第3卷 第1期　　力 学 学 报　　Vol. 3, No. 1
1959年1月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Jan., 1959

关于压桿在蠕变条件下之稳定問題*

黄 克 智
(清 华 大 学)

提 要

在討論压桿在蠕变条件下的稳定問題时，許多作者[1-5]均假設压桿有初曲率，故实际上所討論的是微弯桿的縱向弯曲問題而不是直桿的稳定問題. 拉波特諾夫[6]等根据蠕变强化理論(Теория упрочнения ползучести)討論了直桿及平板的稳定問題，推出了临界时間的公式. 本文根据蠕变后效理論(Теория наследственной ползучести)[7]討論等直压桿的稳定，得到了临界时間 t_{cr} 的公式. 此公式証实了忻利[8]关于根据切向模量求临界状态的看法. 文中証明在过了临界时間 t_{cr} 以后的任一时刻 t_0，压桿将可能丧失稳定，并求出压桿外弯的形状及外弯速度[見(16)式].

假設桿的断面为工字形，且弯曲只在腹鈑平面內为可能. 以 F 表示每个翼緣的面积，两翼緣間之距离(即断面高度)为 $2h$. 設翼緣的厚度較之 h 甚小，則断面可以看作是由两个相距为 $2h$ 的集中面积 F 所組成 (图 1). 討論这种理想断面在数学計算上带来很大的簡化，而所得的結果仍足以闡明現象的基本特点.

按照蠕变后效理論[7]，在单向应力状态下，变形 ε 与应力 σ 之关系为:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

其中 t 为时間，K 为核函数，$\varphi(\varepsilon)$ 为单向压縮(或拉伸)試驗时表示应力与变形之关系的函数. 函数 K 与 φ 均由試驗定出，但必須注意，此处函数 $\varphi(\varepsilon)$ 并不是单值的. 当 ε 值減小时，$\varphi(\varepsilon)$ 比例地減小，比例常数为楊氏彈性系数[图 2 (a)].

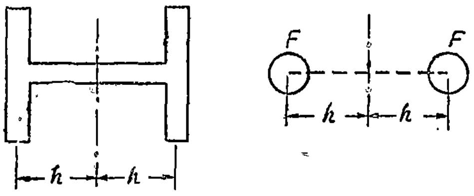


图 1

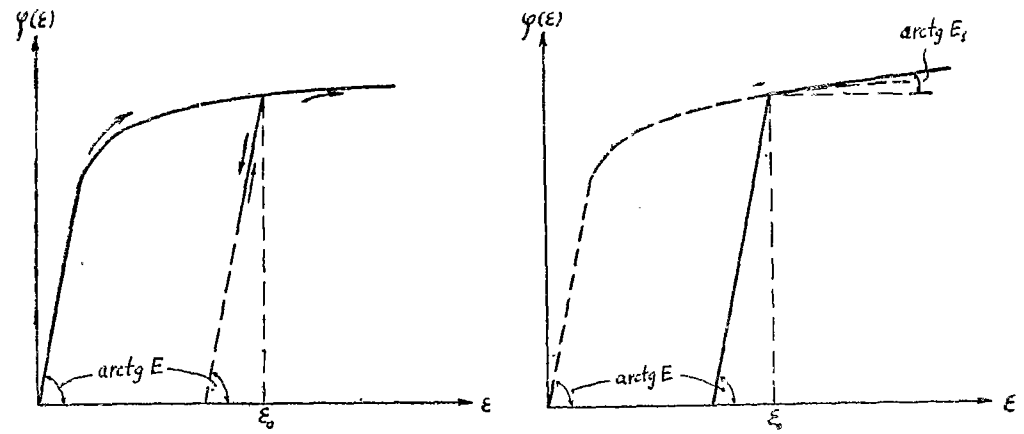
設自某一时刻 $(t=0)$ 开始作用于直桿之軸向压力为 P，且設其值不随时間而变化. 求在此軸向压力 P 作用下桿的应力和变形. 如果桿不向外弯曲，則断面上应力恆为均匀分布 $(\sigma \equiv P/2F)$，故由(1)式得:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{P}{2F}[1 + H(t)], \tag{2}$$

其中

$$H(t) = \int_0^t K(\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

* 1958年10月25日收到.



