轉一週所用的時間是

$$t = \frac{60}{n} \text{ 秒} \quad \left(n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g \cos \alpha_v}{R_v}} \right).$$

設(图6)第一个鋼球是正在拋物綫的起点, 因此紧隣后来的一个鋼球步入拋物綫的时间要比第一个鋼球晚

$$\Delta t_v = \frac{\Delta S_{Pv}}{2\pi R_v} t \equiv \frac{R_v \Delta \alpha}{2\pi R_v} \frac{60}{n} \equiv \frac{2r_0}{2\pi R_v} \frac{60}{n} = \frac{2r_0}{\sqrt{g R_v \cos \alpha_v}} \text{ 秒.} \quad (42)$$

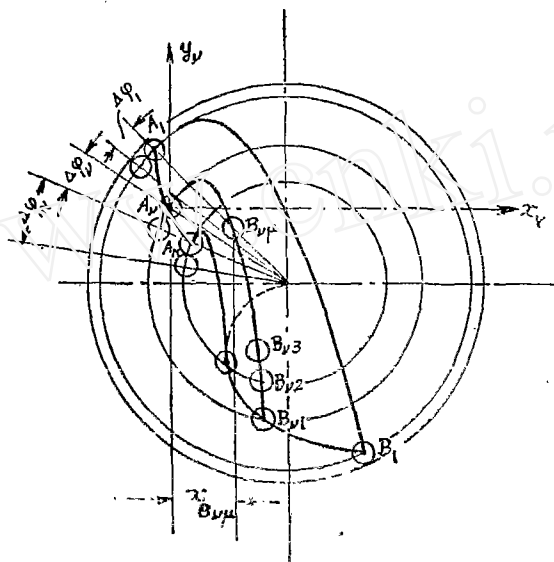


图6. 鋼球体佔其拋物綫的情况

自关系 $x_v = v_{0v} \cos \alpha_v \cdot t$ 可以証明, 第一个鋼球(也就是任何鋼球)飞完拋物綫所用的时间是

$$t_{Bv1} = \frac{x_v}{v_{0v} \cos \alpha_v} = \frac{4R_v \sin \alpha_v \cos^2 \alpha_v}{v_{0v} \cos \alpha_v} = 4 \sin \alpha_v \sqrt{\frac{R_v \cos \alpha_v}{g}}. \quad (43)$$

当第一个鋼球正飞完全拋物綫的瞬时, 第二第三等等及第 μ 个鋼球在同一拋物綫上所消耗的时间是

$$\left. \begin{aligned} t_{Bv2} &= t_{Bv1} - \Delta t_v, \\ t_{Bv3} &= t_{Bv1} - 2\Delta t_v, \\ &\dots\dots\dots \\ t_{Bv\mu} &= t_{Bv1} - (\mu - 1)\Delta t_v. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

用以前的有关关系就可得到

$$t_{Bv\mu} = 4 \sin \alpha_v \sqrt{\frac{R_v \cos \alpha_v}{g}} - (\mu - 1) \frac{2r_0}{\sqrt{g R_v \cos \alpha_v}}.$$

以及第有关个鋼球自起点所达到的横坐标距

$$x_{Bv\mu} = \sqrt{g R_v \cos \alpha_v} \cdot \cos \alpha_v \left(4 \sin \alpha_v \sqrt{\frac{R_v \cos \alpha_v}{g}} - (\mu - 1) \frac{2r_0}{\sqrt{g R_v \cos \alpha_v}} \right),$$

更可简化为

$$x_{Bv\mu} = 4R_v \sin \alpha_v \cos^2 \alpha_v - (\mu - 1) 2r_0 \cos \alpha_v. \quad (45)$$

因此,自关系

$$4R_v \sin \alpha_v \cos^2 \alpha_v - (\mu - 1)2r_0 \cos \alpha_v \geq 0$$

可以得出在抛物线上在任何瞬时飞布着钢球的数目 μ 的条件方程

$$\mu \leq \frac{2R_v \sin \alpha_v \cos \alpha_v}{r_0} + 1 = \frac{R_v \sin 2\alpha_v}{r_0} + 1. \quad (46)$$

再设 $S_{\rho v}$ 代表有关抛物线的长度, $\bar{S}_{\rho v}$ 代表因沿抛物线有布占疏松的变化所引起的空隙,因而必有

$$\bar{S}_{\rho v} = S_{\rho v} - (\mu - 1)2r_0 = S_{\rho v} - 4R_v \sin \alpha_v \cos \alpha_v. \quad (47)$$

因此,在所有的抛物线上,沿抛物线的疏松影响所引起的总空隙面积是

$$2r_0 \sum_{v=1}^N \bar{S}_{\rho v} = 2r_0 \sum_{v=1}^N (S_{\rho v} - 4R_v \sin \alpha_v \cos \alpha_v). \quad (48)$$

此处应补充提及, μ 的条件方程也可用下列另一种思考路线更简便的得到. 钢球在抛物线上的总飞行时间 $t_{B_{v1}}$ 被两相邻钢球的时间差 Δt_v 除, 即等于每个瞬时全抛物线被 μ 个钢球所分成的段数 $\mu - 1$, 意即

$$\frac{t_{B_{v1}}}{\Delta t_v} \geq (\mu - 1) \quad \text{或} \quad \mu \leq \frac{t_{B_{v1}}}{\Delta t_v} + 1.$$

再引用上面 $t_{B_{v1}}$ 与 Δt_v 的关系, 就可把上式化为与公式(46)完全符合的式子

$$\mu \leq \frac{4 \sin \alpha_v \sqrt{\frac{R_v \cos \alpha_v}{g}}}{\frac{2r_0}{\sqrt{g R_v \cos \alpha_v}}} + 1 = \frac{2R_v \sin \alpha_v \cos \alpha_v}{r_0} + 1.$$

自各层路线的总长所占的面积和扣除空隙总面积后, 再被鼓室内横断面积除, 即得绝对最高产量装载因数

$$\lambda = \frac{2r_0 \sum_{v=1}^N \left\{ \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha_v - \beta_v \right) R_v + S_{\rho v} \right\} - 2r_0 \sum_{v=1}^N \bar{S}_{\rho v}}{\pi R_0^2}.$$

用公式(48)将上式简化后, 则得相当简便的关系

$$\lambda = \lambda_{sv} + \lambda_{\rho v} = \frac{4r_0}{\pi R_0^2} \sum_{v=1}^N R_v (\pi - 2\alpha_v + 2 \sin \alpha_v \cos \alpha_v). \quad (49)$$

因为在公式(49)中, 式值 $S_{\rho v}$ 又完全消掉了, 所以又得到启示, 不用 $S_{\rho v}$ 也可以直接得出装载因数, 即

$$\lambda = \frac{2r_0 \sum_{v=1}^N R_v \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha_v - \beta_v \right) + \sum_{v=1}^N (\mu - 1)2r_0 \cdot 2r_0}{\pi R_0^2} = \frac{4r_0}{\pi R_0^2} \sum_{v=1}^N R_v (\pi - 2\alpha_v + \sin 2\alpha_v).$$

若再将关系

$$\alpha_v = \cos^{-1} \left(\frac{\pi}{30\sqrt{g}} \right)^2 n^2 R_v = \sin^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{30\sqrt{g}} \right)^4 n^4 R_v^2}$$

代入公式(49), 則得

$$\lambda = \frac{4r_0}{\pi R_0^2} \sum_{v=1}^N R_v \left\{ \pi - 2 \cos^{-1} \left(\frac{\pi n}{30} \sqrt{\frac{R_v}{g}} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\pi}{30 \sqrt{g}} \right)^2 n^2 R_v \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{30 \sqrt{g}} \right)^4 n^4 R_v^2} \right\} \quad (49a)$$

或

$$\lambda = \frac{4r_0}{\pi R_0^2} \sum_{v=1}^N [R_0 - (2v-1)r_0] \left\{ \pi - 2 \cos^{-1} \left(\frac{\pi n}{30} \sqrt{\frac{R_0 - (2v-1)r_0}{g}} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\pi}{30 \sqrt{g}} \right)^2 n^2 (R_0 - (2v-1)r_0) \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{30 \sqrt{g}} \right)^4 n^4 (R_0 - (2v-1)r_0)^2} \right\}. \quad (49b)$$

此外, 用以前的关系可求得拋物綫的空隙比重

$$\lambda'_{pv} = \frac{S_{pv} - (\mu-1)2r_0}{S_{pv}} \equiv 1 - \frac{4R_v \sin \alpha_v \cos \alpha_v}{S_{pv}} \quad (50)$$

及所有拋物綫的总布占比重

$$\lambda'_p = \frac{\sum (\mu-1)2r_0}{\sum S_{pv}} \equiv \\ \equiv \frac{8 \sum_{v=1}^N R_v \sin \alpha_v \cos \alpha_v}{\sum_{v=1}^N \left\{ \sin \alpha_v \cos \alpha_v (1 + 3 \sqrt{1 + 8 \sin^2 \alpha_v}) + \cos^3 \alpha_v \log_e \frac{3 \cos \alpha_v + \sqrt{1 + 8 \sin^2 \alpha_v}}{1 - \sin \alpha_v} \right\} R_v}. \quad (51)$$

拋物綫的布占量与鼓室总横断面积的比例, 或称为拋物綫的布占因数是

$$\lambda_p = \frac{\sum_{v=1}^N 4(\mu-1)r_0^2}{\pi R_0^2} = \frac{8r_0}{\pi R_0^2} \sum_{v=1}^N R_v \sin \alpha_v \cos \alpha_v. \quad (52)$$

最后, 拋物綫的空隙因数是

$$\lambda''_p = \frac{2r_0 \sum_{v=1}^N \bar{S}_{pv}}{\pi R_0^2} = \frac{r_0}{\pi R_0^2} \sum_{v=1}^N R_v \left(\sin \alpha_v \cos \alpha_v (1 + 3 \sqrt{1 + 8 \sin^2 \alpha_v}) + \right. \\ \left. + \cos^3 \alpha_v \log_e \frac{3 \sin \alpha_v + \sqrt{1 + 8 \sin^2 \alpha_v}}{1 - \sin \alpha_v} - 8 \sin \alpha_v \cos \alpha_v \right). \quad (53)$$

若再利用弧长 $R_v \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha_v - \beta_v \right)$ 与角度关系 $\beta_v = 3\alpha_v - \frac{\pi}{2}$, 則得相对静止量的装载比重

$$\lambda_s = \frac{4r_0}{\pi R_0^2} \sum_{v=1}^N R_v \left(\pi - 2 \cos^{-1} \left(\frac{\pi}{30 \sqrt{g}} \right)^2 n^2 R_v \right). \quad (54)$$

七、在定常运行中各层钢球每循环所需之时间

可以推测, 钢球在球磨中的运动周期大概是不等于鼓室旋转一周所用的时间, 因为钢球只在鼓室周期的一部分时间与鼓室作无相对运动的共旋, 而在其余一部分时间中, 钢球则沿着各所属抛物线自行飞行。

