第 2 卷 第 1 期　　力 学 学 报　　Vol. 2, No. 1
1958 年 1 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Jan., 1958

彈性地基上的固定边矩形板*

張 福 范

（清 华 大 学）

引 言

在彈性薄板的小撓度平衡理論中，四边固定的矩形板的弯曲是个难题．因而曾經是力学家們的研究对象．例如布勃諾夫(И. Г. Бубнов)，鉄木辛柯(S. Timoshenko)，及勒务(Love)都曾以各种不同的方法来解这問題．直至最近，还有苏联的学者們在研究这問題．

但如对于这問題再增加一个因素，例如这固定边的矩形板系在彈性地基上，則这問題当更困难．就作者所知，由于在数学上的困难，至今尚未有人对这問題作出严格的探討．本文提供以双重三角級数解这問題，并获得了精确的方程以供数字計算之用．并且，使所得的方程中的地基彈性模量 $k\to 0$，卽得鉄木辛柯教授以叠加法解固定边矩形板所得的結果．

所提供的方法，亦同样有效地可用以解垂直于板面的荷重与在板平面內有張力或压力共同作用的固定边矩形板．因用双重三角級数来解，在数学形式上这类問題与在彈性地基上的板是相同的．換言之，对于这类問題本文提供了一标准化的解法．

本文內容包括均布荷重及在板的中点作用一集中力这兩种情形．

I．在均布荷重作用下的固定边矩形板．

設有一为彈性基础所支承的矩形板，$x=0$，$x=a$，$y=0$，$y=b$ 这四边均为固定，如圖 1a．作用于板的均布荷重的强度为 q．須解的微分方程为：

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{1}{D}(q-kw), \tag{1}$$

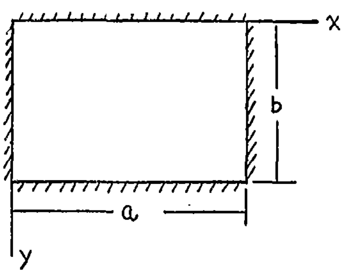

圖 1a.

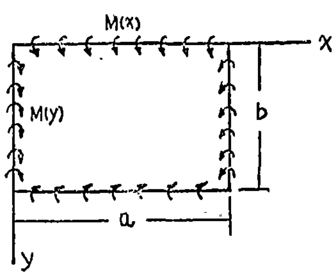

圖 1b.

* 1957 年 9 月 17 日收到．

并符合边界条件

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}=0, \tag{2}$$

式中的 w 为板的撓度. k 为弹性地基模量. $D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ 为板的抗弯剛度.

設想將板的四固定边除去，而得到四边为簡支边的这基本系統. 但在这四边为簡支边的板上，除均布荷重 q 外，在 $x=0$, $x=a$ 这兩边上有分布的弯矩 $M(y)$，在 $y=0$, $y=b$ 这兩边上有分布的弯矩 $M(x)$，如圖 1 b.

由于圖 1 b 所示这板的四边为簡支，所以可用双重正弦級数来表示这板的弯曲面，卽

$$w=\sum_{m=1\cdot3\cdots}^{\infty}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty} a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{3}$$

系数 a_{mn} 可用虛位移原理来决定. 整个系統內的变形能由兩部分組成：板內的变形能 U_1 及弹性地基內的变形能 U_2.

$$U_1=\frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy,$$

$$U_2=\int_0^a\int_0^b\frac{kw^2}{2}dx\,dy.$$

將(3)式代入，得：

$$U_1+U_2=\frac{\pi^4 ab}{8}D\sum_{m=1\cdot3\cdots}^{\infty}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}a_{mn}^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\sum_{m=1\cdot3\cdots}^{\infty}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{kab}{8}a_{mn}^2. \tag{4}$$

