

軸對稱定常溫度場中變彈性 迴轉殼的熱應力*

趙惠元

(東北工學院)

1. 引言

本文將討論在軸對稱的定常溫度場中一類迴轉殼的熱應力問題。在高速飛行器日益發展的今天,此類問題是很有實際意義的,比如以馬赫數 $M = 5$ 的速度飛行的飛行器,由於空氣加熱其首部的溫度可達 1000°C 以上;因此在計算高速飛行器的強度時,對其外殼中所產生的熱應力就必須加以考慮。此外,在其他工業方面類似的問題也是很多的。

在另一方面溫度對材料的彈性性質也有一定的影響,在計算高溫下物體的熱應力時,此一因素亦應估計在內;以金鋼鈦(Ti)為例,下表所示為在各種不同的溫度下鈦的彈性模數的變化^[1],可見溫度對彈性性質的影響是非常顯著的。

溫度, $^{\circ}\text{C}$	常溫	204	426	537
彈性模數, kg/cm^2	10150—10850	9800—10500	9100—9800	7300—8000

材料彈性模數在高溫下的減小自然要引起剛度的降低,因而可預料到:在高溫下物體的熱應力實際上要比按常溫彈性模數而計算的值(絕對值)為小,其變化趨勢亦應緩和。為了正確了解物體內熱應力的分佈,我們必須考慮溫度對彈性模數的影響。最近 H. H. Hilton^[2], J. Nowin'ski^[3] 等人即在這樣的考慮下討論了圓筒的熱應力問題,並都得到一些有意義的結果。本文也是在同樣的意義下討論某些迴轉殼的熱應力問題。

溫度對泊松比與熱膨脹係數雖有影響,但一般不甚顯著,本文為便於進行數學分析起見,仍把它們看做是與溫度無關的常數。

2. 彈性模數的近似表示

彈性模數與溫度間的具體關係,各種材料雖不盡同,但對一般金屬來說,在一定的溫度區間內彈性模數略為溫度的遞減函數。為便於計算,將取適當的近似表示。

假定物體在常溫 T_0 時處於自然狀態。設在某溫度場中物體一般點 P 的溫度為 T , 命

$$\varphi = T - T_0, \quad (2.1)$$

顯然 φ 是 P 的點函數, $\varphi = \varphi(P)$ 。

* 1958年7月8日收到。

假定在區間 $0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_1}{m}$ 上, 彈性模數 E 是 φ 的綫型函數, 即

$$E = (1 - \varepsilon\varphi)E_0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi_1}{m}, \quad (2.2)$$

其中

$$E = E(\varphi), \quad E_0 = E(0), \quad \varepsilon = \left(1 - \frac{1}{m}\right) / \frac{\varphi_1}{m}, \quad 0 \leq \varepsilon\varphi < 1.$$

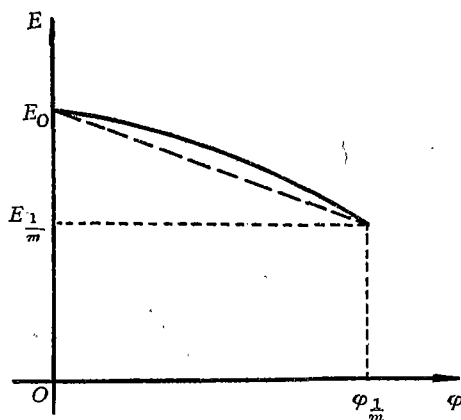


圖 1

而 $\frac{\varphi_1}{m}$ 滿足如下的關係式:

$$E_{\frac{1}{m}} = E\left(\frac{\varphi_1}{m}\right) = \frac{1}{m} E_0, \quad (m \geq 1),$$

即彈性模數在溫度為 $T_0 + \frac{\varphi_1}{m}$ 時的值為

常溫時的 $\frac{1}{m}$ (圖 1).

3. 應力與應變

在圓柱坐標系 (r, θ, z) 中, 設迴轉殼中面母綫的方程為

$$r = r(\xi), \quad z = z(\xi), \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad (3.1)$$

則 (ξ, θ) 即可看做中面上一般點的坐標。

若中面母綫上一點的切綫與 z -軸的交角為 ϕ , 則有

$$\cos \phi = z'/\alpha, \quad \sin \phi = -r'/\alpha, \quad (3.2)$$

其中 $\alpha = (r'^2 + z'^2)^{1/2}$, r' , z' 分別表示 r , z 對 ξ 的導數。

設中面的主曲率半徑為 R_ξ , R_θ , 我們有

$$1/R_\xi = \phi'/\alpha, \quad 1/R_\theta = \cos \phi/r. \quad (3.3)$$

其次, 設殼的厚度為 h , 殼的一般點到中面的距離為 ζ , 於是殼體的綫素 ds 將為

$$ds^2 = \alpha^2(1 + \zeta/R_\xi)^2 d\xi^2 + r^2(1 + \zeta/R_\theta)^2 d\theta^2 + d\zeta^2. \quad (3.4)$$

本文限於討論軸對稱的情形。設 U , W 分別表示殼體一般點的位移在母綫的切綫方向上與法綫方向上的分量, ε_ξ , ε_θ , ε_ζ , $\gamma_{\xi\zeta}$ 為應變分量。於是位移與應變間有關係式:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\alpha}{R_\xi} W \right) / \alpha \left(1 + \frac{\zeta}{R_\xi} \right), \\ \varepsilon_\theta &= \left(\frac{r'}{\alpha} U + \frac{r}{R_\theta} W \right) / r \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta} \right), \\ \varepsilon_\zeta &= \frac{\partial W}{\partial \zeta}, \\ \gamma_{\xi\zeta} &= \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\alpha}{R_\xi} U \right) / \alpha \left(1 + \frac{\zeta}{R_\xi} \right) + \frac{\partial U}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

