

用于粘性流体湍流的局部性假设*

Л. Г. 洛强斯基
(列宁格勒, 加里宁工学院)

§1. 问题的现状

目前广泛应用着的湍流和热质交换的半经验理论, 其出发点乃是把整个流场简略地划分为几个截然分开的区域, 在这些区域当中, 摩擦、热输运和质输运或者只具有分子的(层流底层)性质, 或者只具有纯粹克分子的(湍流核心)性质¹⁾. 在它们之间的过渡区域中所存在的规律性还很少有人研究, 通常都应用一些经验关系式. 但是, 对研究物体与其周围的运动介质的热与物质的交换, 研究具有粗糙表面的物体的阻力, 以及对其他许多实际的问题来讲, 对现象仅作这种粗略的考虑是十分不够的.

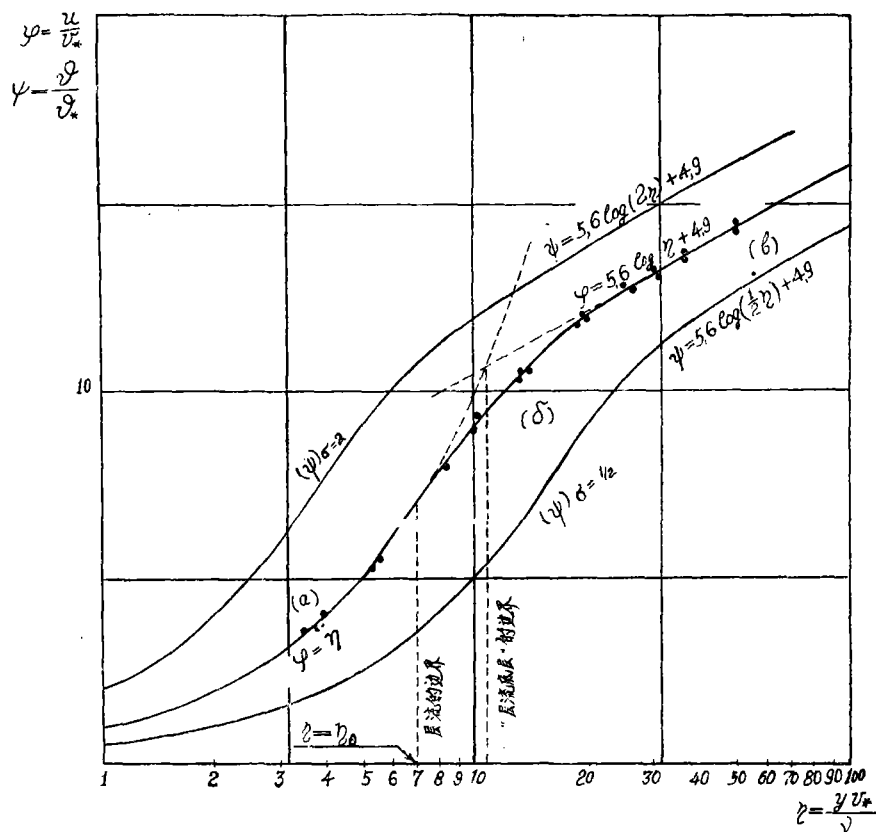


图 1

* 本文系作者于1958年10月25日在北京航空学院作的报告.

1) 克分子就是指我们考虑的最小单位已不是分子而是更大的一团流体——校者注.

根据关于确定物体表面附近的平均速度而进行的实验的结果,其中包括最近时期的结果^[1],可以看出(图1),在由紧邻物体表面的线性速度断面图〔它半对数坐标内是悬链线(a)〕过渡到远离物体表面的对数速度断面图〔它半对数坐标内是直线(b)〕的区域间,有一渐变的过渡区域(c). 已经进行过的研究工作中曾建立了几种表示速度断面图的分析表达式,这种速度断面图包括了上述所有三个区域. 作为这个方向的第一篇著作,我们首先要指出日本学者 K. Wada 的文章^[2]. 为了估计粘性对湍流摩擦的影响,该文提出了公式

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2, \quad (1.1)$$

这个公式乃是纯层流(分子)摩擦与不依赖于分子粘性的湍流(克分子)摩擦二者的简单的叠加. 在这个公式中,第一项代表牛顿定律,第二项代表普朗特公式;两项都对应于极简单的平行于某一平面的直线定常运动.

公式(1.1)的使用是否合理还有着争论,因为在大家熟知的雷诺公式

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} + (-\rho \overline{u'v'}) \quad (1.2)$$

中,第二项代表动量的克分子输运结果,同时还包含着分子粘性的影响,这影响对于过渡区域来讲是重要的,但没有被普朗特公式考虑进去. 由此可见,在关系式(1.1)中,动量的分子输运过程和克分子输运过程的相互影响,被看成是二者的简单的叠加.