球磨的鼓室旋转一周的时间是

$$t = \frac{60}{n} \text{ 秒}, \quad (55)$$

而各层钢球运动的周期可自下面的思考得出来。自落着点 B_v 至脱离点 A_v 的一部分时间中, 钢球与鼓室一同运行的角度是 $\eta_v = \gamma_v + \delta_v$, 而依据公式 (14), 此值是 $\eta_v = 4\gamma_v = 4\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_v\right)$ 。钢球与鼓室一同运动部分所消耗的时间是

$$t_{1v} = t \frac{\eta_v}{2\pi} = \frac{120\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_v\right)}{\pi n} = \frac{2\pi - 4\alpha_v}{\omega} \text{ 秒}. \quad (56)$$

钢球在抛物线上(自点 A_v 至点 B_v)的自由飞行所需之时间是

$$t_{2v} = \frac{\pi_{Bv}}{v_{0v} \cos \alpha_v} = \frac{4R_v \sin \alpha_v \cos^2 \alpha_v}{R_v \omega \cos \alpha_v} = \frac{60 \sin 2\alpha_v}{\pi n} \text{ 秒}. \quad (57)$$

因此, 钢球运动的周期是

$$t_{0v} = t_{1v} + t_{2v} = \frac{120\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_v\right) + 60 \sin 2\alpha_v}{\pi n} \text{ 秒}. \quad (58)$$

当研磨鼓室每转一周, 有关层的钢球完成的循环数是

$$i_v = \frac{t}{t_{0v}} = \frac{\pi}{\pi - 2\alpha_v + \sin 2\alpha_v}, \quad (59)$$

而钢球与鼓室一同运动的部分时间与鼓室周期之比是

$$j_s = \frac{t_{1v}}{t} = 1 - \frac{2\alpha_v}{\pi} = 1 - \frac{2 \cos^{-1} \frac{\omega^2 R_v}{g}}{\pi}, \quad (60)$$

及钢球在抛物线上飞行所用的部分时间与鼓室周期之比是

$$j_K = \frac{t_{2v}}{t} = \frac{\sin 2\alpha_v}{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\omega^2 R_v}{g} \sqrt{1 - \frac{\omega^4 R_v^2}{g^2}}, \quad (61)$$

此处自然应有关系

$$\frac{1}{i_v} = j_s + j_K. \quad (62)$$

若应用公式(2), 则可将 i_v 化为 R_v 与 n 的函数:

$$i_v = \pi / \left(\left(\pi - 2 \cos^{-1} \left(\frac{\pi}{30} \right)^2 \frac{R_v}{g} n^2 + 2 \left(\frac{\pi}{30} \right)^2 \frac{R_v}{g} n^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{30} \right)^4 \left(\frac{R_v}{g} \right)^2 n^4} \right), \right.$$

其中, n 应遵循限制

$$\frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g \cos \alpha_{\text{opt}}}{R_v}} \leq n < \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{R_v}}.$$

此外, 应当注意, 当

$$\alpha_{\text{opt}} = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

时, $i_{\text{opt}} \approx 1.44$.

八、鋼球研磨所消耗之功率

鋼球研磨所消耗的功率包括(此处不計任何机械摩擦的消耗)各层装载量 G_v 自落着点 B_v 举至脱离点 A_v 所增之势能与各层鋼球折算到鼓室每旋一周具备的动能。

把鋼球装载 G_v 自落着点 B_v 举到相应的脱离点 A_v 所消耗的功量依鋼球的所在层有所区别, 例如, 最外层的装载量最大也举起得最高, 此功应为

$$A_{\rho v} = G_v \cdot y_{Bv} \equiv 4 G_v R_v \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v, \quad (63)$$

其中自然

$$\sum_{v=1}^N G_v = G, \quad (64)$$

而 N 代表在定常的运动状态下全部装载量所形成的层数。因此, 在鋼球运动的每个循环中, 高举的总功量是

$$L_p = \sum_{v=1}^N A_{\rho v} = 4 \sum_{v=1}^N G_v R_v \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v, \quad (65)$$

其中 $\alpha_v = \cos^{-1} \frac{\omega^2 R_v}{g}$ 。但根据公式(59), 当鼓室每轉一周, 各层装载量的循环数为 i_v ; 因此, 当鼓室每旋一周, 全部装载量举高之总功量是

$$L_1 = \sum_{v=1}^N i_v A_{\rho v} = 4\pi \sum_{v=1}^N \frac{G_v R_v \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v}{\pi - 2\alpha_v + 2 \sin \alpha_v \cos \alpha_v}. \quad (66)$$

再者, 若自鋼球的动能推算該动能相应之功量, 则为鋼球的每个循环而得

$$L_K = \sum_{v=1}^N A_{Kv} = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N \frac{G_v}{g} v_{0v}^2 = \frac{1}{2g} \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 \sum_{v=1}^N G_v R_v^2; \quad (67)$$

而当鼓室每旋一周, 此动能所消耗之功量为

$$L_2 = \sum_{v=1}^N i_v A_{Kv} = \frac{\pi}{2g} \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 \sum_{v=1}^N \frac{G_v R_v^2}{\pi - 2\alpha_v + \sin 2\alpha_v}; \quad (68)$$

而在每循环中, 动能与势能的比例是

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{\omega^2}{8g} \frac{\sum_{v=1}^N \frac{G_v R_v^2}{\pi - 2\alpha_v + \sin 2\alpha_v}}{\sum_{v=1}^N \frac{G_v R_v \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v}{\pi - 2\alpha_v + \sin 2\alpha_v}}. \quad (69)$$

因此,鼓室每旋轉一周所需之功量是

$$L = L_1 + L_2 = 4\pi \sum_{v=1}^N \frac{G_v R_v \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v + \frac{\omega^2}{8g} G_v R_v}{\pi - 2\alpha_v + \sin 2\alpha_v} \quad (70)$$

此外,在上列討論中, G_v 代表在定常的迴轉中各层装載量的重量。不难証明,它必等于

$$G_v = \gamma_m V_v = \gamma_m \left\{ 2r_0 \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha_v - \beta_v \right) R_v + 2r_0 (\mathcal{S}_{pv} - \bar{\mathcal{S}}_{pv}) \right\} l,$$

或用以前的有关关系簡化成

$$G_v = 4\gamma_m r_0 l R_v (\pi - 2\alpha_v + 2 \sin \alpha_v \cos \alpha_v), \quad (71)$$

其中新数值 V_v = 各层装載量的体积; γ_m = 装載鋼球与研磨物料的平均比重; l = 鼓室內空的长度, 并应保持关系

$$\sum_{v=1}^N V_v = \lambda \pi R_0^2 l. \quad (72)$$

再考虑上馬力的单位关系, 則得球磨所需之功率

$$L = \frac{4\pi n}{60 \times 75} \sum_{v=1}^N \frac{G_v R_v \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v + \frac{1}{8g} \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 G_v R_v^2}{\pi - 2\alpha_v + 2 \sin \alpha_v \cos \alpha_v} \text{ 馬力}. \quad (70a)$$

九、各层鋼球在落着点上的碰撞力向量

各层鋼球在落着点 B_v 处与鼓室壳壁內表面作直接或間接碰撞时, 各球給予壳壁一个碰撞力; 这些力对于鼓室两端軸头的应力自然有一部分的影响。因此, 欲检查鼓室两端軸头的应力是否超过允許应力之前, 須先将各层鋼球的碰撞力推算出来。

我們可以这样思考来确定推算过程: 各层的鋼球自其所属脱离点 $A_1, A_2, \dots, A_N$ 沿其相应的拋物綫飞行至其相应的落着点 $B_1, B_2, \dots, B_N$, 直接与鼓室壳壁內表面或与鋼球及物料的混合质体相碰而消失其在落着点处达到的速度 $v_{B1}, v_{B2}, \dots, v_{BN}$ 。在点 B_1 上, 鋼球可能是与鼓室壳壁的內表面直接碰撞, 而在其他落点 $B_2, B_3, \dots, B_N$ 处的鋼球則一定是与鋼球及装載物料的混合质体相碰撞。因为混合体中有相当細小的顆粒及很大成份的粉状物料, 所以为簡便計, 我們試假設各层的鋼球在落着点处均系非彈性碰撞。这个假定虽然与鋼球碰撞的实际情形有所差別, 然而这个差別一定不会太大。再者, 在这个假定下, 我們准可得到对軸头的应力更安全的

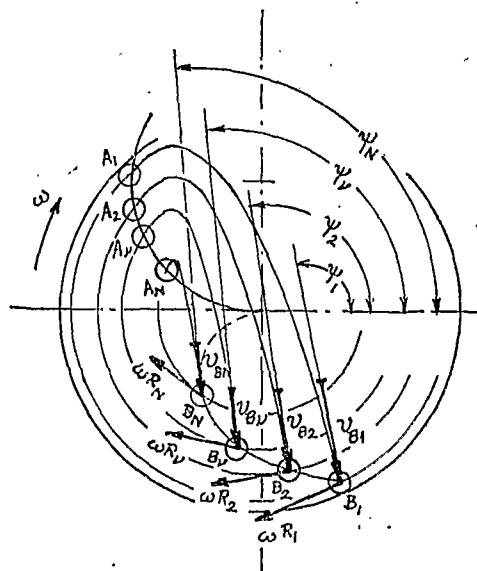


图7. 各层鋼球在落着点处的速度

結果,因为这样所产生的碰撞力的方向比較更会接近,可以說,我們在这个假定下所得出的总碰撞力向量及碰撞力向量矩是它們的极外限值. 另一方面,若假定部分弹性碰撞,則各鋼球在碰撞后必是繼續反射乱碰几次后始消失其在落着点处的速度. 在这种情况下,我們一定得到比非弹性碰撞較為不集中的碰撞力.

(A) 各层鋼球在其落着点上所达到的速度

自鋼球的鉛垂位移方程

$$y_v = v_{0v} \sin \alpha_v \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (73)$$

可得鋼球鉛垂速度的一般方程

$$\frac{dy_v}{dt} = v_{vy} = v_{0v} \sin \alpha_v - g t. \quad (74)$$

再引用落着点与脱离点之間的鉛垂距离 $y_{By} = -4R_v \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v$, 可自公式 (73) 得出鋼球沿拋物綫飞行所用的时间

$$t_{Bv} = \frac{v_{0v} \sin \alpha_v}{g} + \sqrt{\frac{v_{0v}^2 \sin^2 \alpha_v}{g^2} + \frac{8R_v \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v}{g}} \equiv 4 \sqrt{\frac{R_v \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v}{g}}. \quad (75)$$

將上式代入公式(74), 則得鋼球在落着点上的鉛垂速度

$$v_{Bvy} = -\sqrt{v_{0v}^2 \sin^2 \alpha_v + 8R_v g \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v} \equiv -3\sqrt{gR_v \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v}. \quad (76)$$

另一方面,自水平位移方程

$$x_v = v_{0v} \cos \alpha_v \cdot t \quad (77)$$

得鋼球在落着点处的水平速度

$$\frac{dx_v}{dt} = v_{Bvx} = v_{0v} \cos \alpha_v. \quad (78)$$

把公式(76)与(78)联合, 則得出鋼球在落着点上所达到的速度

$$v_{Bv} = \sqrt{v_{Bvx}^2 + v_{Bvy}^2} = \sqrt{gR_v \cos \alpha_v (\cos^2 \alpha_v + 9 \sin^2 \alpha_v)} \equiv \sqrt{gR_v \cos \alpha_v (1 + 8 \sin^2 \alpha_v)}. \quad (79)$$

附帶提及, 也可利用鋼球的下落总关系(24) 得出鋼球在落着点处的鉛垂速度

$$v_{Bvy} = \sqrt{2gH_v} = \sqrt{v_{0v}^2 \sin^2 \alpha_v + 8gR_v \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v}.$$