按薄殼理論的一般假定 $h/R_\xi \ll 1$, $h/R_\theta \ll 1$, 可命 $\varepsilon_\zeta = 0$, $\gamma_{\xi\zeta} = 0$ 。於是由 (3.5) 的後兩式可得

$$U = U_0 - \zeta Y, \quad W = W_0, \quad (3.6)$$

其中

$$U_0 = U(\xi, 0), \quad W_0 = W(\xi, 0), \quad Y = \frac{W'_0}{\alpha} - \frac{U_0}{R_\xi}, \quad (3.7)$$

因此有

$$\varepsilon_\xi = e_\xi - \frac{\zeta}{\alpha} Y', \quad \varepsilon_\theta = e_\theta - \frac{\zeta r'}{\alpha r} Y, \quad (3.8)$$

其中 e_ξ, e_θ 為中面上的點的應變分量,並有

$$e_\xi = \frac{U'_0}{\alpha} + \frac{W_0}{R_\xi}, \quad e_\theta = \frac{r'}{\alpha r} U_0 + \frac{W_0}{R_\theta}. \quad (3.9)$$

最後還可導出一個重要的關係式:

$$(re_\theta)' = r'e_\xi + z'Y. \quad (3.10)$$

同樣由於軸對稱關係,應力分量只有 $\sigma_\xi, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\xi\theta}$ 四個,並由於薄殼的假定, σ_z 可忽略不計。

按殼體的一般理論定義合力與力偶:

$$N_\xi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\xi d\zeta, \quad N_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta d\zeta, \quad Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\xi\theta} d\zeta, \\ M_\xi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \zeta \sigma_\xi d\zeta, \quad M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \zeta \sigma_\theta d\zeta. \quad (3.11)$$

我們限於討論外載荷不存在而僅由不均勻溫度所產生的熱應力。至於外載荷存在的情形可依疊加原理求得問題的解。

最後我們列出平衡方程:

$$\left[\frac{r}{\alpha} (z'N_\xi - r'Q) \right]' = 0, \quad \left[\frac{r}{\alpha} (r'N_\xi + z'Q) \right]' - \alpha N_\theta = 0, \\ (rM_\xi)' - (r'M_\theta + \alpha rQ) = 0. \quad (3.12)$$

4. 基本微分方程

假定溫度的分佈對殼體的厚度為綫型的,即

$$\varphi = \varphi_0 + \zeta\varphi_1, \quad (4.1)$$

其中函數 $\varphi_0 = \varphi_0(\xi)$, $\varphi_1 = \varphi_1(\xi)$ ($\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$) 假定有連續的一階導數。於是由(2.2), 彈性模數 E 的近似表達式應為

$$E = (1 - \varepsilon\varphi_0 - \varepsilon\zeta\varphi_1)E_0. \quad (4.2)$$

根據(4.1)及(4.2),胡克定律可寫為

$$\sigma_\xi = \frac{E_0}{1-\nu^2} (1 - \varepsilon\varphi_0 - \varepsilon\zeta\varphi_1) [\varepsilon_\xi + \nu\varepsilon_\theta - (1+\nu)\kappa(\varphi_0 + \zeta\varphi_1)], \\ \sigma_\theta = \frac{E_0}{1-\nu^2} (1 - \varepsilon\varphi_0 - \varepsilon\zeta\varphi_1) [\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_\xi - (1+\nu)\kappa(\varphi_0 + \zeta\varphi_1)], \quad (4.3)$$

其中泊松比 ν 與熱膨脹係數 κ 皆假定為常數。

依合力與力偶的定義，得下列諸表達式：

$$\begin{aligned}
 N_{\xi} &= B \left\{ (1 - \varepsilon\varphi_0)(e_{\xi} + \nu e_{\theta}) + \frac{h^2 \varepsilon \varphi_1}{12\alpha} \left(Y' + \frac{\nu r'}{r} Y \right) - \right. \\
 &\quad \left. - (1 + \nu) \kappa \left[\varphi_0 (1 - \varepsilon\varphi_0) - \frac{h^2 \varepsilon \varphi_1^2}{12} \right] \right\}, \\
 N_{\theta} &= B \left\{ (1 - \varepsilon\varphi_0)(e_{\theta} + \nu e_{\xi}) + \frac{h^2 \varepsilon \varphi_1}{12\alpha} \left(\nu Y' + \frac{r'}{r} Y \right) - \right. \\
 &\quad \left. - (1 + \nu) \kappa \left[\varphi_0 (1 - \varepsilon\varphi_0) - \frac{h^2 \varepsilon \varphi_1^2}{12} \right] \right\}, \\
 M_{\xi} &= D \left\{ -\varepsilon\varphi_1(e_{\xi} + \nu e_{\theta}) - \frac{1 - \varepsilon\varphi_0}{\alpha} \left(Y' + \frac{\nu r'}{r} Y \right) - (1 + \nu) \kappa \varphi_1 (1 - 2\varepsilon\varphi_0) \right\}, \\
 M_{\theta} &= D \left\{ -\varepsilon\varphi_1(e_{\theta} + \nu e_{\xi}) - \frac{1 - \varepsilon\varphi_0}{\alpha} \left(\nu Y' + \frac{r'}{r} Y \right) - (1 + \nu) \kappa \varphi_1 (1 - 2\varepsilon\varphi_0) \right\},
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中 $B = hE_0/(1 - \nu^2)$, $D = h^3E_0/12(1 - \nu^2)$.