公式(1.1)是所有继续沿着上述方向进行研究的基础,特别是不久以前在国外刊物上出现的 B. 萨布列夫斯基^[3]、E. 万-德莱斯特^[4]和 Дж. 迈勒斯^[5]的文章的基础. 在这些文章中,由于这些作者不得不对“混合长” l 的变化律进行修改,这就形成了公式(1.1)的缺点. 例如,上述第二位作者不使用大家熟知的极简单的普朗特公式 $l = \kappa y$,而使用复杂得多的、含有一个新的经验常数 A 的规律

$$l = \kappa y (1 - e^{-y/A}),$$

他以在接近固壁时湍流急遽衰减这种人为的理由来说明规律的正确性. 为了同样的目的,另一些作者则是将量 l 开始增长的点移到离固壁有某一距离的地方,该距离则由实验来确定.

这篇研究论文走的是完全相反的道路. 整个湍流区域内分子过程与克分子过程是有相互作用的,本文把湍流混合机理的局部性假设和关于动量输运与热量输运之间的雷诺比拟推广到整个湍流区域,这就使我们得以对所有现存的半经验理论建立起一个统一的观点,并得到湍流摩擦和热输运的新的公式. 利用这些公式,在与流动方向正交的流场整个横断面内,我们就能建立速度断面图和过剩温度的具有一级连续导数的连续分析表达式,它把层流区域、过渡区域和纯湍流区域都包括在内.

§2. 现代湍流半经验理论中的局部性假设

目前通行的湍流半经验理论,其特点乃是假定它们的微分的性质,即假定纯湍流式(克分子)动量输运过程完全由当地流体物理常数值以及平均流速度对垂直于流动方向坐标轴的导数所确定. 在我们讨论的定常流动中某一点的绝对平均流速以及固定在流动层

上的坐标系的等速平移运动速度二者都不影响湍流输运过程。除此之外,还假定:在离物体表面充分远的地方,克分子交换比分子交换重要,所以与湍流输运相比,忽略掉通常的粘性和热传导,可以不致有大的误差。

这些假定总合起来就是所有现代湍流半经验理论的假设的基础,我们可以把这些假设称之为“湍流输运过程的局部性假设”。

与上述微分的处理办法相反,对湍流输运的任何其他“积分的”观点,也就是考虑到湍流流场内离某点较远处发生的过程对此点影响的观点,直到目前为止,还没有以任何确定的形式提出过。

大家知道^[6],根据上述局部性假设和简单的量纲分析,可以立即得到普朗特和卡门半经验理论公式。作为“一级近似”^[1],如果当地平均速度的变化只由一级导数 $\frac{du}{dy}$ 确定,那么量纲分析告诉我们,必须另外引进某一个长度即普朗特“混合长” $l(y)$ 的概念。没有混合长 $l(y)$,要依据局部性假设在这种近似情况下写出摩擦应力公式,将是不可能的。引进这种长度之后,根据简单的量纲分析,可以立即断定:在上述条件下,以流体的密度 ρ 、“混合长” l 和导数 $\frac{du}{dy}$ 来表达摩擦应力 τ ,只存在着唯一可能的组合

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2; \quad (2.1)$$

这就是大家熟知的普朗特公式。当然, $l(y)$ 的定量的表达式,不能从“一级近似”情形下的局部性假设推演出来,而应该用一些补充考虑得出。

“二级近似”就是用开始的两个导数 $u'(y)$ 和 $u''(y)$ 来给出平均速度的变化。根据同样的量纲分析,可以断定下面的卡门摩擦应力公式是存在的:

$$\tau = \rho \kappa^2 \frac{u'^4}{u''^2}, \quad (2.2)$$

其中 κ 是一个无量纲常数。

到现在为止,在实际中遇到的几乎全部是湍流现象,其中包括湍流边界层中的现象,普朗特公式(2.1)和卡门公式(2.2)一直是进行理论研究的基础。近几年来对 M 数比较大的(其数量级等于或大于4)流动的实验表明,在超声速边界层理论中直接应用普朗特公式是完全容许的。这就再一次肯定了简单的湍流半经验理论在现代技术中有多么大的价值。至于谈到很大的 M 数($M > 8$ 到 10),那么,在这种速度的情形下,通常将发生分子离子化及离解等一些本质上是新的现象,这就根本改变了气体动力学的经典热力学关系式。

把属于不同“近似”(我们强调这一点)的公式(2.1)和(2.2)加以比较,可以得到大家熟知的卡门公式

$$l = -\kappa \frac{u'}{u''}, \quad (2.3)$$

但我们觉得应该认为:“混合长”的概念对湍流唯象理论的“二级近似”是格格不入的。

1) 一级,二级等等近似在本文中只是暂时用的概念,与原意不全同。

半經驗理論之应用于湍流熱輸運過程，其基礎乃是所謂“雷諾比擬”。這種比擬的基礎在于當幾團流体作湍流混合時，動量與熱量的携運者是相同的。根據這種比擬，可以對兩種過程取同一個湍流混合系數，于是

$$\tau = \rho \varepsilon \frac{du}{dy}, \quad q = \rho c_p \varepsilon \frac{d\vartheta}{dy}. \quad (2.4)$$