(B) 在落着点上拋物綫的切綫的方向

很明显, 用关系 $x_{Bv} = 4R_v \sin \alpha_v \cos^3 \alpha_v$ 可自拋物綫公式 (3) 得出在落着点上拋物綫切綫角 ψ_v (图 7) 的下列三个关系:

$$\left. \begin{aligned} \tan \psi_v &\equiv \left(\frac{dy}{dx} \right)_{Bv} = \tan \alpha_v - \frac{4R_v g \sin \alpha_v}{v_{0v}^2} = -3 \tan \alpha_v, \\ \cos \psi_v &= -\frac{1}{\sqrt{1 + 9 \tan^2 \alpha_v}}, \quad \sin \psi_v = \frac{3 \tan \alpha_v}{\sqrt{1 + 9 \tan^2 \alpha_v}}. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

此外, 对于鼓室中心而言, 落着点的坐标距是

$$x_{Bv} = R_v \cos \beta_v, \quad y_{Bv} = R_v \sin \beta_v. \quad (81)$$

(C) 鋼球的碰撞力向量

在各层鋼球的每个循环中, 各层的全部鋼球均在其所属落着点处通过非弹性碰撞失

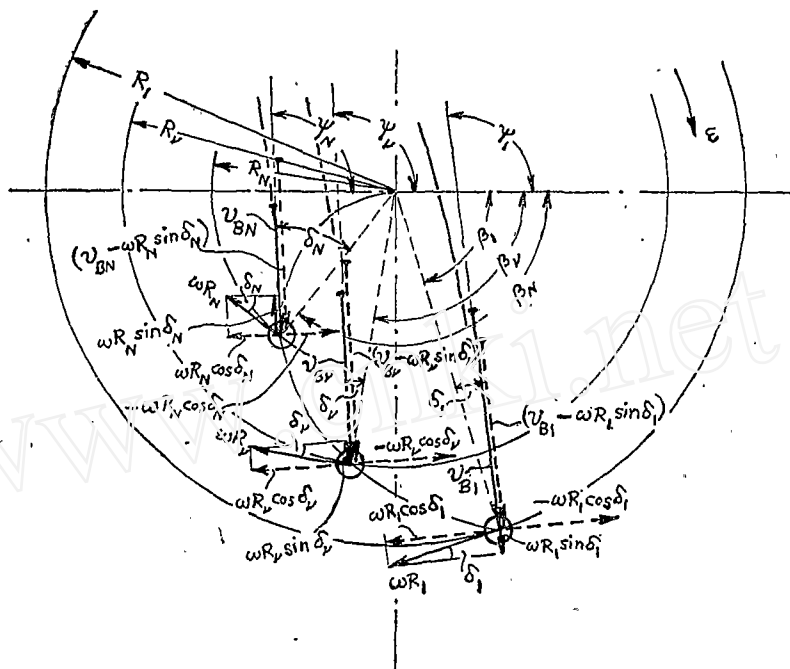


图 8. 各层钢球在其所属落着点处对鼓室的相对速度

去其速度而产生碰撞力; 但应考虑到鼓室的自身转动对于碰撞力的影响。设 v_{Bvr} (图 8), 代表钢球在落着点上在其原来的运动方向上对于鼓室壁的相对速度, 则得

$$v_{Bvr} = |\vec{v}_{Bv}| - \omega R_v \sin \delta_v, \quad (82)$$

其中

$$\delta_v = \pi - \psi_v - \beta_v \equiv \frac{3\pi}{2} - \psi_v - 3\alpha_v; \quad (83)$$

而各层钢球垂直于原来运动方向的相对速度是

$$v_{Bvt} = -\omega R_v \cos \delta_v. \quad (84)$$

假设系非弹性碰撞, 则上面两个相对速度的消失所产生的碰撞力 (图 9) 向量是

$$\vec{P}_{Bvr} = \frac{G_v}{g} \frac{|\vec{v}_{Bv}| - \omega R_v \sin \delta_v}{t_{0v}}, \quad (85)$$

$$\vec{P}_{Bvt} = \frac{G_v}{g} \frac{\omega R_v \cos \delta_v}{t_{0v}}. \quad (86)$$

据此, 这些碰撞力向量的水平与铅垂分力是

$$P_{Bvr x} = |\vec{P}_{Bvr}| \cos(\pi + \psi_v) \equiv -\frac{G_v}{g} \frac{|\vec{v}_{Bv}| - \omega R_v \sin \delta_v}{t_{0v}} \cos \psi_v, \quad (87)$$

$$P_{Bvr y} = |\vec{P}_{Bvr}| \sin(\pi + \psi_v) \equiv -\frac{G_v}{g} \frac{|\vec{v}_{Bv}| - \omega R_v \sin \delta_v}{t_{0v}} \sin \psi_v, \quad (88)$$

$$P_{Bvt x} = |\vec{P}_{Bvt}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi_v\right) \equiv +\frac{G_v}{g} \frac{\omega R_v \cos \delta_v}{t_{0v}} \sin \psi_v, \quad (89)$$

$$P_{Bvt y} = |\vec{P}_{Bvt}| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi_v\right) \equiv +\frac{G_v}{g} \frac{\omega R_v \cos \delta_v}{t_{0v}} \cos \psi_v. \quad (90)$$

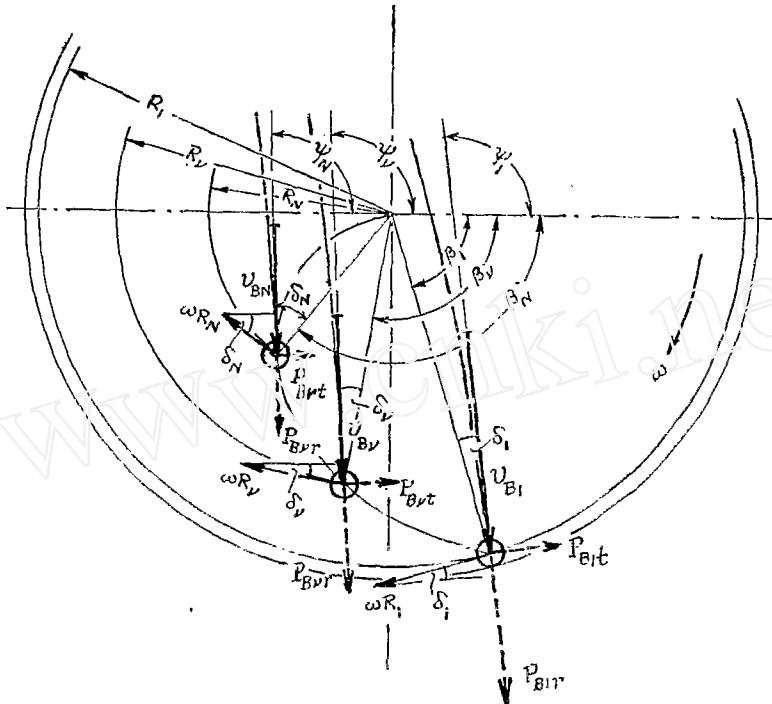


图9. 各层钢球的碰撞力向量

而总碰撞力向量的绝对值是

$$P_N = \sqrt{\{\sum(P_{Bvrx} + P_{Bvt_x})\}^2 + \{\sum(P_{Bvry} + P_{Bvt_y})\}^2} \quad (91)$$

及其方向角是

$$\varphi_N = \tan^{-1} \frac{\sum(P_{Bvry} + P_{Bvt_y})}{\sum(P_{Bvrx} + P_{Bvt_x})}. \quad (92)$$

应提及,上式中 N 系指钢球的层数.

(D) 无相对运动的装载部分的重力及其离心力向量

为简便计,我们可采用二脱离角 α_1 与 α_v 及二落着角 β_1 与 β_v 的平均值得得装载圆份角(图10)

$$\theta_v \approx \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_v + \beta_1 + \beta_v). \quad (93)$$

设有关二扇面的面积是

$$f_{1v} = (R_1 + r_0)^2 \frac{\theta_v}{2}, \quad f_{2v} = (R_v - r_0)^2 \frac{\theta_v}{2}, \quad f_v = f_{1v} - f_{2v}; \quad (93a)$$

及其重心半径

$$\rho_{1v} = \frac{2}{3}(R_1 + r_0) \frac{\sin \frac{\theta_v}{2}}{\frac{\theta_v}{2}}, \quad \rho_{2v} = \frac{2}{3}(R_v - r_0) \frac{\sin \frac{\theta_v}{2}}{\frac{\theta_v}{2}},$$

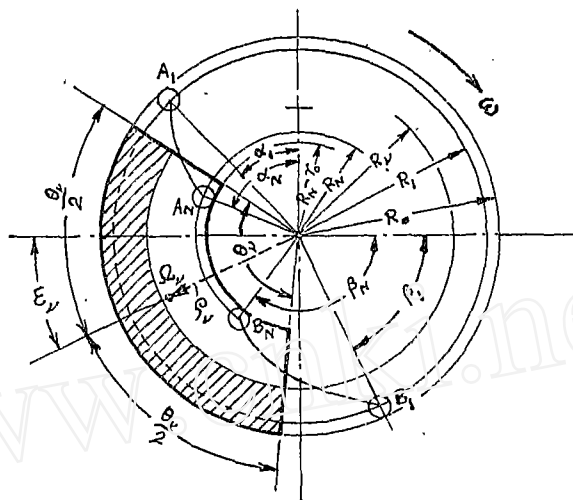


图 10. 相对静止装载部分的重力与离心力

则装载物的相对静止部分的重心距是

$$\rho_v = \frac{f_{1v}\rho_{1v} - f_{2v}\rho_{2v}}{f_{1v} - f_{2v}} = \frac{(R+r_0)^2 \frac{\theta_v}{2} \cdot \frac{2}{3} (R_1+r_0) \frac{\sin \frac{\theta_v}{2}}{\frac{\theta_v}{2}} - (R_v-r_0)^2 \frac{\theta_v}{2} \cdot \frac{2}{3} (R_v-r_0) \frac{\sin \frac{\theta_v}{2}}{\frac{\theta_v}{2}}}{(R_1+r_0)^2 \frac{\theta_v}{2} - (R_v-r_0)^2 \frac{\theta_v}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{(R_1+r_0)^2 + (R_1+r_0)(R_v-r_0) + (R_v-r_0)^2}{R_1+R_v} \frac{\sin \frac{\theta_v}{2}}{\frac{\theta_v}{2}} \quad (94)$$

而重心半径线与通过鼓室中心的水平线间的角是

$$\varepsilon_v = \frac{\theta_v}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_1 + \alpha_v}{2} \right) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_1 + \alpha_v}{4} - \frac{\beta_1 + \beta_v}{4} \quad (95)$$

因此, 相对静止装载重量的轴向分量是

$$G_{vx} = 0, \quad G_{vy} = G = \gamma_m f_v l, \quad (96)$$

其中装载钢球与物料的平均比重是

$$\gamma_m = \frac{\frac{4}{3} \pi r_0^3 \gamma_s + \left[(2r_0)^3 - \frac{4}{3} \pi r_0^3 \right] \gamma_z}{(2r_0)^3} \equiv \gamma_z + \frac{\pi}{6} (\gamma_s - \gamma_z), \quad (96a)$$