設

$$aN_{\theta} = X', \tag{4.5}$$

依平衡方程(3.12)，即得

$$N_{\xi} = (r'X + Cz')/\alpha r, \quad Q = (z'X - Cr')/\alpha r, \tag{4.6}$$

其中 C 為積分常數。由關係式

$$C/r = N_{\xi} \cos \phi + Q \sin \phi$$

不難看出 C 的物理意義，即 C/r 為在軸向上的分力。

依(4.4)的前兩式及(4.6)，可得關係式

$$\begin{aligned}
 e_{\xi} &= \frac{1}{hE_0\alpha(1 - \varepsilon\varphi_0)} \left(-\nu X' + \frac{r'}{r} X + C \frac{z'}{r} \right) - \frac{h^2 \varepsilon \varphi_1}{12\alpha(1 - \varepsilon\varphi_0)} Y' + \\
 &\quad + \kappa \left[\varphi_0 - \frac{h^2 \varepsilon \varphi_1^2}{12(1 - \varepsilon\varphi_0)} \right], \\
 e_{\theta} &= \frac{1}{hE_0\alpha(1 - \varepsilon\varphi_0)} \left(X' - \frac{\nu r'}{r} X - \nu C \frac{z'}{r} \right) - \frac{h^2 \varepsilon \varphi_1}{12\alpha(1 - \varepsilon\varphi_0)} \frac{r'}{r} Y + \\
 &\quad + \kappa \left[\varphi_0 - \frac{h^2 \varepsilon \varphi_1^2}{12(1 - \varepsilon\varphi_0)} \right].
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

將(4.7)代入(4.4)的後兩式，即得

$$\begin{aligned}
 M_{\xi} &= D \left\{ \Phi(r'X + Cz')/r - \Psi \left[\frac{Y'}{\alpha} + \frac{\nu r'}{\alpha r} Y + (1 + \nu) \kappa \varphi_1 \right] \right\}, \\
 M_{\theta} &= D \left\{ \Phi X' - \Psi \left[\frac{\nu}{\alpha} Y' + \frac{r'}{\alpha r} Y + (1 + \nu) \kappa \varphi_1 \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

其中已設

$$\Phi = -\frac{(1 - \nu^2)\varepsilon\varphi_1}{hE_0\alpha(1 - \varepsilon\varphi_0)}, \quad \Psi = 1 - \varepsilon\varphi_0 - \frac{h^2 \varepsilon^2 \varphi_1^2}{12(1 - \varepsilon\varphi_0)}.$$

將(4.7)代入(3.10)，(4.8)代入(3.12)的最末式，即得

$$\begin{aligned}
& X'' + \left(\frac{r'}{r} - \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\varepsilon\varphi_0'}{1 - \varepsilon\varphi_0} \right) X' - \left[\left(\frac{r'}{r} \right)^2 + \frac{v}{r} \left(r'' - \frac{\alpha'r'}{\alpha} + \frac{\varepsilon\varphi_0'r'}{1 - \varepsilon\varphi_0} \right) \right] X - \\
& - \frac{1-v^2}{r} \left[B\alpha z'(1 - \varepsilon\varphi_0) + D\varepsilon \left(r'\varphi_1' + r''\varphi_1 - \frac{\alpha'r'\varphi_1}{\alpha} + \frac{\varepsilon r'\varphi_0'\varphi_1}{1 - \varepsilon\varphi_0} \right) \right] Y - \\
& - \frac{C}{r} \left[v \left(z'' - \frac{\alpha'z'}{\alpha} + \frac{\varepsilon z'\varphi_0'}{1 - \varepsilon\varphi_0} \right) + \frac{r'z'}{r} \right] + \\
& + (1 - v^2)\kappa\alpha \left[B(1 - \varepsilon\varphi_0)\varphi_0' - D\varepsilon\varphi_1 \left(2\varphi_1' + \frac{\varepsilon\varphi_0'\varphi_1}{1 - \varepsilon\varphi_0} \right) \right] = 0, \quad (4.9) \\
& Y'' + \left(\frac{r'}{r} - \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\Psi'}{\Psi} \right) Y' - \left[\left(\frac{r'}{r} \right)^2 - \frac{v}{r} \left(r'' - \frac{\alpha'r'}{\alpha} + \frac{r'\Psi'}{\Psi} \right) \right] Y - \\
& - \frac{\alpha}{r\Psi} \left[(r'\Phi)' - \frac{z'}{D} \right] X - \frac{C\alpha}{r\Psi} \left[(z'\Phi)' + \frac{r'}{D} \right] + \\
& + (1 + v)\kappa\alpha \frac{(\varphi_1\Psi)'}{\Psi} = 0.
\end{aligned}$$

作變換

$$X = \sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1 - \varepsilon\varphi_0) \Pi, \quad Y = \sqrt{\frac{\alpha}{r\Psi}} \Sigma,$$

引入新函數 Π, Σ , 則方程(4.9)即簡化如下:

$$\Pi'' + m\Pi + n\Sigma + f = 0, \quad \Sigma'' + p\Sigma + q\Pi + g = 0. \quad (4.10)$$

其中

$$\begin{aligned}
m &= \sqrt{\frac{\alpha}{r}} \frac{''}{(1 - \varepsilon\varphi_0)} / \sqrt{\frac{\alpha}{r} (1 - \varepsilon\varphi_0)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{r'}{r} - \frac{\varepsilon\varphi_0'}{1 - \varepsilon\varphi_0} \right)^2 - \\
& - \left[\left(\frac{r'}{r} \right)^2 + \frac{v}{r} \left(r'' - \frac{\alpha'r'}{\alpha} + \frac{\varepsilon\varphi_0'r'}{1 - \varepsilon\varphi_0} \right) \right], \\
n &= - \frac{1 - v^2}{r\sqrt{(1 - \varepsilon\varphi_0)\Psi}} \left[B\alpha z'(1 - \varepsilon\varphi_0) + D\varepsilon \left(r'\varphi_1' + r''\varphi_1 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\alpha'r'\varphi_1}{\alpha} + \frac{\varepsilon\varphi_0'\varphi_1 r'}{1 - \varepsilon\varphi_0} \right) \right], \\
f &= - \frac{1}{\sqrt{\alpha r (1 - \varepsilon\varphi_0)}} \left\{ C \left[v \left(z'' - \frac{\alpha'z'}{\alpha} + \frac{\varepsilon\varphi_0'z'}{1 - \varepsilon\varphi_0} \right) + \frac{r'z'}{r} \right] - \right. \\
& \left. - (1 - v^2)\kappa\alpha r \left[B(1 - \varepsilon\varphi_0)\varphi_0' - D\varepsilon\varphi_1 \left(2\varphi_1' + \frac{\varepsilon\varphi_0'\varphi_1}{1 - \varepsilon\varphi_0} \right) \right] \right\}, \quad (4.11) \\
p &= \sqrt{\frac{\alpha}{r\Psi}} \frac{''}{\Psi} / \sqrt{\frac{\alpha}{r\Psi}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{r'}{r} - \frac{\Psi'}{\Psi} \right)^2 - \\
& - \left[\left(\frac{r'}{r} \right)^2 - \frac{v}{r} \left(r'' - \frac{\alpha'r'}{\alpha} + \frac{r'\Psi'}{\Psi} \right) \right], \\
q &= - \frac{\alpha}{r} \sqrt{\frac{1 - \varepsilon\varphi_0}{\Psi}} \left[(r'\Phi)' - \frac{z'}{D} \right], \\
g &= - \sqrt{\frac{\alpha}{r\Psi}} \left\{ C \left[(z'\Phi)' + \frac{r'}{D} \right] - (1 + v)\kappa r (\varphi_1\Psi)' \right\}.
\end{aligned}$$