消去 $\rho \varepsilon$ ，即得雷諾比擬的通常的表达式

$$\frac{q}{\tau} = c_p \frac{d\vartheta}{du}. \quad (2.5)$$

今後我們將只利用雷諾比擬的這個極簡單的公式。關於以固体為邊界的流場中湍流核心的實驗材料已很好地証實了這個公式的正確性。大家知道，在“自由”湍流（射流、尾流）的情形當中，湍流熱輸運系數比動量輸運系數大一倍。根據新的資料，這些系數的比值有時會沿流場的橫向方向變化。目前正在對這一問題進行詳細的研究。

在層流區域內，亦即在純分子熱輸運區域內，下列等式應當是正確的：

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad q = \lambda \frac{d\vartheta}{dy} \quad (2.6)$$

（ λ 是熱傳導系數），因而，(2.5) 式應以下式代替：

$$\frac{q}{\tau} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{d\vartheta}{du} = \frac{c_p}{\sigma} \frac{d\vartheta}{du}, \quad (2.7)$$

這裡引進了普朗特數 σ ，它等於

$$\sigma = \frac{\mu c_p}{\lambda}. \quad (2.8)$$

將表達湍流和層流中“雷諾比擬”的公式(2.5)和(2.7)加以比較，可以看出，只要普朗特數等於 1，兩種情形的比值 $\frac{q}{\tau}$ 將是相同的。

§ 3. 分子交換和克分子交換之間有相互作用時的 局部性假設和雷諾比擬

現在我們取消 §2 中關於分子輸運並不影響克分子輸運的假定，而將局部性假設的應用範圍加以擴大。換句話說，我們將考慮流體的粘性和熱傳導對湍流輸運機理的影響。根據局部性假設，表示這種影響的辦法，應當在摩擦定律和熱輸運定律中引進一些附加的因子，這些因子是當地雷諾數或培克數的函數。所謂當地雷諾數 R ，根據同樣的局部性假設，就是指下述諸量的無量綱組合，而此組合應該與粘性系數的一次方成反比。這些量就是：確定平均速度的變化的量及流體的物理常數——密度和粘性。顯而易見，這種組合可以是比值

$$R = \frac{\varepsilon}{\nu}, \quad (3.1)$$

在這裡，量 ε 有運動粘性系數的因次，它在“一級近似”時是 l 及 $\frac{du}{dy}$ 二量的組合，或在

“二級近似”时是 $\frac{du}{dy}$ 及 $\frac{d^2u}{dy^2}$ 的组合, 以此类推. 就其对这些量的依赖形式而言, ϵ 不是别的东西, 它恰好是无粘性情形下湍流交换的动力系数, 因此, 在“一級近似”时, 有¹⁾

$$R = \frac{l^2}{\nu} \frac{du}{dy}, \quad (3.2)$$

在“二級近似”时, 有

$$R = \frac{u'^3}{\nu u''^2}. \quad (3.3)$$

所谓当地培克数 P , 就与通常所用的一样, 我们将指当地雷诺数同普朗特数的乘积, 即

$$P = \sigma R = \frac{\rho c_p \epsilon}{\lambda}. \quad (3.4)$$

于是, 下列摩擦和热输送的公式就是广义局部性假设的定量的表达式

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} f(R) = \rho \nu \frac{du}{dy} f\left(\frac{\epsilon}{\nu}\right), \quad (3.5)$$

$$q = \lambda \frac{d\vartheta}{dy} f_1(P) = \lambda \frac{d\vartheta}{dy} f_1(\sigma R) = \lambda \frac{d\vartheta}{dy} f_1\left(\frac{\rho c_p \epsilon}{\lambda}\right). \quad (3.6)$$

关于函数 f 和 f_1 , 暂时只知道: 在层流区域和热输运区域内, 二者都等于 1, 这对应于牛顿和傅利叶定律(2.6); 在纯湍流交换区域内, 则分别等于自己的自变数. 只有在这种情形下, 起源于分子现象的量 ν 和 λ 才能不在公式(3.5)和(3.6)中出现, 而公式取(2.4)的形状.

由比得知, 函数 f 和 f_1 在各自的自变数的变化范围,

$$0 \leq R \leq R_0 \quad \text{和} \quad 0 \leq \sigma R \leq \sigma R_0$$

内是相同的(其中 R_0 是相应于层流区域的边界的当地临界雷诺数), 并且当这些自变数无限增加时, 它们各自逐渐趋近于自己的自变数. 除此之外, 从 $R = R_0$ 点开始, 除分子交换现象外, 还发生数值大得多的克分子交换现象; 代表过渡区域内的摩擦跟层流区域内的摩擦之比的函数 $f(R)$ 则应当急遽地增加.