γ_s 代表钢的比重, γ_z 代表物料的比重。相对静止装载部分的离心力的轴向分量是

$$Z_{vx} = \frac{\gamma_m}{g} f_v l \rho_v \omega^2 \cos \varepsilon_v, \quad Z_{vy} = \frac{\gamma_m}{g} f_v l \rho_v \omega^2 \sin \varepsilon_v. \quad (97)$$

(E) 通过鼓室中心的轴向分力与总力向量

若 G_t 代表鼓室的自身重量, 则总的水平分力与铅垂分力是

$$F_{vx} = \sum (P_{Bvrx} + P_{Bvtx}) + Z_{vx}, \quad F_{vy} = \sum (P_{Bvry} + P_{Bvty}) + G_{vy} + G_t + Z_{vy}, \quad (98)$$

而总力

$$F_v = \sqrt{F_{vx}^2 + F_{vy}^2} \quad (99)$$

的方向角是

$$\psi = \tan^{-1} \frac{F_{vy}}{F_{vx}} \quad (100)$$

(F) 重力与碰撞力的总扭力矩

于相对静止部分的重力矩

$$M_{lv} = \gamma_m f_v l \rho_v \cos \epsilon_v \quad (101)$$

上,再加上碰撞力的扭力矩

$$M_{2v} = \sum \{x_{Bv}(P_{Bvy} + P_{Bvly}) - y_{Bv}(P_{Bvx} + P_{Bvly})\}, \quad (102)$$

则得总扭力矩

$$M_v = \gamma_m f_v l \rho_v \cos \epsilon_v + \sum \{x_{Bv}(P_{Bvy} + P_{Bvly}) - y_{Bv}(P_{Bvx} + P_{Bvly})\}. \quad (103)$$

十、鼓室两端轴头的应力检查

用两轴头的投影面积 $2d_{za}l_z$ 除总力 F_v , 则得出两轴头表面的压应力

$$P_{zv} = \frac{F_v}{2d_{za}l_z}, \quad (104)$$

其中 d_{za} = 轴头的外直径; l_z = 单个轴头的长度; F_v 则取自公式(99).

若推动机系通过鼓室一端的轴头转动鼓室, 则鼓室轴头的扭转应力是

$$\tau_{zv} = \frac{16d_{za}M_v}{\pi(d_{za}^4 - d_{zi}^4)}, \quad (105)$$

其中 d_{zi} 代表轴头的内直径.

有的球磨的推动传递是通过镶固于鼓室壳壁外表面上的一个大齿轮, 齿轮每靠近一端的轴头(图 11), 这样的机构, 则须用公式

$$\tau_{zv} = \frac{16(2R_0 + 2t)M_v}{\pi\{(2R_0 + 2t)^4 - (2R_0)^4\}} \quad (106)$$

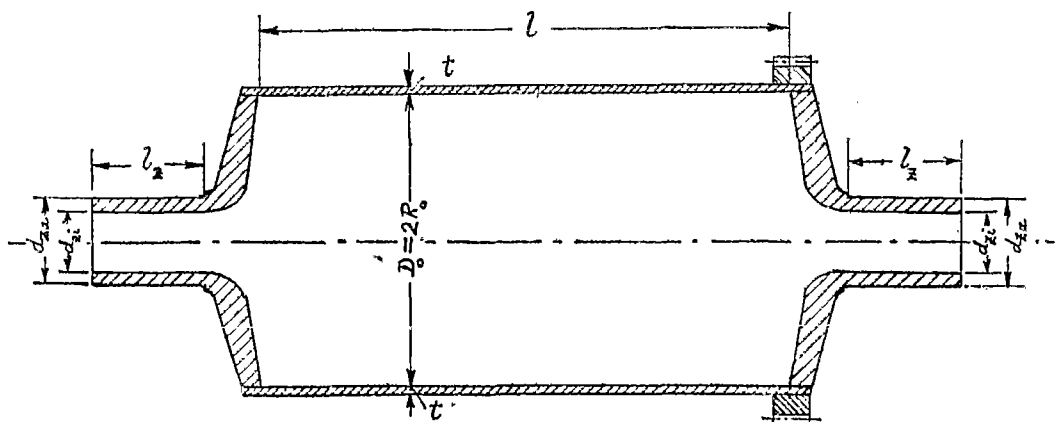


图 11. 鼓室及其两端轴头断面的各项尺寸

来检查鼓室壳壁的扭转应力, 其中 t 代表鼓室壳壁的厚度.

若在弯曲负荷方程

$$M = \frac{Pl}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right)$$

中, 以 $x = 0$ 或 $x = l$, 我们就得出符合鼓室支承情况的最大弯曲力矩

$$M_{\max} = \frac{1}{12} Pl, \quad (107)$$

其中 P 代表总负荷力, 也就是等于公式(99)所代表之力. 这个最大弯曲力矩是施于鼓室与轴头紧连的横断面上. 因此, 此横断面中的弯曲应力是

$$\sigma_{bv} = \frac{1}{12} \cdot \frac{l \sqrt{F_{vx}^2 + F_{vy}^2}}{\frac{\pi}{32} (d_{za}^4 - d_{zi}^4) / d_{za}}. \quad (108)$$

传动如系通过一端的轴头, 则轴头表面层材料的总扭转应力是

$$\tau_{maxv} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{bv}^2 + 4\tau_v^2}. \quad (109)$$

十一、数例与讨论

因限于时间, 未能作规模更大的数字计算, 此处只配合着迅速解决某厂因需要提高生产急于解决的问题, 也附着着为本文导出的某些规律代入数字, 俾能对它们作出相应限度的讨论.

某厂的球磨结构如图 11 所示. 该厂迄今很久使用的装载量是 13.5 吨, 其装载因数只达到了约 17%. 现在因为要提高生产, 拟提高球磨的装载量, 因此在该厂的工程师头脑里引起了三个主要的问题, 即: (1) 装载因数到底允许提高到几何, 方可达到球磨的绝对最高粉碎产量? (2) 当装载量提高了, 该球磨的两个轴头的内应力是否会达到危险的程度? (3) 所需功率将依装载量起什么规律的变化? 鉴于时间短促, 本文的理论部分也曾只限于解决上面这三个问题; 其实在球磨的操作中, 这三个问题也就是主要的了.

(1) 工作钢球直径的拟取

在一般的参考资料中, 我们常看到的钢球直径的限制方程是

$$d_0 = 2r_0 \leq \frac{2R_0}{9} \quad \text{或} \quad d_0 = 2r_0 \leq \frac{2R_0}{12}.$$

现在, 若自公式(22)与(23)得出的关系

$$N \leq 1 + \frac{R_1 - R_N}{2r_0} = 1 + \left(1 - \frac{\cos \alpha_N}{\cos \alpha_1} \right) \frac{R_0}{2r_0}$$

中, 设 $2r_0 = 75$ 公厘, $R_1 = R_0 - r_0 = 900 - 37.5 = 862.5$ 公厘, $\alpha_1 = 54^\circ 40'$, $\alpha_N = 73^\circ 50'$, 则得

$$N = 1 + \left(1 - \frac{0.278}{0.578} \right) \frac{862.5}{75} = 1 + 5.96 \approx 7.$$

因为所得数与 7 相差极微, 我们可以选定, 在球磨的操作中, 鋼球形成的层数 $N = 7$. 虽然所选的直径 $2r_0 = 75$ 公厘与該厂現用的实际直径不符, 不过要避免费时过多的运算, 我們确定拟取这个数值. 其实, 即使用 $N = 7$, 已經使計算过程不算簡便了, 查該厂現用鋼球的直径太小, 粉碎效率极低, 因此就想建議該厂更換較大的鋼球. 所以在这个計算中, 也就不必再用該厂現用的鋼球直径了.

(2) 相应于绝对最高产量球磨鼓室的轉数

若引用公式(25)或(31), 則得

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g \cos \alpha_1}{R_1}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{9.81 \times 0.5783}{0.8625}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{6.56} = 24.5 \text{ 轉/分.}$$

(3) 在鼓室的定常迴轉中, 裝載質体最里层的半径

由公式(23)或(32)可得最內层的半径

$$R_N = R_1 + (1 - N)2r_0 = 862.5 - 6 \times 75 = 412.5 \text{ 公厘.}$$

于是根据上面的計算, 我們得出下列常用的数表(表 1).

表 1. 在运算中經常用到的一些数字

$\nu =$ 第 层 数	1	2	3	4	5	6	7 = N
R_ν 公尺	0.8625	0.7875	0.7125	0.6375	0.5625	0.4875	0.4125
α_ν 角度	54.7	53.1	61.4	64.6	67.8	70.9	73.9
d_ν 弧度	0.954	1.024	1.070	1.127	1.182	1.236	1.288
$\sin \alpha_\nu$	0.815	0.849	0.878	0.904	0.926	0.945	0.961
$\cos \alpha_\nu$	0.578	0.529	0.479	0.428	0.378	0.328	0.278

此处应請注意, 因受到运算过程的影响, 有些函数的变化曾以鋼球在定常运动中所排成的层数 ν 为自主变量, 有些則已折算到依据裝的重量 G_ν ; 好在二者造成的差別頗小, 因而曲綫在这两个自变量中的趋势并不改变.

(4) 各层鋼球拋物綫的长度

若用表 1 里的数字及拋物綫的长度公式(41)进行运算, 則得表 2 中的数字, 自所繪成

表 2. 各层鋼球拋物綫的长度

$\nu =$	1	2	3	4	5	6	7
$S_{p\nu}/R_\nu$	2.16	2.08	1.99	1.86	1.70	1.52	1.31
$S_{p\nu}$ 公尺	1.862	1.640	1.418	1.186	0.957	0.740	0.541

的曲綫(图 12) 可以看出, 拋物綫自然是应依照层数所属半径而縮短, 各层拋物綫与其所属半径的比例也是逐漸縮小. 不难証明, 为极限的情况, 我們得到

$$\lim_{\alpha_\nu=0} S_{p\nu} = \lim_{\alpha_\nu=\frac{\pi}{2}} S_{p\nu} = 0. \quad (110)$$

据此, 曲綫 $S_{p\nu} = S_{p\nu}(\alpha)$ 在相应的角度 α 上有其最大值, 因为我們不直接需要它, 所以不再研究它了.