我們列出合力與力偶用 Π, Σ 的表達式:

$$\begin{aligned}
 N_{\xi} &= \left[r' \sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1 - \varepsilon \varphi_0) \Pi + C z' \right] / \alpha r, \\
 N_{\theta} &= \left[\sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1 - \varepsilon \varphi_0) \Pi \right]' / \alpha, \\
 Q &= \left[z' \sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1 - \varepsilon \varphi_0) \Pi - C r' \right] / \alpha r, \\
 M_{\xi} &= D \left\{ \frac{\Phi}{r} \left[r' \sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1 - \varepsilon \varphi_0) \Pi + C z' \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \Psi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{r}} \Sigma \right)' + \frac{\nu r'}{r} \sqrt{\frac{1}{\alpha r \Psi}} \Sigma + (1 + \nu) \kappa \varphi_1 \right] \right\}, \\
 M_{\theta} &= D \left\{ \Phi \left[\sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1 - \varepsilon \varphi_0) \Pi \right]' - \Psi \left[\frac{\nu}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{r}} \Sigma \right)' + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{r'}{r} \sqrt{\frac{1}{\alpha r \Psi}} \Sigma + (1 + \nu) \kappa \varphi_1 \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

其次, 設殼體中面上一點的位移在軸向與徑向的分量分別為 w_z 與 w_r , 則我們有

$$\begin{aligned}
 w_z &= w_z^{(0)} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left\{ \frac{z'}{h E_0 \alpha (1 - \varepsilon \varphi_0)} \left[\frac{r'}{r} \sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1 - \varepsilon \varphi_0) \Pi - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \nu \left(\sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1 - \varepsilon \varphi_0) \Pi \right)' + C \frac{z'}{r} \right] - \frac{h^2 z' \varepsilon \varphi_1}{12 \alpha (1 - \varepsilon \varphi_0)} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{r \Psi}} \Sigma \right)' - \right. \\
 &\quad \left. - r' \sqrt{\frac{\alpha}{r \Psi}} \Sigma + \kappa z' \left[\varphi_0 - \frac{h^2 \varepsilon \varphi_1^2}{12 (1 - \varepsilon \varphi_0)} \right] \right\} d\xi,
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

其中 $w_z^{(0)}$ 為取決於殼體剛性位移的常數。

$$\begin{aligned}
 w_r &= \frac{1}{h E_0 \alpha (1 - \varepsilon \varphi_0)} \left\{ r \left[\sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1 - \varepsilon \varphi_0) \Pi \right]' - \nu r' \sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1 - \varepsilon \varphi_0) \Pi - \nu C z' \right\} - \\
 &\quad - \frac{h^2 r' \varepsilon \varphi_1}{12 (1 - \varepsilon \varphi_0)} \sqrt{\frac{1}{\alpha r \Psi}} \Sigma + \kappa r \left[\varphi_0 - \frac{h^2 \varepsilon \varphi_1^2}{12 (1 - \varepsilon \varphi_0)} \right].
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

根據上述結果, 我們的問題歸於在給定的邊界條件下解微分方程組(4.10)。不難看出, 我們必須確定 5 個積分常數, 因此, 必須給出相應個數的邊界條件問題才能完全解決。

5. 問題的簡化

在前節中我們曾假定溫度的分佈對殼體的厚度為綫型的, 結果所得的微分方程組(4.10)過繁, 難於進行數學分析, 因此我們有必要在一定的條件下將問題加以適當簡化。比如細長的薄殼在一端受熱或在一側受熱而另一側的介質傳熱較難的情形, 則溫度在殼體內的分佈對厚度來說, 將可充分近似地看做是均勻的, 即可命 $\varphi_1 = 0$ 。

現在我們即進行討論 $\varphi_1 = 0, \varphi = \varphi_0$ 的情形。此時有

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 1 - \varepsilon \varphi. \tag{5.1}$$

再注意到在實際情況下彈性模數不允許降低太多, 即限於 $\varepsilon \varphi < 1$, 或甚至 $\varepsilon \varphi \ll 1$, 因此

我們可有如下的近似等式:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a}{r}(1-\varepsilon\varphi)}'' / \sqrt{\frac{a}{r}(1-\varepsilon\varphi)} &= \sqrt{\frac{a''}{r}} / \sqrt{\frac{a}{r}} - \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{a} - \frac{r'}{r} \right) \varepsilon\varphi' - \frac{\varepsilon\varphi''}{2}, \\ \sqrt{\frac{a}{r(1-\varepsilon\varphi)}}'' / \sqrt{\frac{a}{r(1-\varepsilon\varphi)}} &= \sqrt{\frac{a''}{r}} / \sqrt{\frac{a}{r}} + \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{a} - \frac{r'}{r} \right) \varepsilon\varphi' + \frac{\varepsilon\varphi''}{2}.\end{aligned}\quad (5.2)$$