函数 $f(R)$ 的这种性质可以用线段 AZ (图 2) 及以 $t = \pm R$ 为渐近线的等边双曲线的一个分枝来表示. 于是, 函数 $f(R)$ 在 R 的整个变化区间的分析表达式将是函数

$$f(R) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 0 \leq R \leq R_0 \text{ 时,} \\ \sqrt{R^2 - R_0^2 + 1} & \text{当 } R_0 \leq R \text{ 时.} \end{cases} \quad (3.7)$$

完全重复上述讨论, 可以给出函数 $f_1(\sigma R)$ 的分析表达式

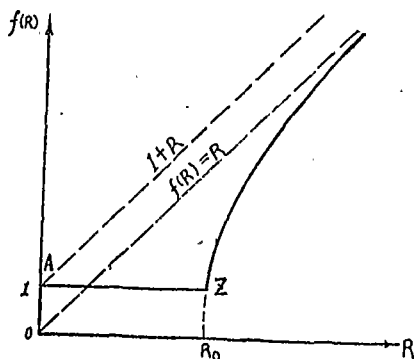


图 2

1) 在“一級近似”情形下的当地雷诺数的概念, 大概是在我们的旧作^[7]中首次出现. 那些文章是考虑相似性理论对湍流理论的应用.

$$f_1(\sigma R) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 0 \leq R \leq R_0 \text{ 时,} \\ \sqrt{\sigma^2 R^2 - \sigma^2 R_0^2 + 1} & \text{当 } R_0 \leq R \text{ 时.} \end{cases} \quad (3.8)$$

这就证明,如果对纯克分子交换区域内的雷诺比拟用了前面所述的解释,并认为湍流混合系数 ϵ (或 A) 不论对动量输运而言或是对热输运而言都是相同的,那么,函数 f 和 f_1 也可以认为是相同的.

现在回到公式(3.5)和(3.6),我们得到下列广义雷诺比拟公式:

$$\frac{q}{\tau} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{f(\sigma R)}{f(R)} \frac{d\vartheta}{du} = \frac{c_p}{\sigma} \frac{f(\sigma R)}{f(R)} \frac{d\vartheta}{dx}. \quad (3.9)$$

可以直接看出,在动量输运过程和热输运过程具有纯分子性质的区域中 ($f=1$), 公式(2.7)是正确的;而在纯克分子交换区域中 [$f(R)=R$, $f(\sigma R)=\sigma R$], 公式(2.5)是正确的. 刚才得到的公式(3.9)指明: 在分子与克分子过程互相作用的混合区域中,普朗特数 σ 如何影响着传热量与摩擦应力之比值.

再回到公式(3.5)和(3.6),并以(3.7)和(3.8)中的值来代替其中的函数 f 和 f_1 , 我们得到 τ 和 q 的最终表达式:

$$\tau = \begin{cases} \mu \frac{du}{dy} & \text{当 } 0 \leq R \leq R_0 \text{ 时,} \\ \mu \frac{du}{dy} \sqrt{R^2 - R_0^2 + 1} & \text{当 } R_0 \leq R \text{ 时;} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$q = \begin{cases} \lambda \frac{d\vartheta}{dy} & \text{当 } 0 \leq R \leq R_0 \text{ 时,} \\ \lambda \frac{d\vartheta}{dy} \sqrt{\sigma^2 R^2 - \sigma^2 R_0^2 + 1} & \text{当 } R_0 \leq R \text{ 时;} \end{cases} \quad (3.11)$$

这里 $R = \frac{\epsilon}{\nu}$, 而如何用平均速度的当地导数 (及长度 l) 来表达 ϵ 则要看选取了那种近似而定.

§ 4. “一级近似”法中定常流速度断面图的确定

考虑“一级近似”,并且为简单起见,考虑光滑表面附近没有纵向压力落差的定常湍流情形. 遵循普朗特的作法^[8],取

$$\tau = \text{常数} = \tau_w, \quad l = \kappa y, \quad (4.1)$$

其中 τ_w 是光滑表面上的摩擦应力, κ 是根据实验定出的常数. 于是有

$$\epsilon = l^2 \frac{du}{dy} = \kappa^2 y^2 \frac{du}{dy},$$

而在层流区域的边界 $y = y_0$ 上有

$$\epsilon_0 = \kappa^2 y_0^2 \left(\frac{du}{dy} \right)_0, \quad (4.2)$$

方程(3.10)则分成两个方程:

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy} \quad \text{当 } 0 \leq y \leq y_0 \text{ 时,} \quad (4.3)$$

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy} \sqrt{\frac{\kappa^4 y^4 \left(\frac{du}{dy}\right)^2}{v^2} - \frac{\kappa^4 y_0^4 \left(\frac{du}{dy}\right)_0^2}{v^2} + 1} \quad \text{当 } y_0 \leq y \text{ 时.} \quad (4.4)$$