由虛位移原理，当系数 a_{mn} 增为 $a_{mn}+\delta a_{mn}$ 时，

$$\delta(U_1+U_2)=\int_0^a\int_0^b q\delta w\,dx\,dy+2\int_0^a M(x)dx\,\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{\substack{y=0\\y=b}}+2\int_0^b M(y)dy\,\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\x=a}}. \tag{5}$$

現分别計算(5)式的各項.

$$\delta(U_1+U_2)=\left[\frac{\pi^4 abD}{4}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\frac{kab}{4}\right]a_{mn}\delta a_{mn},$$

$$\int_0^a\int_0^b q\,dx\,dy\,\delta a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=\frac{4abq}{mn\pi^2}\delta a_{mn},$$

$$2\int_0^a M(x)dx\,\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{\substack{y=0\\y=b}}=2\frac{\pi}{b}n\,\delta a_{mn}\int_0^a M(x)\sin\frac{m\pi x}{a}dx,$$

$$2\int_0^b M(y)dy\,\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\x=a}}=2\frac{\pi}{a}m\,\delta a_{mn}\int_0^b M(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy.$$

但

$$\int_0^a M(x)\sin\frac{m\pi x}{a}dx=\frac{a}{2}E_m, \quad \int_0^b M(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy=\frac{b}{2}F_n,$$

E_m, F_n 各为以富氏級数表示 $M(x)$ 与 $M(y)$ 时的系数. 代入(5)式得：

$$a_{mn}\left[\frac{\pi^4 abD}{4}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\frac{kab}{4}\right]=\frac{4abq}{mn\pi^2}+\frac{\pi a}{b}nE_m+\frac{\pi b}{a}mF_n.$$

于是板的弯曲面为：

$$w=\frac{8}{ab}\sum_{m=1\cdot3\cdots}^{\infty}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{1}{\pi^4D\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+k}\left[\frac{2abq}{mn\pi^2}+\frac{\pi a}{2b}nE_m+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi b}{2a}mF_n\right]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{6}$$

將(6)式分别对 x 与 y 微分，并各以 $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ 代入，即得圖 1b 所示的簡支板沿 $x=0$, $x=a$, 及 $y=0$, $y=b$ 各边上的斜度.

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{\substack{y=0\\y=b}}&=\pm\frac{8\pi}{ab^2}\sum_{m=1\cdot3\cdots}^{\infty}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{1}{\pi^4D\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+k}\left[\frac{2abq}{m\pi^2}+\right.\\&\left.+\frac{\pi a}{2b}n^2E_m+\frac{\pi b}{2a}mnF_n\right]\sin\frac{m\pi x}{a},\\\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\x=a}}&=\pm\frac{8\pi}{a^2b}\sum_{m=1\cdot3\cdots}^{\infty}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{1}{\pi^4D\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)+k}\left[\frac{2abq}{n\pi^2}+\right.\\&\left.+\frac{\pi a}{2b}mnE_m+\frac{\pi b}{2a}m^2F_n\right]\sin\frac{n\pi y}{b}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

由于板的四边固定，

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{\substack{y=0\\y=b}}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\x=a}}=0,$$

于是由(7)式，

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\frac{k}{\pi^4D}}\left[\frac{2abq}{m\pi^2}+\frac{\pi a}{2b}n^2E_m+\frac{\pi b}{2a}mnF_n\right]=0,\\&\sum_{m=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\frac{k}{\pi^4D}}\left[\frac{2abq}{n\pi^2}+\frac{\pi a}{2b}mnE_m+\frac{\pi b}{2a}m^2F_n\right]=0.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

由方程(8)可得一組無穷联立方程以解系数 E_m 与 F_n，并从而計算作用于固定边上的弯矩. 在用(8)式計算时，我們將遇到形式如下的兩种級数，即

$$\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^4+2\eta n^2+p^2},\qquad\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+2\eta n^2+p^2}. \tag{9}$$