於是(4.11)即簡化如下:

$$\begin{aligned}m &= a + b, \\ n &= -hE_0\alpha z'/r, \\ f &= hE_0\kappa\sqrt{ar(1-\varepsilon\varphi)}\varphi' - \frac{C}{\sqrt{ar(1-\varepsilon\varphi)}} \left[v \left(z'' - \frac{\alpha'z'}{\alpha} + \frac{\varepsilon\varphi'z'}{1-\varepsilon\varphi} \right) + \frac{r'z'}{r} \right], \\ p &= a - b, \\ q &= \alpha z'/Dr, \\ g &= \frac{Cr'}{D} \sqrt{\frac{a}{r(1-\varepsilon\varphi)}}.\end{aligned}\quad (5.3)$$

其中

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{\frac{a''}{r}} / \sqrt{\frac{a}{r}} - \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{a} - \frac{r'}{r} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon\varphi'}{1-\varepsilon\varphi} \right)^2 - \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - \frac{v\varepsilon\varphi'r'}{(1-\varepsilon\varphi)r}, \\ b &= \frac{v}{r} \left(\frac{\alpha'r'}{\alpha} - r'' \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{a} - \frac{r'}{r} \right) \frac{1+\varepsilon\varphi}{1-\varepsilon\varphi} \varepsilon\varphi' - \frac{\varepsilon\varphi''}{2}.\end{aligned}\quad (5.4)$$

現在方程組(4.10)可改寫為

$$\begin{aligned}\Pi'' + a\Pi + b\Pi + n\Sigma + f &= 0, \\ \Sigma'' + a\Sigma - b\Sigma + q\Pi + g &= 0.\end{aligned}\quad (5.5)$$

為着將此方程組能寫成一個複數形式的微分方程,我們在前述 $\varepsilon\varphi \ll 1$ 的假定下考慮近似表達式

$$\Delta = \frac{hr}{\alpha z'} b = \frac{vh}{R_\xi} - \frac{h}{2\alpha z'} \left[\left(\frac{r}{\alpha} \right)' \varepsilon\varphi' + \frac{r}{\alpha} \varepsilon\varphi'' \right].\quad (5.6)$$

顯然對於給定的殼體,若描述溫度分佈的函數 φ 滿足條件

$$\left| \varepsilon\varphi' \right| \ll \left| 2z'/h \left(\frac{r}{\alpha} \right)' \right|, \quad \left| \varepsilon\varphi'' \right| \ll \left| \frac{2z'\alpha}{hr} \right|,$$

則我們即有不等式

$$|\Delta| \ll 1.\quad (5.7)$$

從後面第8節的例子即將看出,此條件在實際問題中通常是成立的。在下述的論證中,我們即假定此條件已成立。於是命

$$Z = \Sigma - \frac{i\sqrt{12(1-v^2)}}{h^2E_0} \Pi,\quad (5.8)$$

則方程組(5.5)便可寫成一個複數形式的微分方程:

$$Z'' + \left[a + \frac{i\sqrt{12(1-v^2)}\alpha z'}{hr} \right] Z = -g + \frac{i\sqrt{12(1-v^2)}}{h^2E_0} f.\quad (5.9)$$

最後,若 $Z = \bar{X} + i\bar{Y}$ 為在給定的邊界條件下所求得的方程(5.9)的解,則合力,力偶

與位移等可表達如下:

$$\begin{aligned} N_{\xi} &= \frac{1}{\alpha r} \left[Cz' - \frac{h^2 E_0 r'}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1-\varepsilon\varphi) \bar{Y} \right], \\ N_{\theta} &= -\frac{h^2 E_0}{\alpha \sqrt{12(1-\nu^2)}} \left[\sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1-\varepsilon\varphi) \bar{Y} \right], \\ Q &= -\frac{1}{\alpha r} \left[Cr' + \frac{h^2 E_0 z'}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1-\varepsilon\varphi) \bar{Y} \right], \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} M_{\xi} &= -D(1-\varepsilon\varphi) \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{r(1-\varepsilon\varphi)}} \bar{X} \right)' + \frac{\nu r'}{r} \sqrt{\frac{1}{\alpha r(1-\varepsilon\varphi)}} \bar{X} \right], \\ M_{\theta} &= -D(1-\varepsilon\varphi) \left[\frac{\nu}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{r'(1-\varepsilon\varphi)}} \bar{X} \right)' + \frac{r'}{r} \sqrt{\frac{1}{\alpha r(1-\varepsilon\varphi)}} \bar{X} \right], \\ u_z &= u_z^{(0)} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left\{ \frac{Cz'^2}{hE_0\alpha(1-\varepsilon\varphi)} + \frac{hz'}{\sqrt{12(1-\nu^2)\alpha(1-\varepsilon\varphi)}} \left[\nu \left(\sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1-\varepsilon\varphi) \bar{Y} \right)' - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{r'}{r} \sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1-\varepsilon\varphi) \bar{Y} \right] - r' \sqrt{\frac{\alpha}{r(1-\varepsilon\varphi)}} \bar{X} + \kappa z' \varphi \right\} d\xi, \\ u_r &= -\frac{\nu Cz'}{hE_0\alpha(1-\varepsilon\varphi)} - \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu^2)\alpha(1-\varepsilon\varphi)}} \left\{ r \left(\sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1-\varepsilon\varphi) \bar{Y} \right)' - \right. \\ &\quad \left. - \nu r' \sqrt{\frac{\alpha}{r}} (1-\varepsilon\varphi) \bar{Y} \right\} + \kappa r \varphi. \end{aligned} \quad (5.11)$$

6. 微分方程(5.9)的解法

對於給定的邊界條件解微分方程(5.9)可用疊代近似法。

首先在給定的邊界條件及微分方程(5.9)中命 $\varepsilon = 0$, $Z = Z_0$, 然後求解。此時微分方程(5.9)簡化如下:

$$Z_0'' + \left(\sigma + \frac{i\sqrt{12(1-\nu^2)\alpha z'}}{hr} \right) Z_0 = -g_0 + \frac{i\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h^2 E_0} f_0, \quad (6.1)$$