引进通用坐标

$$\varphi = \frac{u}{v_*}, \quad \eta = \frac{y v_*}{v}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}; \quad (4.5)$$

此时方程有如下形状:

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = 1 \quad \text{当 } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \text{ 时,} \quad (4.6)$$

$$\frac{d\varphi}{d\eta} \sqrt{\kappa^4 \eta^4 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 - \kappa^4 \eta_0^4 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_0^2 + 1} = 1 \quad \text{当 } \eta_0 \leq \eta \text{ 时.} \quad (4.7)$$

由第一个方程推知

$$\varphi = \eta \quad \text{当 } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \text{ 时.} \quad (4.8)$$

注意到 $\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_0 = 1$ 并在第二个方程中解出 $\frac{d\varphi}{d\eta}$, 我们得到

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \sqrt{\frac{\kappa^4 \eta_0^4 - 1 \pm \sqrt{(\kappa^4 \eta_0^4 - 1)^2 + 4\kappa^4 \eta^4}}{2\kappa^4 \eta^4}},$$

或者很自然地只保留上面的符号, 并将右端稍加改变, 得到

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \sqrt{\frac{\kappa^4 \eta_0^4 - 1}{2\kappa^2 \eta^2}} + \sqrt{\frac{(\kappa^4 \eta_0^4 - 1)^2}{4\kappa^4 \eta^4} + 1} \cdot \frac{1}{\kappa \eta}. \quad (4.9)$$

作替换

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{\kappa^4 \eta_0^4 - 1}{2\kappa^2 \eta^2}} + \sqrt{\frac{(\kappa^4 \eta_0^4 - 1)^2}{4\kappa^4 \eta^4} + 1}, \\ z &= z_0 = \kappa \eta_0 \quad \text{当 } \eta = \eta_0 \text{ 时,} \\ z &= 1 \quad \text{当 } \eta = \infty \text{ 时,} \\ z_0 &\geq z \geq 1, \end{aligned} \quad (4.10)$$

就得到积分

$$\varphi = \eta_0 + \frac{1}{\kappa} (z_0 - z) + \frac{2}{\kappa} \int_z^{z_0} \frac{dz}{z^4 - 1}, \quad (4.11)$$

这已经满足了问题的边界条件

$$\varphi = \eta_0 \quad \text{当 } \eta = \eta_0 \text{ 时.} \quad (4.12)$$

求出(4.11)右端的积分后, 就得到了用通用坐标表示的速度分布:

$$\varphi = \begin{cases} \eta & \text{当 } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \text{ 时,} \\ \eta_0 + \frac{1}{\kappa} [\theta(z_0) - \theta(z)] & \text{当 } \eta \geq \eta_0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (4.13)$$

其中曾令

$$\theta(z) = z - \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - \operatorname{arctg} z. \quad (4.14)$$

可以直接从公式中看出,所得的速度分布在 $\eta = \eta_0$ 点連續. 在(4.9)中令 $\eta = \eta_0$, 经过計算可以知道: 在此点有 $\frac{d\varphi}{d\eta} = 1$, 也就是說,我們提出的速度分布不仅在点 $\eta = \eta_0$ 連續,而且在此点有連續的一級导数.

剩下的事情是确定常数 κ 和 η_0 . 下述事实值得予以注意: 在“第一近似”的情形下来考虑过渡区域,并不增加經驗常数的个数. 为了确定 κ 和 η_0 , 我們来建立当 $\eta \rightarrow \infty$ 或 $t \rightarrow 1$ 时 $\varphi(\eta)$ 的漸近表达式.

根据(4.10)和(4.14),我們將有下列漸近等式:

$$t - 1 \sim \frac{\kappa^2 \eta_0^4 - 1}{4\kappa^2 \eta^2}, \quad (4.15)$$

$$\theta(t) \sim 1 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(t - 1),$$

此后即不难求出函数 $\varphi(\eta)$ 的漸近表达式:

$$\varphi(\eta) \sim \frac{1}{\kappa} \ln \eta + G(\eta_0, \kappa), \quad (4.16)$$

这里曾令

$$G(\eta_0, \kappa) = \eta_0 + \frac{1}{\kappa}(t_0 - 1) - \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{t_0 + 1}{t_0 - 1} - \frac{1}{2\kappa} \ln \left(\frac{\kappa^2 \eta_0^4}{8} \right) - \frac{1}{\kappa} \operatorname{arctg} t_0 + \frac{\pi}{4\kappa}. \quad (4.17)$$

漸近等式(4.16)并非別的,它就是大家熟知的对数綫速度規律. 把这規律写成如下形式:

$$\varphi = 5.6 \log \eta + 4.9, \quad (4.18)$$

它大致比尼古拉茲公式更为准确^[1]. 將(4.16)同(4.18)加以比較,并将 η_0 近似地选为整数,可得

$$\kappa = 0.41, \quad \eta_0 = 7. \quad (4.19)$$

根据尼古拉茲公式

$$\varphi = 5.75 \log \eta + 5.5$$

当然也可以确定这些常数,这就用不着多說了.