(a) (b)

图 2

由此可求得变形 $\varepsilon(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$．我們的目的在于研究除了上述的显然解以外是否还存在其他的解．

令 t_0 为压桿丧失稳定(即开始向外弯曲)的时刻．此时之变形 ε_0 可由(2)式求得:

$$\varphi(\varepsilon_0) = \frac{P}{2F}[1 + H(t_0)]. \tag{4}$$

如果我們只限于研究丧失稳定以后短时間內的情况，则 $\varphi(\varepsilon)$ 曲綫可用两段直綫来代替[图 2(b) 中实綫所示]:

$$\varphi_+(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon_0) + E_1(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad 当 \quad \varepsilon \geqslant \varepsilon_0, \tag{5a}$$

$$\varphi_-(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon_0) + E(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad 当 \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_0; \tag{5b}$$

其中 E_1 代表切向模量:

$$E_1 = \frac{d\varphi}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = \varphi'(\varepsilon_0).$$

以 v 表示挠度，则在桿之弯曲状态下，两翼緣內之应力各为

$$\sigma_L = \frac{P}{2F}(1 + w), \quad \sigma_R = \frac{P}{2F}(1 - w), \tag{6}$$

其中 $w = v/h$，标記 L 表示向內凹的翼緣，标記 R 表示向外凸的翼緣(图 3)．两翼緣之变形 ε_L 与 ε_R 满足关系式:

$$\varepsilon_L - \varepsilon_R = -\frac{2h^2}{l^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \tag{7}$$

式中 l 为桿长，$\xi = x/l$ 为无量綱坐标．

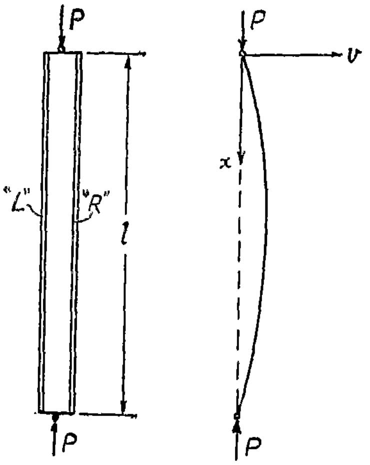


图 3

假設桿的两端为鉸支，由于对称，我們可以只討論桿的一半 $\left(0 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}\right)$．对于內凹翼緣，在桿发生弯曲时变形 ε_L 之值增加，故 $\varphi(\varepsilon)$ 如 (5a) 式．由于在端截面上弯矩恆为零，应力恆为 $P/2F$，故可預料，在桿发生弯曲时，外凸翼緣靠近桿端之某一段 $(0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1)$ 变形 ε_R 之值增加，$\varphi(\varepsilon)$ 如 (5a) 式而靠近桿中央之一段

$\left(\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}\right)$ 变形 ε_R 之値減少，$\varphi(\varepsilon)$ 如(5b)式.

$$
\begin{aligned}
\varphi(\varepsilon_L) &= \varphi_+(\varepsilon_L) \qquad \text{当} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}, \\
\varphi(\varepsilon_R) &= \varphi_+(\varepsilon_R) \qquad \text{当} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1, \\
&= \varphi_-(\varepsilon_R) \qquad \text{当} \quad \xi_1 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

利用(1)，(4)—(8)式，可得决定撓度函数 $w(\xi, t)$ 之方程如下：

$$
\begin{aligned}
&\frac{2h^2}{l^2} E_1 \frac{\partial^2 w(\xi,t)}{\partial \xi^2} + \frac{P}{F} w(\xi,t) + \frac{P}{F}\int_0^t K(t-\tau) w(\xi,\tau)\, d\tau = 0 \qquad \text{当}\ 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1, \\
&\frac{2h^2}{l^2} E_1 \frac{\partial^2 w(\xi,t)}{\partial \xi^2} + \frac{P}{2F}\left(1+\frac{E_1}{E}\right) w(\xi,t) + \frac{P}{2F}\left(1+\frac{E_1}{E}\right)\int_0^t K(t-\tau) w(\xi,\tau)\, d\tau + \\
&\qquad + \frac{P}{2F}\left(1-\frac{E_1}{E}\right)[H(t) - H(t_0)] = 0 \qquad \text{当}\ \xi_1 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