式中的 η 与 p 均为常数. 我們須計算以上兩級数的極限和. 对于弹性地基上板这問題，$\eta<p$. 为了計算極限和，可用以下这無穷乘积，即

$$\frac{e^{\frac{\pi z}{2}}+e^{-\frac{\pi z}{2}}}{2}=(1+z^2)\left(1+\frac{z^2}{9}\right)\left(1+\frac{z^2}{25}\right)\cdots$$

兩边取对数并微分，得

$$\frac{\pi}{4}\tanh\frac{\pi z}{2}=z\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2+z^2}. \tag{10}$$

(10)式可用以計算級数(9)的極限和，由于 $\eta<p$，(9)式的第一式可写作：

$$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^4+2n^2\eta+p^2}=$$

$$=\frac{1}{2i\sqrt{p^2-\eta^2}}\left[\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2+(\eta-i\sqrt{p^2-\eta^2})}-\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2-(\eta+i\sqrt{p^2-\eta^2})}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{8i\sqrt{p^2-\eta^2}}\left[\frac{\tanh\frac{\pi}{2}\sqrt{\eta-i\sqrt{p^2-\eta^2}}}{\sqrt{\eta-i\sqrt{p^2-\eta^2}}}-\frac{\tanh\frac{\pi}{2}\sqrt{\eta+i\sqrt{p^2-\eta^2}}}{\sqrt{\eta+i\sqrt{p^2-\eta^2}}}\right]. \quad (11)$$

因 $\sqrt{\eta\pm i\sqrt{p^2-\eta^2}}=\sqrt{\frac{1}{2}(p+\eta)}\pm i\sqrt{\frac{1}{2}(p-\eta)}$，代入(11)式經整理后，使实数部分相等，卽得：

$$\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^4+2n^2\eta+p^2}=$$

$$=\frac{\pi}{8p\sqrt{p^2-\eta^2}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(p-\eta)}\sinh\pi\sqrt{\frac{1}{2}(p+\eta)}-\sqrt{\frac{1}{2}(p+\eta)}\sin\pi\sqrt{\frac{1}{2}(p-\eta)}}{\sinh^2\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(p+\eta)}+\cos^2\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(p-\eta)}}. \quad (12)$$

同理得：

$$\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+2n^2\eta+p^2}=$$

$$=\frac{\pi}{8\sqrt{p^2-\eta^2}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(p-\eta)}\sinh\pi\sqrt{\frac{1}{2}(p+\eta)}+\sqrt{\frac{1}{2}(p+\eta)}\sin\pi\sqrt{\frac{1}{2}(p-\eta)}}{\sinh^2\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(p+\eta)}+\cos^2\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(p-\eta)}}. \quad (13)$$

由(8)式可知，

$$\eta=\frac{m^2b^2}{a^2},\qquad p^2=\frac{m^4b^4}{a^4}\left(1+\frac{ka^4}{\pi^4m^4D}\right).$$

于是

$$\left.\begin{aligned}
&p=\frac{m^2b^2}{a^2}\sqrt{1+\frac{ka^4}{m^4\pi^4D}},\qquad \sqrt{p^2-\eta^2}=\sqrt{\frac{kb^4}{\pi^4D}},\\
&\sqrt{\frac{1}{2}(p+\eta)}=\frac{mb}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{ka^4}{m^4\pi^4D}}+1\right)}=\frac{mb}{a}\alpha_m,\\
&\sqrt{\frac{1}{2}(p-\eta)}=\frac{mb}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{ka^4}{m^4\pi^4D}}-1\right)}=\frac{mb}{a}\beta_m,\\
&\text{式中的}\quad \alpha_m=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{ka^4}{m^4\pi^4D}}+1\right)},\quad \beta_m=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{ka^4}{m^4\pi^4D}}-1\right)}.
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