若再用公式(46), (47) 及(50)进行运算, 即得表 3 及图 13. 此外,

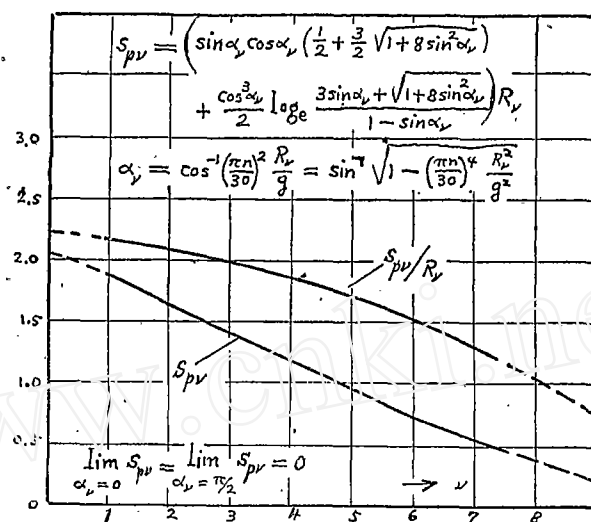


图 12. 各层抛物线长度及其与所属半径之比

表 3. 抛物线的布占数字

ν	1	2	3	4	5	6	7
$S_{p\nu}$ 公尺	1.862	1.640	1.418	1.186	0.957	0.740	0.541
$(\mu-1)2r_0 \equiv 4R_\nu \sin \alpha_\nu \cos \alpha_\nu$ 公尺	1.628	1.412	1.200	0.988	0.788	0.604	0.440
$\bar{S}_{p\nu} = S_{p\nu} - (\mu-1)2r_0$ 公尺	0.234	0.228	0.218	0.198	0.169	0.136	0.101
$\lambda'_{p\nu} = \frac{S_{p\nu} - (\mu-1)2r_0}{S_{p\nu}}$	0.126	0.139	0.154	0.167	0.177	0.184	0.187

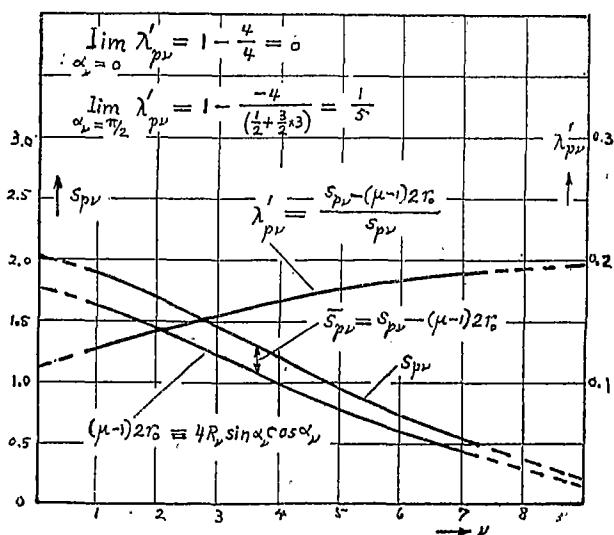


图 13. 抛物线的布占情况

又可推得

$$\lim_{\alpha_\nu=0} \lambda'_{p\nu} = 1 - \frac{4}{4} = 0, \quad \lim_{\alpha_\nu=\frac{\pi}{2}} \lambda'_{p\nu} = 1 - \frac{-4}{-\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times 3\right)} = \frac{1}{5}. \quad (111)$$

自图 13 可以看出,抛物綫的空隙比重与所属半径成比例的增加而以 20% 为限值.

(5) 球磨装載因数

用公式(49)进行运算,就得出重要数表(表 4)及图 14. 自表 4 得出的重要結果是本文 $R_0 = 0.9$ 公尺, $2r_0 = 75$ 公厘的情况,绝对最高产量因数是 $\lambda_{\max} = 0.456$, 意即,若再使装載量增加超过此数,则球磨的绝对粉碎产量反而又降低了. 自該图也可看出,与鼓室相对静止的部分在装在量中比在抛物綫上的布占成份占較高的比重.

表 4. 球磨的装載因数

ν	1	2	3	4	5	6	7
$\lambda_{sv} = \frac{4r_0}{\pi R_0^2} \sum (\pi - 2\alpha_\nu) R_\nu$	0.063	0.114	0.159	0.189	0.215	0.235	0.249
$\lambda_{pv} = \frac{8r_0}{\pi R_0^2} \sum R_\nu \sin \alpha_\nu \cos \alpha_\nu$	0.048	0.089	0.125	0.154	0.177	0.195	0.208
$\lambda_\nu = \lambda_{sv} + \lambda_{pv}$	0.111	0.203	0.284	0.343	0.392	0.430	0.456

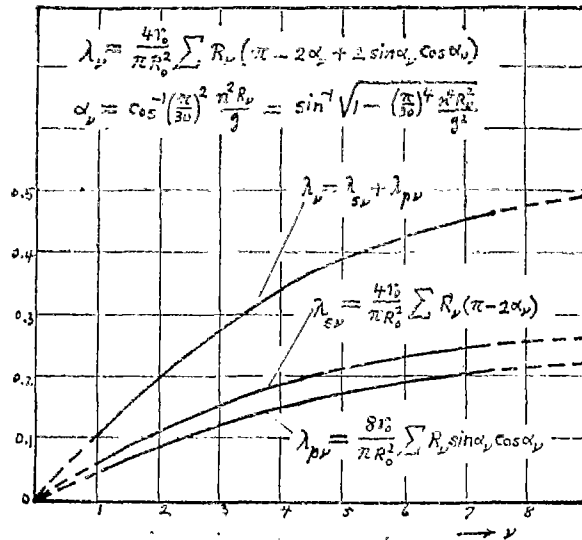


图 14. 球磨装載因数依层数的变化

此外,曾进行过計算,当 $r_0 = 5$ 公分至 2 公分之間时, λ 几乎不起显著的改变.

因此在球磨的操作中,就可只照顾所欲研磨的物料块的坚固性来选择鋼球的大小;若鋼球太大,则位于鋼球之間的空隙亦大,这样虽然鋼球落下的冲击力大,但打下着位于空隙里的物料. 因此,为粗磨宜用較大的鋼球,而为細磨則宜于用較小的鋼球.

(6) 当球磨鼓室每轉一周,有关层的鋼球完成的循环数目

用公式(59), (60) 及 (61) 进行运算,即得表 5 中的数字及图 15 中的曲线. 自曲线可以看出,鋼球层的半径愈小,完成其循环愈快. 图中 i_s 代表各該层的鋼球所在的静止弧长与其所属圆周长之比,而 i_k 代表各該层的鋼球在抛物綫上飞行所用的时间相当于鼓室每循环的百分比. 此外,尚可看出 $i_s > i_k$,并可証明

$$\lim_{\alpha_\nu \rightarrow 0} i_\nu = 1, \quad \lim_{\alpha_\nu = \frac{\pi}{2}} i_\nu = \infty. \quad (112)$$

表 5. 鼓室循环与各层钢球循环的比例

ν	1	2	3	4	5	6	7
$i_\nu = \frac{\pi}{\pi - 2\alpha_\nu + \sin 2\alpha_\nu}$ 循环	1.443	1.573	1.705	1.868	2.130	2.440	2.851
$j_s = \frac{\pi - 2\alpha_\nu}{\pi}$	0.393	0.349	0.319	0.282	0.247	0.213	0.180
$j_k = \frac{\sin 2\alpha_\nu}{\pi}$	0.301	0.285	0.268	0.247	0.223	0.197	0.170

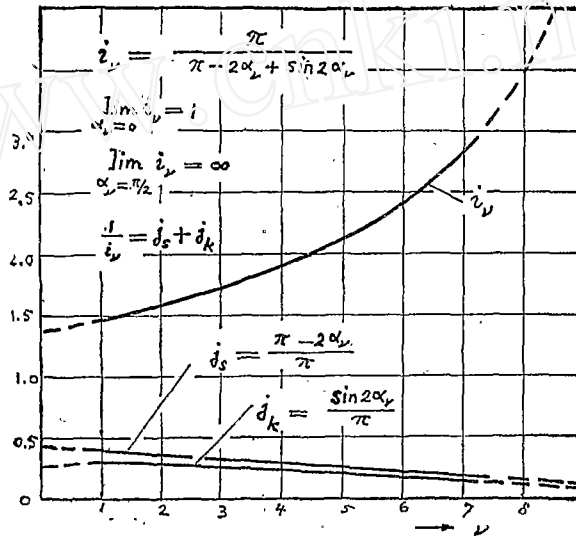


图 15. 鼓室的循环与各层钢球的循环

(7) 各层钢球每循环所用的时间

用公式(56), (57)及(59)进行运算, 可得表 6 及图 16 中的曲线。

自图 16 可以看出, 钢球在相对静止弧上运行比在抛物线飞行用较长的时间, 半径较小的层数用较短的时间。此外, 尚可证明

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\alpha_\nu \rightarrow 0} \frac{t_{1\nu}}{t_{2\nu}} &= \lim_{\alpha_\nu \rightarrow 0} \frac{\pi - 2\alpha_\nu}{\sin 2\alpha_\nu} = \infty, \\ \lim_{\alpha_\nu \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{t_{1\nu}}{t_{2\nu}} &= \lim_{\alpha_\nu \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2\alpha_\nu}{\sin 2\alpha_\nu} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

表 6. 各层钢球的循环时间

ν	1	2	3	4	5	6	7
$t_{1\nu} = \frac{60(\pi - 2\alpha_\nu)}{\pi n}$ 秒	0.963	0.853	0.782	0.692	0.607	0.522	0.442
$t_{2\nu} = \frac{60}{\pi n} \sin 2\alpha_\nu$ 秒	0.736	0.700	0.656	0.605	0.546	0.484	0.417
$t_{1\nu}/t_{2\nu}$	1.310	1.218	1.192	1.143	1.110	1.080	1.065
$t_{0\nu} = t_{1\nu} + t_{2\nu}$ 秒	1.699	1.553	1.438	1.297	1.153	1.006	0.859

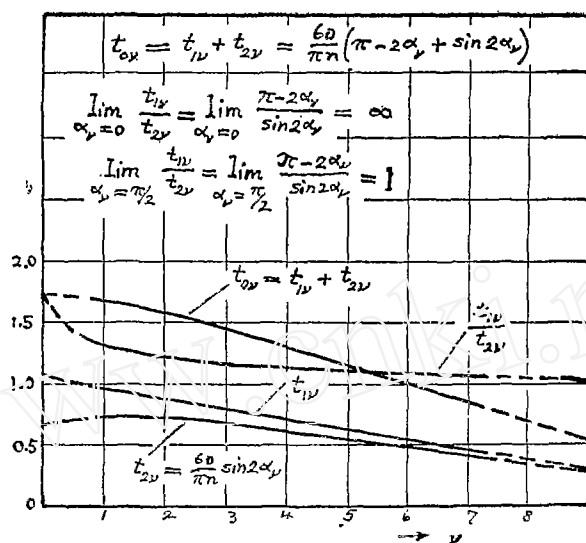


图 16. 各层钢球的循环时间

(8) 球磨所需的净推动功率

因为在各种传动机构中, 各项摩擦力所消耗的功率每依各该传动机构的制造精确程度及结构的简单程度而定; 因此这项消耗可以视当时各该传动机构而另作估计。本节的运算不包括任何摩擦力所消耗的功率。

用公式(71), (63)及(67)进行运算, 可得表 7 的数字及图 17 中的曲线。在这曲线中, 比较更有意义的是势能与动能的比例 A_{pv}/A_{Kv} 。

表 7. 净推动功率

v	1	2	3	4	5	6	7
$G_v = 4v_m r_0 l R_v (\pi - 2\alpha_v + \sin 2\alpha_v)$ 吨	8.46	7.08	5.82	4.79	3.75	2.84	2.04
ΣG_v 吨	8.46	15.54	21.36	26.15	29.90	32.74	34.78
$A_{pv} = 4G_v R_v \sin^3 \alpha_v \cos \alpha_v$ 吨公尺	11.18	8.49	6.11	4.27	2.76	1.62	0.86
$A_{Kv} = \frac{\omega^2}{2g} G_v R_v^2$ 吨公尺	2.11	1.47	0.99	0.65	0.40	0.23	0.12
A_{pv}/A_{Kv}	5.29	5.77	6.14	6.54	6.92	7.05	7.15
$A_v = A_{pv} + A_{Kv}$ 吨公尺	13.29	9.96	7.10	4.92	3.16	1.85	0.98
ΣA_v 吨公尺	13.29	23.25	30.35	35.27	38.43	40.28	41.26
$i_v A_v$ 吨公尺	19.20	15.71	12.09	9.30	6.65	4.49	2.80
$L = \Sigma i_v A_v$ 吨公尺	19.20	34.91	47.00	56.30	62.95	67.44	70.24