其中已設

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha''}{r}} / \sqrt{\frac{\alpha}{r}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{r''}{r'} \right)^2 - \left(\frac{r'}{r} \right)^2.$$

此外 g_0, f_0 分別表示在 $\varepsilon = 0$ 時 g, f 的值。顯然如此所求得之解為將彈性模數看做常數時該問題的解。

之後,再將方程(5.9)寫成疊代形式:

$$\begin{aligned} Z_n'' + \left(\sigma + \frac{i\sqrt{12(1-\nu^2)\alpha z'}}{hr} \right) Z_n &= \varepsilon \left[\frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\varphi'}{1-\varepsilon\varphi} \right)^2 + \frac{\nu r' \varphi'}{\nu(1-\varepsilon\varphi)} \right] Z_{n-1} - \\ &- g + \frac{i\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h^2 E_0} f \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (6.2)$$

並設 Z_n 滿足原給定的邊界條件。

如命

$$V_0 = Z_0, \quad V_n = Z_n - Z_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (6.3)$$

則 V_1 滿足微分方程

$$V_1'' + \left(\sigma + i \frac{\sqrt{12(1-v^2)}\alpha z'}{hr} \right) V_1 = \varepsilon \left[\frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\varphi'}{1-\varepsilon\varphi} \right)^2 + \frac{vr'\varphi'}{r(1-\varepsilon\varphi)} \right] V_0 - (g - g_0) + \frac{i\sqrt{12(1-v^2)}}{h^2 E_0} (f - f_0), \quad (6.4)$$

$V_n (n = 2, 3, \dots)$ 滿足微分方程

$$V_n'' + \left(\sigma + i \frac{\sqrt{12(1-v^2)}\alpha z'}{hr} \right) V_n = \varepsilon \left[\frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\varphi'}{1-\varepsilon\varphi} \right)^2 + \frac{vr'\varphi'}{r(1-\varepsilon\varphi)} \right] V_{n-1}. \quad (6.5)$$

顯然,若能求得齊次方程

$$V'' + \left(\sigma + i \frac{\sqrt{12(1-v^2)}\alpha z'}{hr} \right) V = 0 \quad (6.6)$$

的基本解,則(6.1),(6.4),(6.5)的通解便不難用求積法獲得.

在相應的邊界條件下逐次解微分方程(6.1),(6.4),(6.5)可得函數列 $V_0, V_1, V_2, \dots$ 做級數:

$$V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots, \quad (6.7)$$

若此級數收斂(均勻收斂),則它即給出所求的解.

在一般情況下可逐次求得近似解.

關於級數(6.7)的收斂性我們不擬做冗長的數學論證,僅指出一點,即用格林函數或求積法不難給出收斂性的充分條件.另外從物理意義亦可看出,只要 $\varepsilon\varphi$ 足夠小,此級數的收斂性便應是肯定的.

7. 高速飛行中阻力最小的一類迴轉殼

最近 A. J. Eggers^[4] 等人曾討論了以超音速水平飛行的迴轉體表面所受的阻力,並決定出在各種條件下迴轉體表面的幾何形狀,在馬赫數 $M = 2.73 - 6.28$ 的情況下進行了試驗,證明理論的結果與實際相符合.我們知道,普通高速飛行器的外形主要是按阻力最小的條件決定的,因此,我們對此類殼體的熱應力給以討論是有實際意義的.

(i) 給定底半徑與表面積的條件下阻力為最小的迴轉殼——圓錐殼 殼的方程為

$$z = \xi, \quad r = \lambda \xi \quad (0 \leq \xi \leq l), \quad (7.1)$$

其中 $\lambda (>0)$ 為常數, l 為錐的高.

根據薄殼理論的假定,我們限於討論對應於 $\xi_0 \leq \xi \leq l$ 的殼的部分,其中 ξ_0 適合 $h/\xi_0 \ll 1$ 的條件.

於是齊次方程(6.6)簡化為

$$V'' + \frac{1}{h\xi} \left[-\frac{3h}{4\xi} + i \sqrt{12(1-v^2)} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right] V = 0. \quad (7.2)$$

由於已假定 $h/\xi \ll 1$, 代替(7.2)可取近似的微分方程

$$V'' + \frac{i}{h\xi} \sqrt{12(1-v^2)} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) V = 0. \quad (7.3)$$

顯然

$$u = \sqrt{ik\xi} J_1(2\sqrt{ik\xi}), \quad v = \sqrt{ik\xi} Y_1(2\sqrt{ik\xi}) \quad (7.4)$$

為方程(7.3)的獨立解,其中 J_1 與 Y_1 分別為一階的第一類與第二類貝塞爾函數,同時其中

$$k = \sqrt{12(1-\nu^2)\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)} / h.$$

(ii) 給定底半徑與體積的條件下阻力為最小的迴轉殼 殼的方程為

$$z = l - \frac{2}{\lambda} \frac{1 + 3\xi^2}{(1 + \xi^2)^2}, \quad r = \frac{4\xi}{\lambda(1 + \xi^2)^2} \quad (\xi_0 \leq \xi < \infty), \quad (7.5)$$

其中假定 $\xi_0 \gg 1$. $\xi = \xi_0$ 對應於殼的下端 $z = 0, r = r_0$; $\xi = \infty$ 對應於殼的頂點 $z = l, r = 0$, l 為殼的高. ξ_0, r_0, l 之間有如下的關係式:

$$\xi_0 = 3\left(\frac{l}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{l}{r_0}\right)^2 - 3}\right).$$

此關係式說明所論的殼體的底半徑 r_0 與高 l 之間必須滿足 $l/r_0 > \sqrt{3}$ 的條件,即限於討論較為細長的一類殼體.

至於 l 的大小當然取決於給定的底半徑與體積. 此處 $\lambda = \frac{4\xi_0}{r_0(1 + \xi_0^2)^2}$.

與前一情形同樣,我們限於討論對應於 $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_1$ 的殼的部分,其中對應於 ξ_1 的半徑為 r_1 時,要求 r_1 滿足條件 $h/r_1 \ll 1$.