确定了常数之后,我們就得到整个区域内速度断面图的下列分析表达式:

$$\varphi = \begin{cases} \eta & \text{当 } 0 \leq \eta \leq 7 \text{ 时,} \\ 10.14 - 2.44 \left(t - \frac{1}{2} \ln \frac{t+1}{t-1} - \operatorname{arctg} t \right), & \\ t = \sqrt{\frac{202}{\eta^2} + \sqrt{\left(\frac{202}{\eta^2} \right)^2 + 1}} & \text{当 } \eta \geq 7 \text{ 时.} \end{cases} \quad (4.20)$$

把根据公式(3.17)計算得到的結果跟实验数据^[1]比較(图1)^[1], 我們得到相当滿意的符合.

1) 图1上的实验点未注明实验人,这些点实际上是好些作者(拉烏費尔,苏尔茨-葛留洛夫等人)的測量結果. 点的分布位置取自克勞塞的总结性文献^[1]中的图4.

假如考虑大家熟知的管流中横向摩擦应力的线性变化,使用 l 的更复杂的变化律,并注意到包含纵向压力梯度的一个参数的影响,那么,求速度断面图时计算方面就要复杂一些. 最简单的没有考虑这些影响的速度断面图 (4.20) 之所以与实验数据有很好地符合,是由于速度断面图由线性形状变到对数线形状的过渡范围比较小 (约为管子半径的 20%),并且以后速度断面图与对数线的相差比较小.

现在来讨论下述情形:流场的横向摩擦分布预先并不是已知的(边界层,射流,尾流等等),这就必须利用雷诺形式的湍流平均运动的一般方程,此方程含有摩擦应力沿与流向垂直的坐标方向的导数 $\frac{\partial \tau}{\partial y}$. 在这些情形下利用公式 (3.9) 和 (3.10) 就不能认为是有理论根据的了,因为第一,近似公式的微分可能引起很大的误差;第二,在表达式中出现高阶导数未必是能容许的,因为按照所取近似的级数,相应级的导数已经棄去了. 在这些情形下,较合理的是直接把局部性假设应用到导数 $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ 上去,令

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} f(R), \quad (4.21)$$

其中函数 f 和局部数 R 的意义和以前相同. 如此,在“一级近似”的情形下,就有

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} f\left(\frac{\rho l^2 \frac{\partial u}{\partial y}}{\nu}\right). \quad (4.22)$$

容易看出,在相应于没有分子粘性影响这一假定的区域内,这个公式的渐近表达式将是大家熟知的泰勒公式

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho l^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.23)$$

大家知道,它有时给出同普朗特理论相符的结果,有时却与之有差别.

根据本文所叙述的想法,泰勒公式 (4.23) 和它用一般公式 (4.21) 来表达的推广后的结果,在湍流半经验理论中应当占有独立的位置. 这一问题值得进行专门研究.

§ 5. “一级近似”法中定常温度断面图的确定

由平均流动方程和平均热输运方程可以知道,在速度和温度不依赖于纵向坐标的情形,可以认为

$$\tau = \tau_w, \quad q = q_w, \quad (5.1)$$

其中 q_w 是与流体相接触物体单位面积上每秒经过的热量.

除了从前考虑过的通用速度尺度 v_* 和通用长度尺度 $l_* = \frac{\nu}{v_*}$ 外,我们再引进通用温度尺度 ϑ_* :

$$\vartheta_* = \frac{q_w}{\rho c_p v_*}. \quad (5.2)$$

于是,如果引进无量纲量

$$\psi = \frac{\vartheta}{\vartheta_*}, \quad (5.3)$$

并且象前面那样,令

$$l = \kappa y, \quad R = \frac{l^2}{\nu} \frac{du}{dy} = \frac{\kappa^2 y^2}{\nu} \frac{du}{dy} = \kappa^2 \eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}, \quad (5.4)$$

我們就可以把基本等式(3.9)和(3.10)改写为如下形状:

$$1 = \begin{cases} \frac{d\varphi}{d\eta} & \text{当 } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \text{ 时,} \\ \frac{d\varphi}{d\eta} \sqrt{\kappa^4 \eta^4 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 - \kappa^4 \eta_0^4 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_0^2 + 1} & \text{当 } \eta_0 \leq \eta \text{ 时,} \end{cases} \quad (5.5)$$

$$1 = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \frac{d\psi}{d\eta} & \text{当 } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \text{ 时,} \\ \frac{1}{\sigma} \frac{d\psi}{d\eta} \sqrt{\sigma^2 \kappa^4 \eta^4 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 - \sigma^2 \kappa^4 \eta_0^4 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_0^2 + 1} & \text{当 } \eta_0 \leq \eta \text{ 时.} \end{cases} \quad (5.6)$$