势能的消耗占绝大的成分, 自然在抛物线上这项势能有机会变为动能。有时若只需要迅速与大约的估计, 则可将动能的消耗先略而不计。此外, 尚得

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\alpha_v \rightarrow 0} \frac{A_{pv}}{A_{Kv}} &= \lim_{\alpha_v \rightarrow 0} 8 \sin^2 \alpha_v = 0, \\ \lim_{\alpha_v \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{A_{pv}}{A_{Kv}} &= \lim_{\alpha_v \rightarrow \frac{\pi}{2}} 8 \sin^2 \alpha_v = 8. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

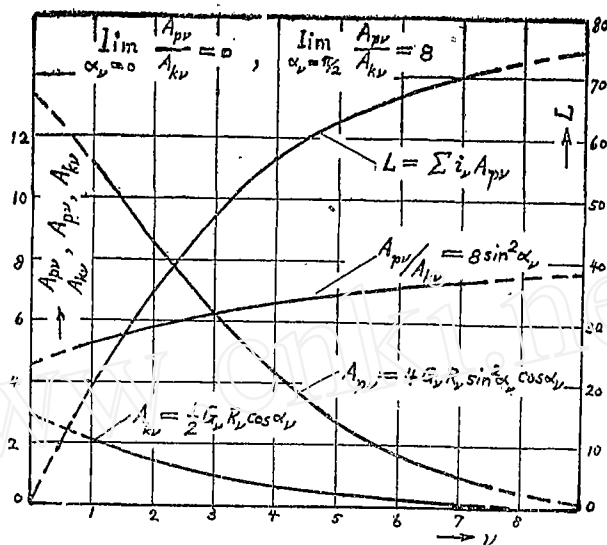


图 17. 净推动功率依装填层数的改变

(9) 各层钢球下落所产生的碰撞力向量

利用公式(80)进行运算,首先得到表 8 及图 18. 为确切规定曲线

$$\psi_{\nu} = \tan^{-1}(-3 \tan \alpha_{\nu})$$

表 8. 在落着点处绝对下落速度的方向角

ν	1	2	3	4	5	6	7
ψ_{ν} 角度	103.4	101.7	100.2	98.9	97.8	96.6	95.6
$\tan \psi_{\nu} = -3 \tan \alpha_{\nu}$	-4.225	-4.815	-5.490	-6.331	-7.350	-8.640	-10.371

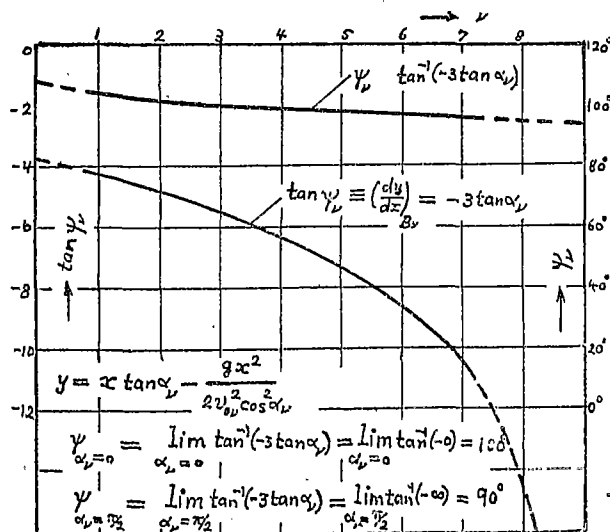


图 18. 在落着点上钢球的绝对速度的方向角

的位置,尚须借助于两个关系:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\alpha_v \rightarrow 0} &= \lim_{\alpha_v \rightarrow 0} [\tan^{-1}(-3 \tan \alpha_v)] = \lim_{\alpha_v \rightarrow 0} \tan^{-1}(-0) = 180^\circ - , \\ \psi_{\alpha_v = \frac{\pi}{2}} &= \lim_{\alpha_v = \frac{\pi}{2}} \tan^{-1}(-\infty) = 90^\circ + . \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

再用公式(85)至(90)进行运算,可得表9及图19. 在这些曲线中,所有的曲线均有单调的变化.

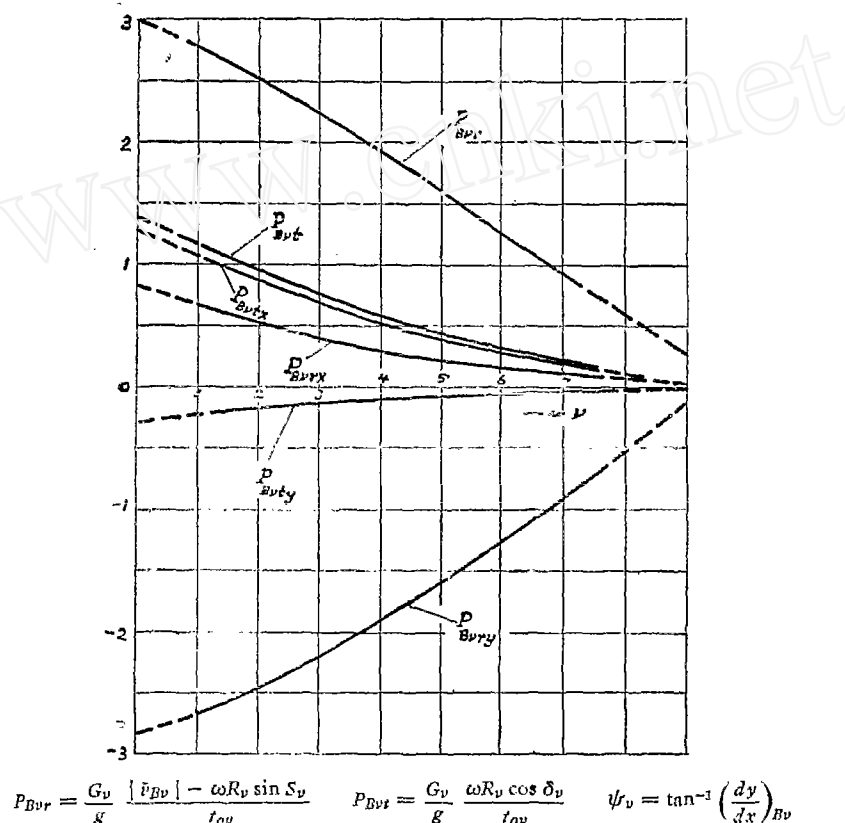


图19. 各层钢球碰撞力向量的绝对值及其所属轴向分量

表9 落下钢球的碰撞力向量

ν (吨)	1	2	3	4	5	6	7
P_{Bvt}	2.76	2.54	2.20	1.94	1.59	1.25	0.93
P_{Bvrx}	0.637	0.515	0.392	0.301	0.214	0.144	0.089
P_{Bvry}	-2.69	-2.49	-2.15	-1.91	-1.62	-1.24	-0.93
P_{Bvtx}	1.119	0.935	0.731	0.572	0.416	0.278	0.174
P_{Bvtg}	1.090	0.916	0.714	0.563	0.412	0.276	0.174
P_{Bvtg}	-0.258	-0.190	-0.130	-0.089	-0.056	-0.032	-0.017

(10) 相对静止装载部分的重力及其离心力向量

再用公式(93), (93a), (94), (95), (96)及(96a)进行运算,则得表10及图20,其中曾假设钢的比重 $\gamma_s = 7.86$, 物料的比重 $\gamma_r = 1.9$; 这样得平均比重

$$\gamma_m = \gamma_r + \frac{\pi}{6} (\gamma_s - \gamma_r) = 1.9 + \frac{\pi}{6} (7.86 - 1.9) = 5.02.$$

表 10. 图 20 的数字

ν	1	2	3	4	5	6	7
θ_ν 角度	142.0	134.6	128.6	122.2	115.7	109.5	103.5
θ_ν 弧度	2.470	2.346	2.235	2.126	2.013	1.906	1.802
ε_ν 角度	35.5	33.9	32.1	30.6	28.9	27.4	25.9
ε_ν 弧度	0.618	0.591	0.559	0.533	0.503	0.477	0.451
ρ_ν 公尺	0.660	0.652	0.638	0.626	0.613	0.599	0.586
f_ν 公尺 ²	0.161	0.290	0.397	0.478	0.538	0.578	0.602
G_{vy} 吨	-4.84	-8.72	-11.95	-14.38	-16.20	-17.40	-18.12

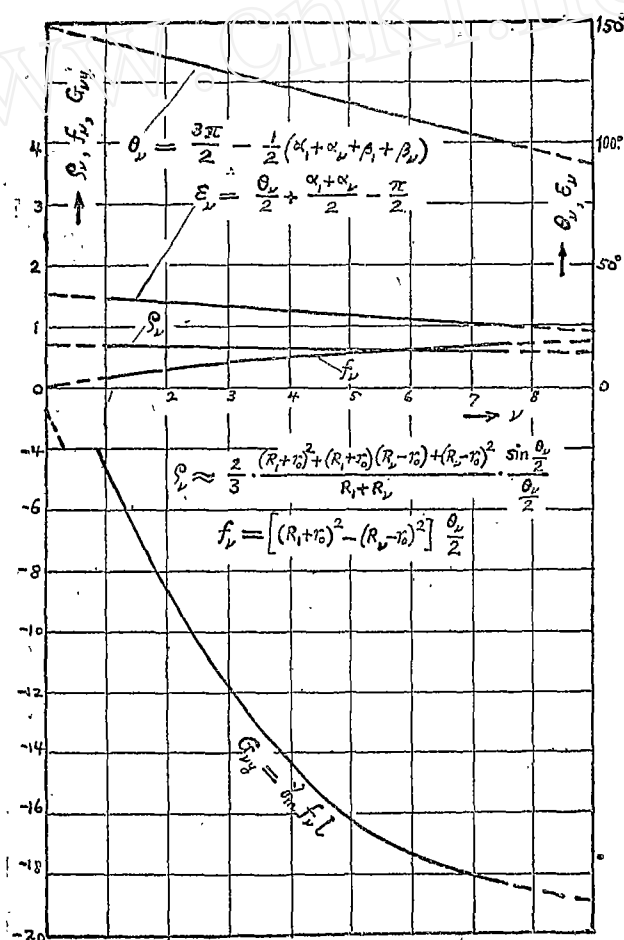


图 20. 相对静止装球部分的重心半径及其方位与重量

在这些曲线中可以看出,重心半径及其方向角均变化甚微。

再用公式(95)与(97)运算,可得表 11 及图 21。此处应请注意的关系是 $|Z_{vy}| < |Z_{vx}|$ 。

(11) 通过鼓室中心的总轴向分力及轴头的弯曲应力

现在若把以上得出的有关数值代入公式(98),即得通过鼓室中心的总轴向分力(见表 12)。其中,因为在 x 方向的总轴向分量 $F_{vx} \approx 0$, (若视磨中钢球的飞起及下落是内部运动,也能预先肯定 $F_{vx} = 0$, 因为每个球把它自磨内壁的一侧所得到的冲量如数又交还