以 $\bar{t}$ 表示自丧失稳定时刻开始計算之时間，即 $\bar{t} = t - t_0$. 若以 $\xi, \bar{t}$ 作为自变量，由于在丧失稳定以前挠度为零 ($w(\xi,\bar{t}) = 0$，当 $\bar{t} \leqslant 0$)，(9)式成为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 w(\xi,\bar{t})}{\partial \xi^2} + \mu\left[w(\xi,\bar{t}) + \int_0^{\bar{t}} K(\bar{t}-\bar{\tau}) w(\xi,\bar{\tau})\, d\bar{\tau}\right] = 0 \qquad \text{当}\ 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1, \\
&\frac{\partial^2 w(\xi,\bar{t})}{\partial \xi^2} + \lambda\left[w(\xi,\bar{t}) + \int_0^{\bar{t}} K(\bar{t}-\bar{\tau}) w(\xi,\bar{\tau})\, d\bar{\tau}\right] + \\
&\qquad + C[H(\bar{t}+t_0) - H(t_0)] = 0 \qquad \text{当}\ \xi_1 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2};
\end{aligned} \tag{10}
$$

式中

$$
\mu = \frac{\pi^2 E}{E_1}\frac{P}{P_\ni} = \frac{\pi^2 P}{p_{Cr}}, \qquad \lambda = \frac{\pi^2}{2}\left(1+\frac{E}{E_1}\right)\frac{P}{P_\ni} = \frac{\pi^2 P}{P_{Cr}}, \qquad C = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{E}{E_1} - 1\right)\frac{P}{P_\ni},
$$

而 $P_\ni$ 表示欧拉弹性临界载荷（按弹性模量計算），p_{Cr} 表示忻利[9,10]临界载荷（按切向模量計算），P_{Cr} 为卡尔曼-恩格塞尔临界载荷（按折減模量計算）：

$$
P_\ni = \frac{2\pi^2 EFh^2}{l^2}, \qquad p_{Cr} = \frac{2\pi^2 E_1 Fh^2}{l^2}, \qquad P_{Cr} = \frac{2\pi^2 Fh^2}{l^2}\cdot\frac{2EE_1}{E+E_1}.
$$

关于核函数 $K(\bar{t}-\bar{\tau})$，根据拉波特諾夫[7,11]的建議，假設为阿貝耳型：

$$
K(\bar{t}-\bar{\tau}) = A\frac{(\bar{t}-\bar{\tau})^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{11}
$$

其中 A 为决定于材料性质的常数. 故由(3)，得

$$
H(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} K(\bar{\tau})\, d\tau = A\frac{\bar{t}^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.
$$

撓度函数 $w(\xi,\bar{t})$ 所必須滿足的边界条件及連續条件是

$$
w(\xi,\bar{t}) = 0 \quad \text{当}\ \xi = 0, \quad \frac{\partial w(\xi,\bar{t})}{\partial \xi} = 0 \quad \text{当}\ \xi = \frac{1}{2}, \quad w, \frac{\partial w}{\partial \xi}\ \text{为連續} \quad \text{当}\ \xi = \xi_1. \tag{12}
$$

求解微分积分方程 (10) 甚为困难. 但若我們只限于研究丧失稳定以后短时間內的情况(即在 $\bar{t}=0$ 附近的情况),則只須借助拉普拉斯变换求 $w(\xi,\bar{t})$ 在 $\bar{t}=0$ 附近的漸近公式.

以記号"$*$"表示經过拉普拉斯变换以后所得的函数,用記号"•—○"表示变换的对应关系. 由(11)式,可得

$$K^*(s)=\frac{A}{s^{1-\alpha}} \bullet\!\!-\!\!\circ\; A\frac{\bar{t}^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}=K(\bar{t}) \qquad (0<\alpha<1),$$

$$H^*(s)=\frac{A}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{e^{st_0}}{s^{2-\alpha}}Q(st_0,2-\alpha) \bullet\!\!-\!\!\circ\; A\frac{(\bar{t}+t_0)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}=H(\bar{t}+t_0),$$

其中 Q 为不完全 Γ 函数,即

$$Q(x,\nu)=\int_x^\infty e^{-\eta}\eta^{\nu-1}d\eta.$$

微分积分方程(10)經过拉普拉斯变换以后成为

$$\frac{\partial^2 w^*(\xi,s)}{\partial\xi^2}+\mu\left(1+\frac{A}{s^{1-\alpha}}\right)w^*(\xi,s)=0 \qquad \text{当}\quad 0\leqslant\xi\leqslant\xi_1,$$

$$\frac{\partial^2 w^*(\xi,s)}{\partial\xi^2}+\lambda\left(1+\frac{A}{s^{1-\alpha}}\right)w^*(\xi,s)+\frac{CA}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\frac{e^{st_0}}{s^{2-\alpha}}Q(st_0,2-\alpha)-\frac{t_0^{1-\alpha}}{s}\right]=0 \qquad (13)$$

$$\text{当}\quad \xi_1\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{2};$$