將(14)式代入(12)、(13)兩式，得(8)式中的兩級数的極限和，于是由(8)式的第一式得：

$$\frac{1}{\sinh^2\frac{m\pi b}{2a}\alpha_m+\cos^2\frac{m\pi b}{2a}\beta_m}\left[\frac{4qa^2}{\pi^3m^3\sqrt{1+\frac{ka^4}{\pi^4m^4D}}}\left(\beta_m\sinh\frac{m\pi b}{a}\alpha_m-\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{a}\beta_m\right)+\right.$$

$$\left.+E_m\left(\beta_m\sinh\frac{m\pi b}{a}\alpha_m+\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{a}\beta_m\right)\right]+$$

$$+\frac{8}{\pi^3}\sqrt{\frac{ka^4}{D}}\,\frac{a}{b}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{F_n}{n^3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right)^2+\frac{ka^4}{\pi^4n^4D}}=0. \qquad (15)$$

自(8)式的第二式將得到一类似的方程．这样，我們就有了一組無穷的联立方程．对于任一特殊情形，我們可用逐次近似法解系数 E_1, $E_3\cdots F_1$, $F_3\cdots$等．并从而計算 $M(x)$ 与 $M(y)$．

对于一正方形板，則弯矩沿四边的分布相同．于是 $E_m=F_m$．并且所得的兩組方程將相同．其形式为：

$$\frac{1}{\sinh^2\frac{m\pi\alpha_m}{2}+\cos^2\frac{m\pi\beta_m}{2}}\left[\frac{4qa^2}{\pi^3m^3\sqrt{1+\frac{ka^4}{\pi^4m^4D}}}(\beta_m\sinh m\pi\alpha_m-\alpha_m\sin m\pi\beta_m)+\right.$$

$$\left.+E_m(\beta_m\sinh m\pi\alpha_m+\alpha_m\sin m\pi\beta_m)\right]+$$

$$+\frac{8}{\pi^3}\sqrt{\frac{ka^4}{D}}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{E_n}{n^3\left(1+\frac{m^2}{n^2}\right)^2+\frac{ka^4}{\pi^4m^4D}}=0. \qquad (16)$$

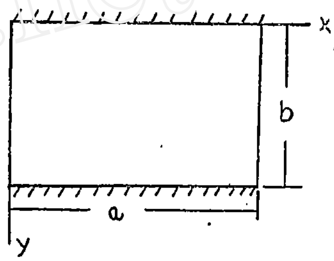

圖 2.

在解(16)式时，可先解 E_1, E_3, E_5, E_7 等四个系数．于是得四个联立方程．从所得的結果可判斷諸系数收斂的情况．

若使(15)式中的 $F_n=0$，卽得 $x=0$, $x=a$ 为簡支边，$y=0$, $y=b$ 为固定边这情形，如圖 2．

于是由(15)式，得：

$$E_m=-\frac{4a^2q}{\pi^3}\,\frac{1}{m^3}\,\frac{\beta_m\sinh\frac{m\pi b}{a}\alpha_m-\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{a}\beta_m}{\sqrt{1+\frac{ka^4}{\pi^4m^4D}}\left(\beta_m\sinh\frac{m\pi b}{a}\alpha_m+\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{a}\beta_m\right)}.$$

分布在固定边上的弯矩为

$$M(x)=-\frac{4a^2q}{\pi^3}\sum_{m=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}}{m^3\sqrt{1+\frac{ka^4}{\pi^4m^4D}}}\cdot\frac{\beta_m\sinh\frac{m\pi b}{a}\alpha_m-\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{a}\beta_m}{\beta_m\sinh\frac{m\pi b}{a}\alpha_m+\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{a}\beta_m}. \qquad (17)$$

級数(17)为一收斂很快的級数．只取为首的几項卽可計算得作用在固定边上的弯矩．

由(15)式还可作更进一步的推論．可以預料得到，当彈性地基模量 $k\to0$ 时，应由(15)式得到無彈性地基时固定边矩形板的边上的弯矩的算式．

由(14)式，当 $k=0$, $\alpha_m=1$, $\beta_m=0$．并且由該式得到

$$\sqrt{\frac{ka^4}{D}}=2\beta_m\sqrt{\beta_m^2+1}\,m^2\pi^2,\qquad \sqrt{1+\frac{ka^4}{m^4\pi^4D}}=2\beta_m^2+1,\qquad \alpha_m=\sqrt{1-\beta_m^2}.$$