表 11. 图 21 的数字

ν	1	2	3	4	5	6	7
Z_{yx} 吨	-1.75	-3.13	-4.33	-5.22	-5.83	-6.21	-6.42
Z_{vy} 吨	-1.24	-2.13	-2.72	-3.08	-3.22	-3.22	-3.12
Z_v 吨	2.14	3.82	5.12	6.05	6.66	6.99	7.13
$Z_v/\Sigma G_v$	0.253	0.246	0.239	0.232	0.223	0.214	0.205

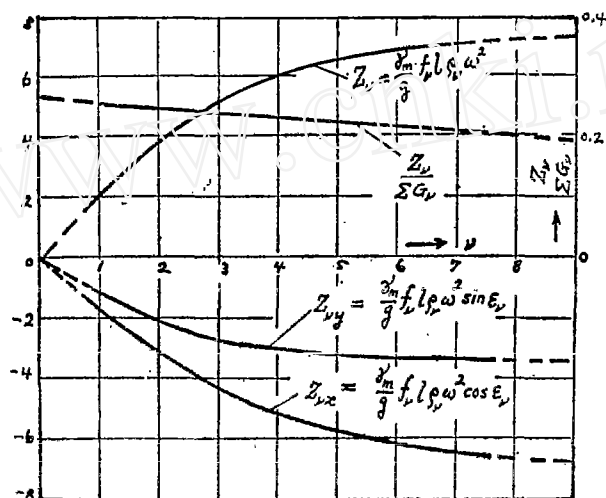


图 21. 相对静止装载部分的离心力及其轴向分量

表 12. 轴向总分力及轴头的弯曲应力

ν	1	2	3	4	5	6	7
$\sigma_{b\nu}$ 公斤/公分 ²	578	756	904	1018	1106	1166	1204
F_{vy} 吨	-24.08	-31.53	-37.63	-42.42	-46.06	-48.53	-50.09
F_{vx} 吨	-0.023	+0.028	-0.066	-0.092	-0.070	-0.030	+0.023

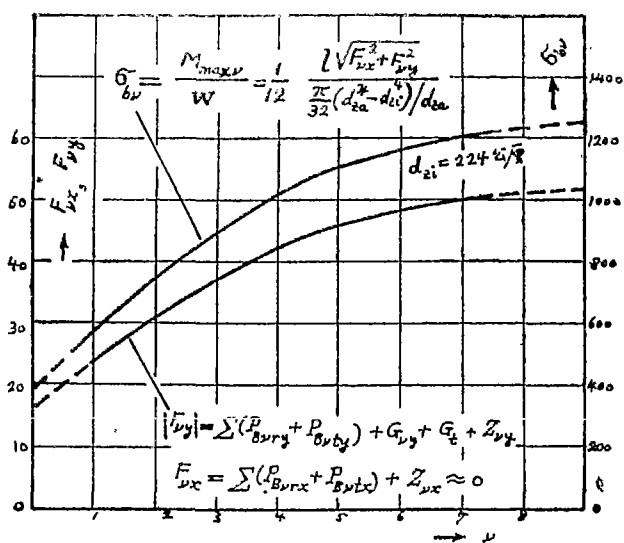


图 22. 轴向总分力及轴头的弯曲应力

給磨內壁的另一側; F_{vx} 是我們要推求 σ_{bv} 附带着得到的; 經過不算簡單的过程而能得出 $F_{vx} \approx 0$, 这也就說明我們推算的步驟是正确的), 所以只有在 y 方向的总軸向分量 F_{vy} 引起可注意的弯曲应力。現在先只用軸头的內外直径 $d_i = 224$ 公厘, $d_a = 307$ 公厘代入公式(108)中, 就可以算出相应于装填层数軸头的弯曲应力来, 这些数字也曾列入表 12。

此外, 因为負荷 F_{vy} 对于軸头的施力种类是波变换向負荷, 所以为一般的机器制造炭鋼的允許弯曲应力不可超过 900 公斤/公分²。依照图 22, 我們不可超过形成三层装填量的鋼球与物料。为某厂的情况即約为 21 吨。因此, 可以比以前增加 7.5 吨, 即增产 55%。

(12) 各层鋼球的碰撞力所引起的扭轉应力

在各层落着点上的軸向碰撞力及各层落着点至鼓室中心的坐标距均曾列于表 13 内。

表 13. 图 23 的数字

ψ	1	2	3	4	5	6	7
$x_{bv} = R_v \cos \beta_v$ 公尺	+0.238	+0.079	-0.053	-0.151	-0.223	-0.264	-0.274
$y_{bv} = R_v \sin \beta_v$ 公尺	-0.828	-0.783	-0.708	-0.618	-0.516	-0.410	-0.308
$\Sigma(P_{Bvrx} + P_{Bvtx})$ 吨	1.727	3.158	4.264	5.128	5.760	6.180	6.443
$\Sigma(P_{Bvry} + P_{Bvty})$ 吨	-2.432	-5.112	-7.392	-9.391	-11.067	-12.339	-13.281
$\xi_v = \frac{P_{Bvry} + P_{Bvty}}{G_v}$	0.288	0.379	0.392	0.418	0.446	0.450	0.462
$\xi_v = \frac{\Sigma(P_{Bvry} + P_{Bvty})}{\Sigma G_v}$	0.288	0.329	0.346	0.359	0.370	0.377	0.382

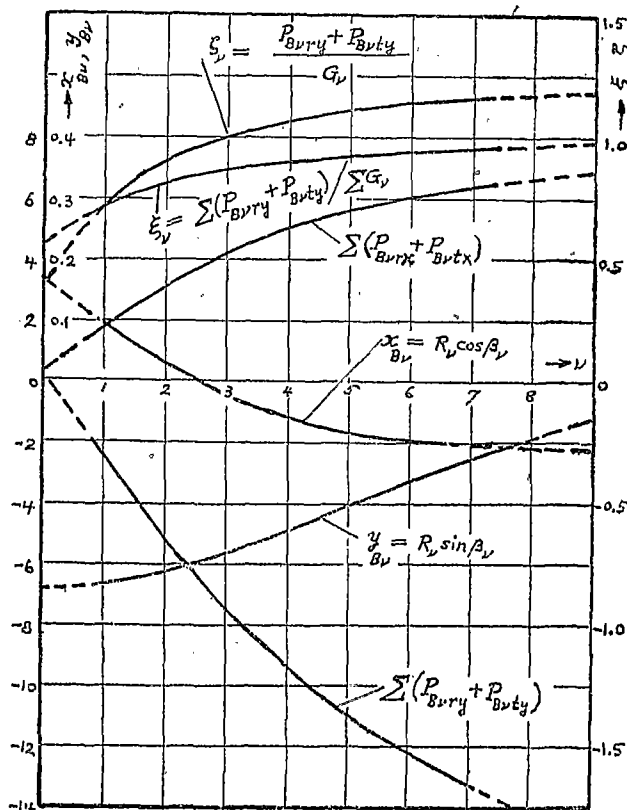


图 23. 碰撞力分量及其着力点的坐标距

以前就曾查明,在 x 方向的碰撞力均为相应的离心力分量所抵消,而只余在 y 方向的碰撞力。因此,也可将此余剩分力与其相应的装载重量相比而写成

$$\xi_v = \frac{\sum (P_{Bvy} + P_{Bvzy})}{\sum G_v}, \quad (116)$$

而为各层则得

$$\zeta_v = \frac{P_{Bvy} + P_{Bvzy}}{G_v}. \quad (117)$$

在设计时的大约估计中,自公式 (116) 得到的比例数字是很有用的。此数大致等于 35%。

再用公式 (101), (102) 及 (106) 运算,即得表 14 中的力矩与相应的扭应力数字及图 24 中的曲线。

表 14. 扭力矩与鼓室壳壁中的扭应力

ν	1	2	3	4	5	6	7
$M_{1\nu}$ 吨公尺	2.63	4.72	6.46	7.75	8.72	9.27	9.56
$M_{2\nu}$ 吨公尺	0.861	1.761	2.666	3.051	4.199	4.706	5.043
M_{ν} 吨公尺	3.491	6.481	9.126	11.251	12.919	13.976	14.603
τ_{ν} 公斤/公分 ²	6.3	11.6	16.4	20.2	23.2	25.1	26.2

自图 24 可以看出,相对静止装载部分及碰撞力在鼓室壳壁中所唤起的扭应力是微不足道的。

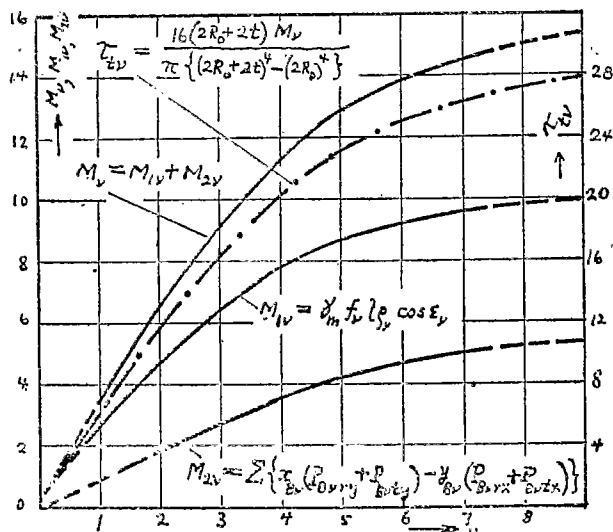


图 24. 扭力矩与鼓室壳壁中的扭应力

(13) 两轴头的外表面压应力

用公式 (104) 进行运算,即得表 15 及图 25。

检查轴头的外表面压应力,应当用公式

$$P_{x\nu} \leq 15 \text{ 至 } 20 \frac{\text{公斤}}{\text{公分}^2} \cdot \frac{\text{公尺}}{\text{秒}}, \quad (118)$$

表 15. 两轴头外表面压应力

ν	1	2	3	4	5	6	7
$ F_{vy} $ 吨	24.08	31.53	37.63	42.42	46.06	48.53	50.09
$P_{\pi\nu} = \frac{ F_{vy} }{2d_z l_z}$ 公斤/公分 ²	9.12	11.92	14.24	16.03	17.41	18.35	18.92

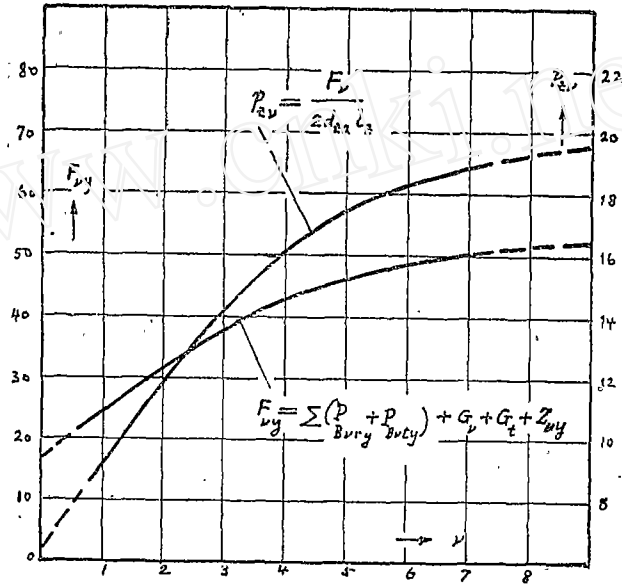


图 25. 轴头外表面压应力

其中,在本文所讨论的情况

$$\nu = \frac{\pi n}{30} r_{za} \approx 0.395 \text{ 公尺/秒},$$

r_{za} 代表轴头的外半径。因此,得允许轴头外表面压力

$$P_s \leq 38 \text{ 至 } 50.6 \frac{\text{公斤}}{\text{公分}^2}.$$

公式(118)是假定有相当满意的液体状态的轴承润滑。若该厂能保证作到液体润滑,则表 15 的压应力是很可以允许的。

(14) 通过轴头的直接传动所引起的各项应力

因为很多的球磨的传动是通过轴头,因此我们应趁此机会把这种结构所引起的应力情况加以检查。此处应当用公式(105), (108)及(109)进行运算,得出的结果列入表 16 内并绘于图 26 中。