而边界条件及連續条件(12)則成为

$$w^*(\xi,s)=0 \qquad \text{当}\quad \xi=0,$$

$$\frac{\partial w^*(\xi,s)}{\partial\xi}=0 \qquad \text{当}\quad \xi=\frac{1}{2}, \qquad (14)$$

$$w^*,\ \frac{\partial w^*}{\partial\xi}\ \text{为連續} \qquad \text{当}\quad \xi=\xi_1.$$

由(13),(14)可解出 $w^*(\xi,s)$. 令 $s\to\infty$,可得 $w^*(\xi,s)$ 之漸近公式:

$$w^*(\xi,s)\sim\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\frac{(1-\alpha)CA}{\lambda\Gamma(2-\alpha)}\frac{\sin(\sqrt{\mu}\,\xi)}{\mathrm{ctg}\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{1-2\xi_1}{2}\right)\cos(\sqrt{\mu}\,\xi_1)-\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\sin(\sqrt{\mu}\,\xi_1)}\frac{t_0^{-\alpha}}{s^2}$$

$$\text{当}\quad 0\leqslant\xi\leqslant\xi_1,$$

(15)

$$w^*(\xi,s)\sim\frac{(1-\alpha)CA}{\lambda\Gamma(2-\alpha)}\left[\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{1-2\xi}{2}\right)}{\cos\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{1-2\xi_1}{2}\right)-\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,\mathrm{tg}(\sqrt{\mu}\,\xi_1)\sin\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{1-2\xi_1}{2}\right)}-1\right]\frac{t_0^{-\alpha}}{s^2}$$

$$\text{当}\quad \xi_1\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{2}.$$

由(15)可知(見[10]),原函数(即逆变换) $w(\xi,\bar{t})$ 必存在,且在 $\bar{t}=0$ 附近之漸近公式为

(注意 $\bar{t} = t - t_0$)

$$w(\xi,\bar{t}) \sim \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \frac{(1-\alpha)CA}{\lambda\Gamma(2-\alpha)} \frac{\sin(\sqrt{\mu}\,\xi)}{\mathrm{ctg}\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{1-2\xi_1}{2}\right)\cos(\sqrt{\mu}\,\xi_1) - \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\sin(\sqrt{\mu}\,\xi_1)} \times$$

$$\times\, t_0^{-\alpha}(t - t_0) \quad \text{当} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1, \tag{16}$$

$$w(\xi,\bar{t}) \sim \frac{(1-\alpha)CA}{\lambda\Gamma(2-\alpha)}\left[\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{1-2\xi}{2}\right)}{\cos\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{1-2\xi_1}{2}\right) - \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,\mathrm{tg}(\sqrt{\mu}\,\xi_1)\sin\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{1-2\xi_1}{2}\right)} - 1\right] \times$$

$$\times\, t_0^{-\alpha}(t - t_0) \quad \text{当} \quad \xi_1 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}.$$

至此为止，ξ_1 之値尙未确定．根据 ξ_1 之定义，在开始丧失稳定时(卽 $t = t_0$ 时)，外凸翼緣在 $\xi = \xi_1$ 处之 $\dot{\varepsilon}_R = \frac{d\varepsilon_R}{dt}$ 値为零．由(1)，利用部分求积方法，可得

$$\begin{aligned}\varphi(\varepsilon) &= \sigma(t) + H(t)\sigma(0) + \int_0^t H(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau)d\tau, \\ \varphi'(\varepsilon)\dot{\varepsilon} &= \dot{\sigma}(t) + K(t)\sigma(0) + \int_0^t K(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{17}$$