代入(15)式,并使 $\beta_m\to0$,由洛必德(L'Hospital)規則得:

$$\lim_{\beta_m\to0}\left\{\frac{1}{\left(\sinh^2\frac{m\pi b}{2a}\sqrt{1-\beta_m^2}+\cos^2\frac{m\pi b}{2a}\beta_m\right)m^2\pi^2 2\beta_m\sqrt{\beta_m^2+1}}\cdot\right.$$

$$\cdot\left[\frac{4a^2q}{\pi^3m^3(2\beta_m^2+1)}\left(\beta_m\sinh\frac{m\pi b}{a}\sqrt{1-\beta_m^2}-\sqrt{1-\beta_m^2}\sin\frac{m\pi b}{a}\beta_m\right)+\right.$$

$$\left.+E_m\left(\beta_m\sinh\frac{m\pi b}{a}\sqrt{1-\beta_m^2}+\sqrt{1-\beta_m^2}\sin\frac{m\pi b}{a}\beta_m\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{8}{\pi^3}\frac{a}{b}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{F_n}{n^3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right)^2+4\beta_m^2(\beta_m^2+1)\frac{m^4}{n^4}}\right\}=$$

$$=\frac{4a^2q\left(\sinh\frac{m\pi b}{a}-\frac{m\pi b}{a}\right)}{2\left(\sinh^2\frac{m\pi b}{2a}+1\right)m^5\pi^5}+E_m\frac{\sinh\frac{m\pi b}{a}+\frac{m\pi b}{a}}{2\left(\sinh^2\frac{m\pi b}{2a}+1\right)m^2\pi^2}+$$

$$+\frac{8}{\pi^3}\frac{a}{b}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{F_n}{n^3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right)^2}=0. \qquad (15.a)$$

將(15.a)式稍加整理后,得:

$$\frac{4a^2q}{m^4\pi^3}\left[\tanh\frac{m\pi b}{2a}-\frac{\frac{m\pi b}{2a}}{\cosh^2\frac{m\pi b}{2a}}\right]+\frac{E_m}{m}\left[\tanh\frac{m\pi b}{2a}+\frac{\frac{m\pi b}{2a}}{\cosh^2\frac{m\pi b}{2a}}\right]+$$

$$+\frac{8m}{\pi}\cdot\frac{a}{b}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{F_n}{n^3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right)^2}=0. \qquad (15.b)$$

(15.b)式就是鉄木辛柯教授以叠加法解固定边矩形板所得的兩組無穷联立方程之一. 因此,算式(15)实已包括了無彈性地基时的固定边矩形板这情形.

現以一例說明算式(16)的应用.

例 1. 設有一四边固定的正方形板, $a=b=100\text{cm}$, $k=5\text{kg/cm}^3$, $E=2\times10^6$ kg/cm^2, $\mu=0.3$.

由算式(14)計算 α_m, β_m, 代入(16)式,并將計算先限于 E_1, E_3, E_5, E_7 等四个系数,得以下这四个方程.

$$3.3600\,E_1+0.40030\,E_3+0.09983\,E_5+0.03774\,E_7=-0.55524\,k',$$

$$0.10530\,E_1+0.70690\,E_3+0.05829\,E_5+0.02805\,E_7=-0.01859\,k',$$

$$0.01910\,E_1+0.03495\,E_3+0.23672\,E_5+0.01723\,E_7=-0.00161\,k',$$

$$0.00533\,E_1+0.01202\,E_3+0.01228\,E_5+0.11922\,E_7=-0.00032\,k',$$

式中的 $k'=\frac{4qa^2}{\pi^3}$.