於是在上述諸條件下,我們可取下列近似表達式:

$$z = l - \frac{6}{\lambda\xi^2}, \quad r = \frac{4}{\lambda\xi^3}, \quad z' = \frac{12}{\lambda\xi^3}, \quad r' = -\frac{12}{\lambda\xi^4}, \quad \alpha = \frac{12}{\lambda\xi^3}. \quad (7.6)$$

齊次方程(6.6)在現在的情形簡化為

$$V'' + \frac{9}{\xi^2} \left(-1 + \frac{4i\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h\lambda\xi}\right) V = 0. \quad (7.7)$$

再注意到 $\frac{4\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h\lambda\xi} \gg 1$, 我們又可取近似方程

$$V'' + i \frac{36\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h\lambda\xi^3} V = 0. \quad (7.8)$$

於是不難寫出(7.8)的二獨立解:

$$u = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cosh\left(\frac{st}{\sqrt{\xi}}\right) dt, \quad v = \int_1^\infty \sqrt{t^2-1} e^{\frac{st}{\sqrt{\xi}}} dt, \quad (7.9)$$

$$\text{其中 } s = -12 \sqrt{\frac{-i\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h\lambda}}.$$

於是根據前節的近似解法即可求得上述兩類重要殼體內熱應力的分佈以及變彈性所產生的影響. 但由於數值計算較繁,我們不擬在此佔更多篇幅來進行實例計算,而將此一問題留到下節圓柱殼的簡單情形.

8. 圓 柱 殼

本節中我們將應用第 6 節的近似解法對圓柱殼的熱應力問題給以數值計算，並藉以說明變彈性對應力分佈的影響。

我們現在討論一個一端被夾住另一端伸向無窮的半無限圓柱殼。

殼的方程

$$z = \xi \quad (0 \leq \xi < \infty), \quad r = 1, \quad (8.1)$$

並設

$$h = \frac{3\sqrt{5}}{400}, \quad \nu = \frac{1}{4}, \quad \varphi = e^{-\xi}. \quad (8.2)$$

假定殼體在軸向上可自由伸縮，因而第 4 節中的積分常數 $C = 0$ 。並由前一假定，在 $\xi = 0$ ，即被夾住的一端上，徑向位移 u_r 應滿足條件

$$u_r = u'_r = 0. \quad (8.3)$$

此外，當 ξ 趨於無窮時應力趨於零。

在現在的情形，條件(5.7)顯然成立。於是可按第 6 節的一般解法求問題的近似解。首先在上述的邊界條件下解彈性模數為常數時的微分方程

$$Z''_0 + 200iZ_0 = -200i\kappa e^{-\xi}, \quad (8.4)$$

得

$$Z_0 = (1 - 19i)\kappa e^{-(1-i)10\xi} - \frac{200i\kappa}{1 + 200i} e^{-\xi}, \quad (8.5)$$

或充分近似地取

$$Z_0 = \kappa \{ (1 - 19i)e^{-(1-i)10\xi} - e^{-\xi} \}. \quad (8.6)$$

其次再按同樣的邊界條件解方程

$$\begin{aligned} Z''_1 + 200iZ_1 = \kappa \left\{ \frac{\varepsilon^2}{2} \left[(1-19i)(e^{-(12-10i)\xi} + 2\varepsilon e^{-(13-10i)\xi}) - e^{-3\xi} - 2\varepsilon e^{-4\xi} \right] + \right. \\ \left. + 100i(-2e^{-\xi} + \varepsilon e^{-2\xi}) \right\}, \end{aligned} \quad (8.7)$$

得

$$Z_1 = \kappa \left\{ [1 - 0.45\varepsilon + i(-19 + 8.6\varepsilon)]e^{-(1-i)10\xi} + \frac{\varepsilon}{2}e^{-2\xi} - e^{-\xi} + \eta(\varepsilon, \xi) \right\}, \quad (8.8)$$

其中 $\eta(\varepsilon, \xi)$ 為絕對值近於 $0.0004\varepsilon^2$ 的微量，可忽略不計。

同樣我們還可逐次求得 $Z_2, Z_3, \dots$ 等等。但為着說明問題，求得 Z_0, Z_1 就够了。

按公式(5.10), (5.11)不難求得相應的應力與位移。為着說明變彈性對應力分佈的影響，我們以 N_θ, M_ξ 為例加以討論。

我們將對應於 Z_0 與 Z_1 的 N_θ, M_ξ 分別寫做 $N_\theta^{(0)}, M_\xi^{(0)}$ 及 $N_\theta^{(1)}, M_\xi^{(1)}$ ，於是我們計算得

$$\begin{aligned} N_\theta^{(0)} &= -\frac{3\sqrt{5}\kappa E_0}{400} (\cos 10\xi + 0.9 \sin 10\xi) e^{-10\xi}, \\ M_\xi^{(0)} &= -\frac{3\sqrt{5}\kappa E_0}{80000} \left\{ (0.9 \cos 10\xi - \sin 10\xi) e^{-10\xi} + \frac{e^{-\xi}}{200} \right\}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned}
 N_{\theta}^{(1)} &= -\frac{3\sqrt{5}\kappa E_0}{400} \{ (1 - 0.45\varepsilon - 0.55\varepsilon e^{-\xi}) \cos 10\xi + \\
 &\quad + (0.9 - 0.4\varepsilon - 0.45\varepsilon e^{-\xi}) \sin 10\xi \} e^{-10\xi}, \\
 M_{\xi}^{(1)} &= -\frac{3\sqrt{5}\kappa E_0}{80000} (1 - \varepsilon e^{-\xi}) \left\{ [(0.9 - 0.4\varepsilon + 0.45\varepsilon e^{-\xi}) \cos 10\xi - \right. \\
 &\quad \left. - (1 - 0.45\varepsilon - 0.5\varepsilon e^{-\xi}) \sin 10\xi] e^{-10\xi} + \frac{e^{-\xi}}{200} \right\}.
 \end{aligned} \quad (8.10)$$

從(8.9), (8.10)可以看出, 在殼被夾住的一端($\xi = 0$)上, N_{θ}, M_{ξ} 的絕對值為最大, 並對兩種情形的各值有如下的關係式:

$$\frac{N_{\theta}^{(0)} - N_{\theta}^{(1)}}{N_{\theta}^{(0)}} = \varepsilon, \quad \frac{M_{\xi}^{(0)} - M_{\xi}^{(1)}}{M_{\xi}^{(0)}} = 0.855\varepsilon. \quad (8.11)$$

最後, 為着說明變彈性對應力分佈的影響, 我們就 $\varepsilon = 0, 0.2, 0.4$ 各種情形作出 N_{θ} 與 M_{ξ} 的曲綫(圖 2, 3).