由此，利用(6)及(16)，并注意当 $t \leqslant t_0$ 时 $w \equiv 0$，得决定 ξ_1 之条件：

$$\dot{\sigma}_R(\xi_1,t_0) + K(t_0)\frac{P}{2F} = 0, \tag{18}$$

其中

$$\dot{\sigma}_R(\xi_1,t_0) = -\frac{P}{2F}\dot{w}(\xi_1,t_0) = -\frac{P}{2F}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\frac{(1-\alpha)CA}{\lambda\Gamma(2-\alpha)} \times$$

$$\times \frac{\sin(\sqrt{\mu}\,\xi_1)\,t_0^{-\alpha}}{\mathrm{ctg}\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{1-2\xi_1}{2}\right)\cos(\sqrt{\mu}\,\xi_1) - \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\sin(\sqrt{\mu}\,\xi_1)},$$

$$K(t_0) = A\frac{t_0^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

(18)式化簡后成为

$$\mathrm{tg}\left[\sqrt{\frac{1+\beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{P}{\beta P_\ni}}\left(\frac{1}{2} - \xi_1\right)\pi\right] = \sqrt{\frac{1+\beta}{2}}\,\mathrm{ctg}\left(\sqrt{\frac{P}{\beta P_\ni}}\,\xi_1\pi\right), \tag{19}$$

其中 $$\beta = E_1/E.$$

(19)式給出 P，β 与 ξ_1 三量間之关系，如图 4 所示．图 4 中之阴影部分表示压桿可能丧失稳定之区域．当載荷 P 值为一定时，給定 β 值可求出相应的 ξ_1 值．由此可得下述結論：

1) 若桿的材料是具有弹性后效的介质 ($\varphi(\varepsilon) = E\varepsilon$, $\beta \equiv 1$)，则当 $P < P_\ni$ 时，压桿

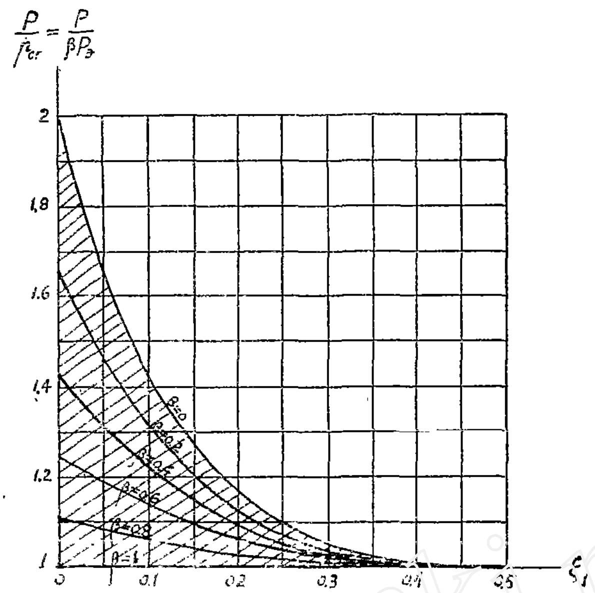


图 4

不可能丧失稳定;

2）若桿的材料是具有后效的非弹性介质（$0 \leqslant \beta \leqslant 1$），则当 $\beta \leqslant \frac{P}{P_Э}$ 时，压桿可能丧失稳定．当桿受軸向压力时，β 值随着时間而減少．由条件 $\beta = \frac{P}{P_Э}$ 所决定之时間 t_{cr} 称为临界时間．在临界时間以后（即 $t \geqslant t_{cr}$），桿随时可丧失稳定．丧失稳定时桿向外弯曲之速度 $\dot{w}$ 由(16)式决定，其値因丧失稳定之时刻 t_0 而异．

由于目前在已公开发表的文献中，就作者所知，还很少有在蠕变条件下稳定試驗的可靠数据．所以本文的結果未能与試驗結果相比較．蠕变后效理論用于构件应力与变形的計算时是一种比較好的理論；至于它是否能用于稳定問題的計算，則有待于試驗之証实．

在本文写作过程中承拉波特諾夫院士提供宝貴意見，謹此誌謝．

参 考 文 献

[1] Hoff, N. J., Buckling and stability. *Journal of the Royal Society*, 58, No. 517, 1954.

[2] Hoff, N. J., Creep buckling. *The Aeronautical Quarterly*, 7, Part 1, 1956, pp. 1—20.

[3] Patel, Sharad A., Buckling of columns in the presence of creep. *The Aeronautical Quarterly*, 7, Part 2, 1956, pp. 125—134.

[4] Розенблюм, В. М., Устойчивость сжатого стержня в состоянии ползучести. Инженерный сборник. т. 18, 1954, стр. 99—104.