以上这方程可用逐次近似法来解．由于沿对角綫的諸項为每方程中数值最大的項，所以先算位于黑綫左边的諸項．由第一式得 $E_1=-0.16525\,k'$．代入第二方程得 $E_3=-0.00168\,k'$．將 E_1 与 E_3 代入第三方程，得 $E_5=0.00663\,k'$．由最后这方程得 $E_7=0.00419\,k'$．將以上所得的近似解代入黑綫右边的諸項，得第二近似解．經三次重复計算后得，

$$E_1=-0.16530\,k',\ E_3=-0.00222\,k',\ E_5=0.00642\,k',\ E_7=0.00427\,k'.$$

分布在固定边上的弯矩为：

$$M(x)=-\frac{4a^2q}{\pi^3}\Big[0.16530\sin\frac{\pi x}{a}+0.00022\sin\frac{3\pi x}{a}-0.00642\sin\frac{5\pi x}{a}-0.00427\sin\frac{7\pi x}{a}\Big].$$

最大弯矩系在固定边的中点，即 $x=\frac{a}{2}$，或 $y=\frac{b}{2}$．

$$M(x)_{\max}=-\frac{4a^2q}{\pi^3}[0.16530-0.00222-0.00642+0.00427]=-0.02076\,qa^2.$$

所得的最大弯矩为無弹性地基时 $(0.0513\,qa^2)$ 的百分之 40．

例 2．設固定边的正方形板的边長 a, μ, E 与例 1 同，但 $k=1\,\mathrm{kg/cm^3}$．于是由 (16) 式：

$$\begin{aligned}
2.3426\,E_1&+0.15485\,E_3+0.04375\,E_5+0.01729\,E_7=-0.65672\,k',\\
0.6240\,E_1&+0.31655\,E_3+0.02602\,E_5+0.01254\,E_7=-0.00934\,k',\\
0.00891\,E_1&+0.01564\,E_3+0.10580\,E_5+0.00770\,E_7=-0.00075\,k',\\
0.00241\,E_1&+0.00537\,E_3+0.00550\,E_5+0.04681\,E_7=-0.00012\,k'.
\end{aligned}$$

解以上这方程，得：

$E_1=-0.28226\,k'$, $E_3=0.02489\,k'$, $E_5=0.01245\,k'$, $E_7=0.00769\,k'$．最大弯矩为：

$$M(x)_{\max}=-\frac{4qa^2}{\pi^3}[0.28226+0.02489-0.01245+0.00769]=-\frac{4qa^2}{\pi^3}(0.30239)=-0.03900\,qa^2.$$

$M(x)$ 的最大值为無弹性地基时 $(k=0)$ 的 76%．

II．有一集中力作用在板中点的弹性地基上的固定边矩形板．

設有一集中力 P 作用在板的中点，板的四边仍为固定，并由弹性地基所支承，圖 3 a，圖 3 b 为所取的四边为支簡的基本系統．

圖 3 b 所示这四边为簡支的板的弯曲面，可由双重三角級数表示为：

$$w=\frac{4}{ab}\sum_{m=1\cdot3\cdots}^{\infty}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{1}{\pi^4D\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+k}\Big[P\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi a}{b}nE_m+\frac{\pi b}{a}mF_n\Big]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{18}$$

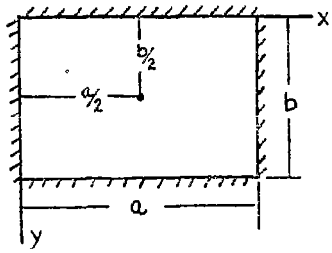

圖 3 *a*.

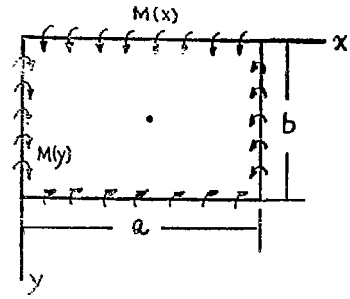

圖 3 *b*.