自这些数字中可以看出,在直接传动中,轴头中的扭应力仍然是微不足道的。

(15) 弯曲应力依据轴头内径的变化

在球磨的操作中,弯曲应力无疑的是个最危险的因素。这里我们附带为该厂作更进一步的研讨,当轴头的内直径因装料磨损再变大时,轴头的弯曲应力将依什么规律改变。为此,用 $d_{zi} = 224; 230; 235; 240$ 公厘进行运算,则得表 17。

表 16. 为直接传动的各项应力

ν	1	2	3	4	5	6	7
ΣG_ν 吨	8.45	15.50	21.36	26.21	29.91	32.74	34.78
$\tau_{zv} = \frac{16 d_{za} M_\nu}{\pi (d_{za}^4 - d_{zi}^4)}$ 公斤/公分 ²	84	156	219	270	311	336	351
$\sigma_{bv} = \frac{1}{12} \frac{l \sqrt{F_{vx}^2 + F_{vy}^2}}{\frac{\pi}{32} (d_{za}^4 - d_{zi}^4) / d_{za}}$ 公斤/公分 ²	578	756	904	1018	1106	1166	1204
$\tau_{maxv} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{bv}^2 + 4\tau_{zv}^2}$	301	408	503	578	634	674	698

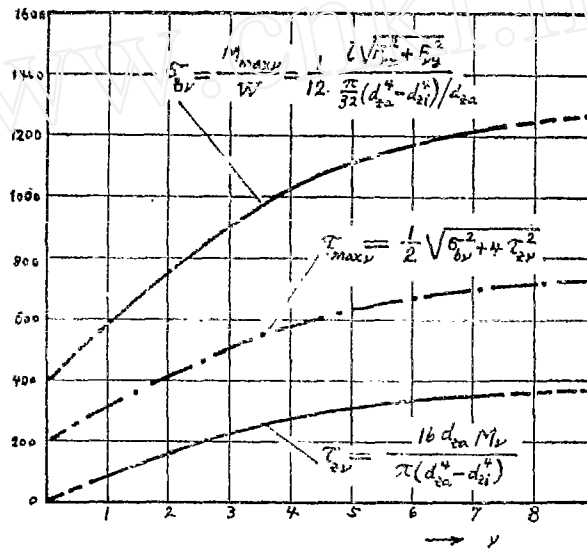


图 26. 直接传动在推动轴头所引起的应力

表 17. 图 27 中的数字

ν	1	2	3	4	5	6	7
ΣG_ν 吨	8.46	15.54	21.36	26.15	29.90	32.74	34.78
N_ν 净马力	105	190	256	307	343	367	382
$\tau_{zv}(d_{zi}=224)$ 公斤/公分 ²	83.8	156	219	270	311	336	351
$\tau_{maxv} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{bv}^2 + 4\tau_{zv}^2} (d_{zi}=224)$ 公斤/公分 ²	301	408	503	578	634	674	698
$\sigma_{bv} = \frac{1}{12} \frac{l \sqrt{F_{vx}^2 + F_{vy}^2}}{\frac{\pi}{32} (d_{za}^4 - d_{zi}^4) / d_{za}}$ (公斤/公分 ²)	$d_{zi}=224$ 578	$d_{zi}=224$ 756	$d_{zi}=224$ 924	$d_{zi}=224$ 1018	$d_{zi}=224$ 1106	$d_{zi}=224$ 1166	$d_{zi}=224$ 1204
	$d_{zi}=230$ 592	$d_{zi}=230$ 775	$d_{zi}=230$ 946	$d_{zi}=230$ 1042	$d_{zi}=230$ 1133	$d_{zi}=230$ 1193	$d_{zi}=230$ 1235
	$d_{zi}=235$ 616	$d_{zi}=235$ 806	$d_{zi}=235$ 983	$d_{zi}=235$ 1085	$d_{zi}=235$ 1180	$d_{zi}=235$ 1243	$d_{zi}=235$ 1285
	$d_{zi}=240$ 646	$d_{zi}=240$ 845	$d_{zi}=240$ 1031	$d_{zi}=240$ 1139	$d_{zi}=240$ 1238	$d_{zi}=240$ 1305	$d_{zi}=240$ 1350

此外, 图 27 中亦有功率曲线; 但应请注意, 其中未包括传动中的任何摩擦损耗功率. 为使应用便利, 图 27 的横坐标曾改用装载重量, 以吨计算.

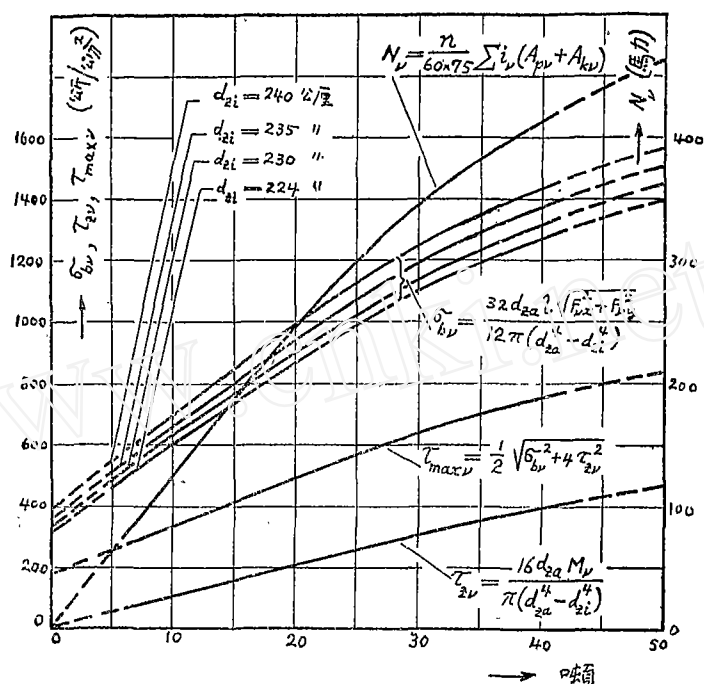


图 27. 轴头的弯曲应力及球磨的功率依据装载重量的改变

十二、結 論

本文趁解决某厂在提高生产中迫切的球磨装料问题,曾扩大研究范围,把球磨的操作原理作了较多的研究。本文这里导出的主要关系可以说是:

- (1) 核算球磨装载因数的严格方程(49);
- (2) 核算球磨净消耗功率方程(70a);
- (3) 推算在落着点处在运动方向的最大碰撞力方程(85);
- (4) 推算在落着点处垂直于运动方向的最大碰撞力方程(86);
- (5) 总力方程(99);
- (6) 总力转矩方程(103)。

此外,尚有两个间接的重要的关系:

- (A) 在鼓室内抛物线的长度方程(41);
- (B) 抛物线的布占钢球数目条件方程(46)。

参 考 文 献

- [1] Н. П., Аксенов и П. Н., Аксенов, Оборудование литейных цехов, том первый, 1949.
- [2] 粉碎机械的主要指标计算(中央建筑材料工业管理局编译科摘译,重工业出版社出版)。
- [3] 工学硕士 Ю. С. Лулье 著,魏兴元译,水泥工业中的粉碎与粉磨,重工业出版社出版。
- [4] 工学硕士穆·斯·哥金斯基讲师著,工学博士伏·恩·容克教授编译,中央重工业部设计司翻译科,赵维彰译,水泥厂设计原理,重工业出版社出版。
- [5] 重工业部建筑材料工业管理局编,苏联建筑材料工业先进经验介绍。
- [6] Л. Г. 卡隆特金著,大连工学院化工原理组研究生合译,化工原理。

BESTIMMUNG DES FÜLLUNGSKOEFFIZIENTEN FÜR DIE ABSOLUTE MAXIMALE ZERMAHLUNGSPRODUKTIVITÄT UND DER KRÄFTENVERHÄLTNISSE BEIM BETRIEB DER KUGELMÜHLE

VON LIU HSIEN-CHIEH

(Techn. Hochschule, Tsingtau, Seebauung)

ÜBERSICHT

Obgleich ich vermuten darf, dass sehr wahrscheinlich in verschiedenen Ländern zahlreiche Literatur über Kugelmühle bereits vorhanden sei, muss ich das Warten auf diese mindestens in diesem Augenblick mir nicht zugängliche Literatur verzichten und selbst die Untersuchung der Kugelmühle als eine kleine Forschungsarbeit aufnehmen, weil unsere Industrie die Antwort der bereits im Titel ausgestellte Frage dringend erwartet.

Nach Aufstellung der Flugbahnlänge der Kugel innerhalb der Kugelmühle

$$S_{pv} = \frac{1}{2} \left\{ \sin \alpha_v \cos \alpha_v (1 + 3\sqrt{1 + 8\sin^2 \alpha_v}) + \cos^3 \alpha_v \log_e \frac{3 \sin \alpha_v + \sqrt{1 + 8\sin^2 \alpha_v}}{1 - \sin \alpha_v} \right\} R_v \quad (41)$$

wurde der Füllungskoeffizient für die absolute maximale Zermahlungsproduktivität der Kugelmühle abgeleitet:

$$\lambda = \frac{4r_0}{\pi R_0^2} \sum_{v=1}^N R_v (\pi - 2\alpha_v + 2 \sin \alpha_v \cos \alpha_v), \quad (49)$$

wobei r_0 der Halbmesser der Kugel, R_0 der innere Halbmesser des Trommels, α_v der jeweilige Ablösungswinkel der Kugel von der Kugelschichten und N die Anzahl der zulässigen Kugelschichten bedeuten.

Der Leistungsbedarf für den Antrieb der Kugelmühle ohne Berücksichtigung der Reibungsverluste gewinnt den folgenden Ausdruck

$$L = 4\pi \sum_{v=1}^N \frac{G_v R_v \sin^2 \alpha_v \cos \alpha_v + \frac{\omega^2}{8g} G_v R_v^2}{\pi - 2\alpha_v + \sin 2\alpha_v}, \quad (70)$$

wobei G_v das im Beharrungszustand in jeweiliger Kugelschicht enthaltene Ladungsgewicht, ω die Winkelgeschwindigkeit der Trommels und g die Erdbeschleunigung darstellen.

Zuletzt ist es vielleicht noch notwendig zu erwähnen, dass die im übrigen Teil der Arbeit bei der Untersuchung der Kräfteverhältnisse der Kugelmühle im Betrieb gewonnenen Resultate beim Entwurf der Kugelmühle nützlich sein mögen.