[5] Carlson, R. L., Schwape, A. D., A method for estimating allowable load capacities of columns subjected to creep. Proceedings of the 2nd U. S. National Congress of Applied Mechanics, 1955, pp. 563—568.

[6] Работнов, Ю. Н., Шестериков, С. А., Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести, *ПММ*, т. 21, в. 3, 1957.

[7] Работнов, Ю. Н., Расчет деталей машин на ползучеств. *Изв. АН Отдел. техн. наук*, № 6, 1948.
[8] Shanley, F. R., Weight-strength analysis of aircraft structures, 1952.
[9] Shanley, F. R., Inelastic column theory. *J. Aeronaut, Sci.*, 14, No. 5, 1947.
[10] Работнов, Ю. Н., О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности. Инженерный сборник, т. 11, 1952.
[11] Работнов, Ю. Н., Равновесие упругой среды с последействием. *ПММ*, т. 12, в. 1, 1948.
[12] Doetsch, G., Handbuch der. Laplace-Transformation, T. I, S. 503, 1950.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ ПРИ УСЛОВИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Хуан Кэ-чжи

(*Политехнический институт Чин-Хуа*)

В работе рассматривается устойчивость сжатого стержня на основе теории наследственной ползучести Ю. Н. Работнова. Для простоты предполагается, что поперечное сечение стержня является двутавровым или двухточечным (Фиг. 1) и выпучивание происходит в плоскости стенки. Закон деформации имеет вид (1), где $\varphi(\varepsilon)$—функция зависимости напряжения σ от деформации ε при одноосном сжатии (Фиг. 2а). Если ограничимся только рассмотрением поведения стержня непосредственно после выпучивания (при $t=t_0$), то можем заменить диаграмму $\varphi(\varepsilon)$ двумя ломаными линиями [ур. (5а), (5b), Фиг. 2b]. При выпучивании (когда $t=t_0$) деформации ε_L в вогнутой полке и ε_R на концевых участках ($0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$ и $1-\xi_1 \leqslant \xi \leqslant 1$, где $\xi = x/l$, см. Фиг. 3) выпуклой полки увеличиваются, а деформация ε_R на срединном участке ($\xi_1 \leqslant \xi \leqslant 1-\xi_1$) выпуклой полки уменьшается. Отсюда следуют выражения (8) для $\varphi(\varepsilon)$. Уравнения для прогиба $w(\xi, t)$ имеет вид (9) или (10), где $\bar{t} = t - t_0$—время, отсчитываемое с момента выпучивания t_0. В уравнениях (10) были введены обозначения: P_0—упругая критическая сила по Эйлеру, P_{cr}—критическая сила по Карману-Энгессеру, p_{cr}—критическая сила по Шенли. Принимая ядро $K(t-\tau)$ типа Абеля [см. (7), (10)], путем преобразования Лапласа можем привести уравнения (10) и условия (12) для $w(\xi, \bar{t})$, соответственно, к (13) и (14) для функции отображения $w^*(\xi, s)$. на основе асимптотической формулы (15) для $w^*(\xi, s)$ при $s \to \infty$ можно получить асимптотическое выражение (16) для $w(\xi, \bar{t})$ при $\bar{t} \to 0$. Значение ξ_1 определяется из условия:

$$\dot{\varepsilon}_R = 0, \text{ при } t = t_0 \text{ и } \xi = \xi_1,$$

которое приводится к (18) или (19). Зависимость (19) нанесена в Фиг. 4, где неустойчивые состояния изображаются точками заштрихованной площади. Отсюда следуют следующие выводы:

1) Для упругой среды с последействием ($\varphi(\varepsilon) = E\varepsilon$, $\beta = E_1/E \equiv 1$) потеря устойчивости сжатого стержня невозможна, если $P < P_э$.

2) Для неупругой среды с последействием (среды наследственной ползучести $0 \leqslant \beta \leqslant 1$) потеря устойчивости всегда возможна, если $\beta \leqslant P/P_э$ или, все равно, если $t \geqslant t_{cr}$, где критическое время t_{cr} определяется из условия: $\beta = P/P_э$. Форма выпучивания $w(\xi, t)$ и скорость выпучивания $\dot{w}(\xi, t)$, как видно из (16), зависят от момента времени t_0, когда выпучивание происходит.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Ю. Н. Работнову за его ценные указания в процессе выполнения данной работы.