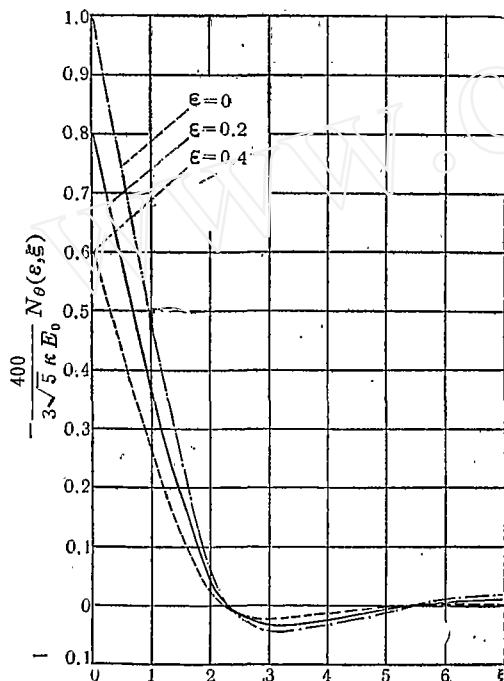


圖 2

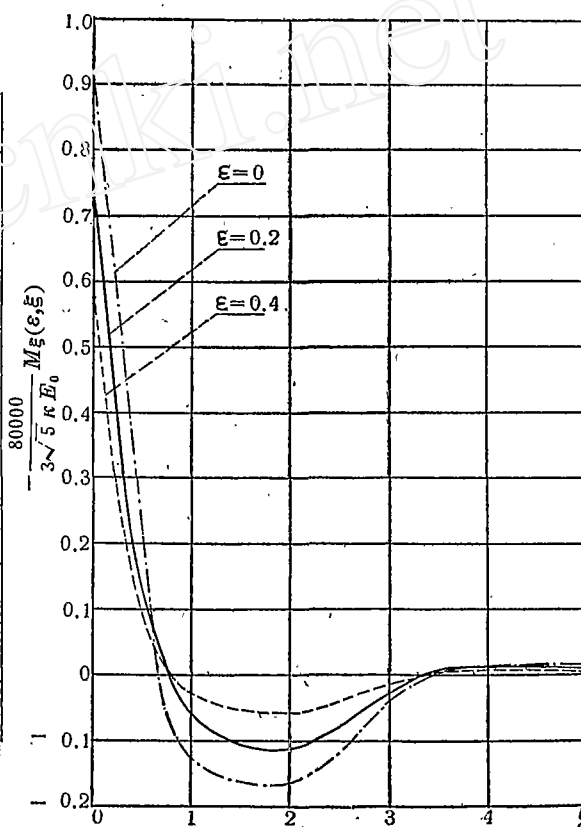


圖 3

結 語

本文在考慮彈性模數隨溫度改變的條件下, 對迴轉殼的熱應力問題進行了數學分析, 獲得簡單的複數式微分方程, 並指出相應的近似解法; 對幾種重要的殼體也進行了概要的

討論,同時給出原則的解法。最後爲了說明在熱應力的問題中,溫度對彈性模數影響的實際意義,在第8節中對有關圓柱殼的一個例子進行了數值計算,並獲得了預期的結果。如圖2,3所示,在考慮變彈性的條件下所求得的合力與力偶的絕對值比不考慮此一因素時所求得的值爲小,並且它們的變化狀態也較爲緩和。這一結果是與物理觀點相符合的,因爲彈性模數的降低即表明物體剛度的變小,因而在物體內所產生的應力也自然要來得小,變化狀態也要緩和。可見在考慮變彈性的因素下進行數學分析的結果要更接近於真實情況。最後公式(8.11)說明合力與力偶的最大絕對值在考慮變彈性時所減小的比率與彈性模數降低的比率約有同一的數量級,因而可見,在一定的高溫以上溫度對彈性模數的影響就不能再忽略不計了。

參 考 文 獻

- [1] 稀有金屬譯文集,第一集,鈦及其合金,冶金工業部有色冶金設計總院譯。
- [2] Hilton, H. H., Thermal stresses in bodies exhibiting temperature-dependent elastic properties, *J. Appl. Mech.*, **19**, 1952.
- [3] Nowinski, J., Thermal stresses in a thick-walled cylinder of variable elastic properties, *Arch. Mech. Stos.*, **4**, 1953.
- [4] Eggers, A. J. Jr., Resnikoff, M. M. and Dennis, D. H., Bodies of revolution having minimum drag at high supersonic airspeeds. Rep. No. 1306, NACA, 1957.

THERMAL STRESSES IN SHELLS OF REVOLUTION OF VARIABLE ELASTIC PROPERTIES

CHAO HWEI-YUAN

(North-eastern Institute of Technology)

ABSTRACT

A mathematical analysis is made for the thermal stresses due to an axially-symmetric and steady-state temperature gradient in shells of revolution.

It is assumed that the material of the shell possesses temperature dependent elastic properties such that the Young's modulus is a linear function of the temperature and the Poisson's ratio is constant.

A differential equation has been obtained in the same form as that in the case of temperature-independent elastic properties. We have then discussed special shells of revolution and, as an example, carried out computation for a cylindrical shell. On the basis of these computations, the effect of the temperature dependence of the Young's modulus on stress distribution is discussed.