由以前的等式可知:

$$\psi = \frac{\vartheta}{\vartheta_*} = \begin{cases} \sigma \eta & \text{当 } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \text{ 时,} \\ \sigma \eta_0 + \sigma \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \sigma^2 \left[\sqrt{(\kappa^4 \eta_0^4 - 1)^2 + 4 \kappa^4 \eta^4} - (\kappa^4 \eta_0^4 + 1) \right]}} & \text{当 } \eta_0 \leq \eta \text{ 时.} \end{cases} \quad (5.7)$$

在計算温度断面图时需利用椭圆函数. 最简单的做法是分別討論大普朗特数及小普朗特数 σ 的情形. 当 $\sigma = 1$ 时温度分布 $\frac{\vartheta}{\vartheta_*}$ 与速度分布 $\frac{u}{u_*}$ 相同. 图 1 表示出几个不同 σ 数值时温度分布的趋势.

§ 6. 对“二級近似”速度断面图的簡短說明

正如 §3 中已經指出过的,用“二級近似”时局部性假設可用下列公式表达出来:

$$\tau = \mu u' f(R), \quad (6.1)$$

其中局部雷诺数等于 (κ 是某一个常数)

$$R = \frac{\kappa^2 u'^3}{\nu u''^2}, \quad (6.2)$$

同时在层流区域内,函数 f 和“一級近似”情形中的值是一样的,即等于 1,在湍流区域内則随局部雷诺数的增加而趋于此局部雷诺数:

$$f\left(\frac{\kappa^2 u'^3}{\nu u''^2}\right) \rightarrow \kappa^2 \frac{u'^3}{\nu u''^2}. \quad (6.3)$$

把函数 f 的这个值代入基本关系式 (6.1),我們得到大家熟知的卡門公式 (2.2),它同前面的普朗特公式 (2.1) 一样,也可以看作是大 R 数时一般摩擦公式的漸近表达式:

$$\tau = \begin{cases} \mu u' & \text{当 } 0 \leq R \leq R_0 \text{ 时,} \\ \mu u' \sqrt{R^2 - R_0^2 + 1} & \text{当 } R_0 \leq R \text{ 时.} \end{cases} \quad (6.4)$$

层流区域同流场其余部分内的解的接合问题, 在现在的情形下有些困难. 雷诺数的局部性定义 (6.2) 预先假定了 $u'' \neq 0$; 但在层流区域内, 这个条件并不成立. 可以用下述两种办法之一来处理: 或者放弃雷诺数的变化的连续性而对湍流区域引进该区域的初始雷诺数 (在这里以及在以后, φ 的右角上的撇号都是表示对通用坐标 η 的导数, 并且 $\varphi'_0 = 1$):

$$R_0 = \frac{\kappa^2 u_0'^3}{\nu u_0''^2} = \frac{\kappa^2 \varphi_0'^3}{\varphi_0''^2} = \frac{\kappa^2}{\varphi_0''^2}, \quad (6.5)$$

其中量

$$\varphi_0'' = \varphi''(\eta_0 + 0) \quad (6.6)$$

是新的实验常数; 或者对层流区域利用“一级近似”的雷诺数, 可根据层流区域边界上的局部雷诺数的接合条件

$$\frac{l_0^2 u_0'}{\nu} = \frac{\kappa^2 y_0^2 u_0'}{\nu} = \kappa^2 \frac{u_0'^3}{\nu u_0''^2} \quad (6.7)$$

来确定 φ_0'' , 于是 ($\varphi'_0 = 1$)

$$\frac{1}{|\varphi_0''|} = \eta_0. \quad (6.8)$$

这时二级导数 $\varphi''(\eta)$ 在点 $\eta = \eta_0$ 处当然会发生间断, 但是函数 $\varphi(\eta)$ 及其一级导数在全部流场内保持连续. 假如同意利用近似等式 (6.8), 那么, 在以后的解中就不必再增加实验常数的个数, 而同一级近似的情形一样, 作为未知常数只需保留同样两个常数 κ 和 η_0 .

在本文所考虑的定常流动的情形中 ($\tau = \tau_w$), 根据 (6.4) 的第二个等式, 取通用变数, 将有

$$1 = \varphi' \sqrt{\frac{\kappa^4 \varphi_0'^6}{\varphi_0''^4} - \frac{\kappa^4}{\varphi_0''^4} + 1},$$

由此解 φ'' , 得到

$$\varphi'' = - \frac{\kappa \varphi'^2}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{\kappa^4}{\varphi_0''^4} - 1\right) \varphi'^2}}, \quad (6.9)$$

其中 φ_0'' 可根据 (6.6) 确定, 等式右端分式前面的负号相应于下述条件: 在离开物体表面时, 速度断面图的切线的坡度减小. 根据 (6.8), 分母根号中圆括弧内的常数差等于

$$\frac{\kappa^4}{\varphi_0''^4} - 1 = \kappa^4 \eta_0^4 - 1,$$

并且可以把它看成是正确的值.