沿 $y=0$, $y=b$, 及 $x=0$, $x=a$ 各边上的斜度为：

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{\substack{y=0\\y=b}} &= \pm\frac{4\pi}{ab^2}\sum_{m=1\cdot3\cdots}^{\infty}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{1}{\pi^4D\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+k}\Big[Pn\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}+\\&\qquad+\frac{\pi a}{b}n^2E_m+\frac{\pi b}{a}mnF_n\Big]\sin\frac{m\pi x}{a},\\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\x=a}} &= \pm\frac{4\pi}{a^2b}\sum_{m=1\cdot3\cdots}^{\infty}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{1}{\pi^4D\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+k}\Big[Pm\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}+\\&\qquad+\frac{\pi a}{b}mnE_m+\frac{\pi b}{a}m^2F_n\Big]\sin\frac{n\pi y}{b}.\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

由于
$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{\substack{y=0\\y=b}}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\x=a}}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\frac{k}{\pi^4D}}\Big[Pn\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi a}{b}n^2E_m+\frac{\pi b}{a}mnF_n\Big]=0,\\&\sum_{m=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\frac{k}{\pi^4D}}\Big[Pm\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi a}{b}mnE_m+\frac{\pi b}{a}m^2F_n\Big]=0.\end{aligned}\right\}(20)$$

由 (20) 式可得一組無穷的联立方程，从而可解得富氏系数．这样就可以算得作用于固定边上的弯矩．

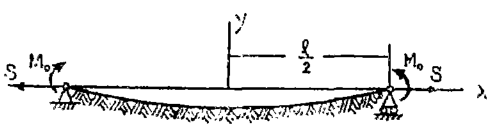

圖 4.

为了計算第(20)式中的第一个無穷級数的極限和，設有一在彈性地基上的簡支梁，在其兩端作用兩力偶 M_0 及張力 S，圖 4．

解这梁的撓度曲綫的微分方程

$$\frac{d^4y}{dx^4}-2\eta\frac{d^2y}{dx^2}+p^2y=0,\tag{21}$$

式中的
$$2\eta=\frac{S}{EI},\qquad p^2=\frac{k}{EI}.$$

EI 为梁的抗弯剛度，k 为彈性地基模量．

得梁中点的撓度

$$(y)_{x=0}=\frac{M_0}{EI}\frac{\sinh\frac{\beta l}{2}\sin\frac{\gamma l}{2}}{2\beta\gamma\left[\sinh^2\frac{\beta l}{2}+\cos^2\frac{\gamma l}{2}\right]},$$

式中的 $\beta=\sqrt{\frac{1}{2}(p+\eta)},\quad \gamma=\sqrt{\frac{1}{2}(p-\eta)}.$

同时，这梁的撓度曲綫亦可用正弦級数表示，并得其中点的撓度为：

$$(y)_{x=\frac{l}{2}}=\frac{4l^2}{\pi^3EI}M_0\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi}{2}}{n^4+2\eta n^2\frac{l^2}{\pi^2}+p^2\frac{l^4}{\pi^4}}.$$

于是得：

$$\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi}{2}}{n^4+2\eta n^2\frac{l^2}{\pi^2}+p^2\frac{l^4}{\pi^4}}=\frac{\pi^3}{4l^2}\frac{\sinh\frac{\beta l}{2}\sin\frac{\gamma l}{2}}{2\beta\gamma\left[\sinh^2\frac{\beta l}{2}+\cos^2\frac{\gamma l}{2}\right]}=$$

$$=\frac{\pi^3}{4l^2}\frac{\sinh\frac{l}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(p+\eta)}\sin\frac{l}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(p-\eta)}}{\sqrt{p^2-\eta^2}\left[\sinh^2\frac{l}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(p+\eta)}+\cos^2\frac{l}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(p-\eta)}\right]}. \tag{22}$$