在方程 (6.9) 中, 令

$$\varphi' = \sqrt{\frac{t^4 - 1}{t_0^4 - 1}}, \quad (6.10)$$

同时

$$\begin{aligned} \varphi' &= 1 & \text{当 } \eta = \eta_0, \quad t = t_0 = \frac{\kappa}{\varphi_0''} > 1 \text{ 时,} \\ \varphi' &= 0 & \text{当 } \eta = \infty, \quad t = 1 \text{ 时,} \end{aligned} \quad (6.11)$$

即可得到微分方程

$$d\eta = -\frac{2}{\kappa} \sqrt{t_0^4 - 1} \cdot \frac{t^4 dt}{(t^4 - 1)^{3/2}}, \quad (6.12)$$

用了边界条件

$$t = t_0 \quad \text{当 } \eta = \eta_0 \text{ 时}$$

后,它的积分是

$$\eta - \eta_0 = +\frac{2}{\kappa} \sqrt{t_0^4 - 1} \cdot \int_t^{t_0} \frac{t^4 dt}{(t^4 - 1)^{3/2}}. \quad (6.13)$$

计算右端积分后,得到

$$\eta - \eta_0 = \frac{1}{\kappa} \sqrt{t_0^4 - 1} \left(\frac{t}{\sqrt{t^4 - 1}} - \frac{t_0}{\sqrt{t_0^4 - 1}} + \int_t^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{t^4 - 1}} \right). \quad (6.14)$$

右端还保留着一个积分,它不能用初等函数表示出来;可以把它改写成如下形状:

$$\begin{aligned} \int_t^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{t^4 - 1}} &= \int_1^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{t^4 - 1}} - \int_1^t \frac{dt}{\sqrt{t^4 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F\left(\arcsin t_0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \right. \\ &\quad \left. - F\left(\arcsin t; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right], \end{aligned} \quad (6.15)$$

其中曾用第一类椭圆积分的常用表示法

$$F(\varphi; k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (6.16)$$

这样一来,我们有

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 + \frac{1}{\kappa} \sqrt{t_0^4 - 1} \left[\frac{t}{\sqrt{t^4 - 1}} - \frac{t_0}{\sqrt{t_0^4 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\arcsin t_0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\arcsin t; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

另一方面,从(6.10)和(6.12),我们有

$$d\varphi = \sqrt{\frac{t^4 - 1}{t_0^4 - 1}} d\eta = -\frac{2}{\kappa} \frac{t^4 dt}{t^4 - 1},$$

于是,积分并注意到边界条件

$$\varphi = \eta_0, \quad t = t_0 \quad \text{当 } \eta = \eta_0 \text{ 时,}$$

可以得到

$$\varphi = \eta_0 + \frac{1}{2\kappa} (\varepsilon - \varepsilon_0) + \frac{1}{\kappa} [\theta(\varepsilon_0) - \theta(\varepsilon)], \quad (6.18)$$

其中 $\theta(\varepsilon)$ 見(4.14).

等式(6.17)和(6.18)合起来, 給出我們要求的“二級近似”速度断面图.

在 $\varepsilon = 1$ 附近写出这两个等式右端的表达式并消去 ε , 我們得到大 η 数时的渐近对数綫速度公式. 在本文中, 我們只进行了上面的一般性的研討.

[董务民譯 黃 敦校]

参 考 文 献

- [1] Clauser, F., The turbulent boundary layer. "Advances in appl. mechanics", ed. by H. Dryden and Th. v. Kármán, No. 4, 1955, v. IV, p. 7. (苏联外文出版局正在准备出版此文的俄譯本——校者).
- [2] Wada, K., *Journ. of Japan. Soc. Nav. Arch.*, **41**, p. 103.
- [3] Szablewski, W., Wandnahe Geschwindigkeitsverteilung turbulenter Grenzschichtströmungen mit Druckanstieg, *ing. Arch.*, Bd. **23**, H. 4, 1955, S. 295—308.
- [4] Van Driest, E. On turbulent flow near a wall, *J. A. S.* **23**, N. 11, 1956, pp. 1007—1011.
- [5] Miles, W., On the velocity profile for turbulent flow near a smooth wall, *J. A. S.* **24**, N 9, 1957, p. 704.
- [6] Седов, Л. И., Методы подобия и размерности в механике, *ГИИТЛ*, 1957, стр. 158—160.
- [7] Лойцянский, Л. Г., Турбулентное движение жидкости и внутренняя задача, *Изв. Научно-Иссл. Инст. Гидротехники*, т. IX, 1933. Лойцянский, Л. Г., О некоторых приложениях метода подобия в теории Турбулентности. *Прикл. Матем. и Механика*, т. II, вып 2. 1935.
- [8] Prandtl, L., Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung, *VDI*, **77**, No. 5, 1933.
- [9] Эккерт, Э. Р. Введение в теорию тепла и массообмена, Госэнергоиздат, 1957, стр. 126.