由 (22) 式，即可計算 (20) 式的第一式的第一个級数的極限和．于是由 (20) 式的第一式得：

$$\frac{1}{\sinh^2\frac{m\pi b}{2a}\alpha_m+\cos^2\frac{m\pi b}{2a}\beta_m}\left[\frac{2P\sin\frac{m\pi}{2}}{m\pi}\sinh\frac{m\pi b}{2a}\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{2a}\beta_m+\right.$$

$$\left.+E_m\left(\beta_m\sinh\frac{m\pi b}{a}\alpha_m+\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{a}\beta_m\right)\right]+$$

$$+\frac{8}{\pi^3}\frac{a}{b}\sqrt{\frac{ka^4}{D}}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{F_n}{n^3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right)^2+\frac{ka^4}{\pi^4Dn^4}}=0, \tag{23}$$

式中的 α_m 与 β_m 仍与前同．

由(20)式的第二式可得一类似的方程．这样就得到了一組無穷的联立方程以解富氏系数，并从而得到作用于固定边的弯矩．对于一正方形板，由(23)式得：

$$\frac{1}{\sinh^2\frac{m\pi}{2}\alpha_m+\cos^2\frac{m\pi}{2}\beta_m}\left[\frac{2P\sin\frac{m\pi}{2}}{m\pi}\sinh\frac{m\pi}{2}\alpha_m\sin\frac{m\pi}{2}\beta_m+\right.$$

$$\left.+E_m(\beta_m\sinh m\pi\alpha_m+\alpha_m\sin m\pi\beta_m)\right]+\frac{8}{\pi^3}\sqrt{\frac{ka^4}{D}}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{E_n}{n^3\left(1+\frac{m^2}{n^2}\right)^2+\frac{ka^4}{\pi^4Dn^4}}=0. \tag{24}$$

若使 (23) 式中的 $F_n=0$，即得 $x=0$，$x=a$ 这兩边为簡支边，$y=0$，$y=b$ 为固定边这情

形. 于是由(23)式得:

$$E_m=-\frac{2P\sin\frac{m\pi}{2}}{m\pi}\cdot\frac{\sinh\frac{m\pi b}{2a}\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{2a}\beta_m}{\left(\beta_m\sinh\frac{m\pi b}{a}\alpha_m+\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{a}\beta_m\right)}.$$

分布在固定边上的弯矩为:

$$M(x)=-\frac{2P}{\pi}\sum_{m=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m}\cdot\frac{\sinh\frac{m\pi b}{2a}\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{2a}\beta_m}{\beta_m\sinh\frac{m\pi b}{a}\alpha_m+\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{a}\beta_m}\sin\frac{m\pi x}{a}. \tag{25}$$

若使彈性地基的模量 $k\to0$, 由(23)式得到:

$$\frac{P\sin\frac{m\pi}{2}}{m^2\pi}\frac{\frac{m\pi b}{2a}\tanh\frac{m\pi b}{2a}}{\cosh\frac{m\pi b}{2a}}+\frac{E_m}{m}\left(\tanh\frac{m\pi b}{2a}+\frac{\frac{m\pi b}{2a}}{\cosh^2\frac{m\pi b}{2a}}\right)+$$
$$+\frac{8m}{\pi}\frac{a}{b}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{F_n}{n^3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right)^2}=0. \tag{26}$$

(26) 式即为鉄木辛柯教授以叠加法解固定边矩形板在其中点承受集中力 P 作用时所得的兩組無穷联立方程之一.

現以一实例說明(24)式的应用.

例 3. 設正方形板的四边均固定, $a=100\,\text{cm}$, $h=1\,\text{cm}$, $E=2\times10^6\,\text{kg/cm}^2$, $\mu==0.3$, $k=5\,\text{kg/cm}^3$.

由(24)式,得:

$$3.3600\,E_1+0.40030\,E_3+0.09983\,E_5+0.03774\,E_7=-0.08756\,k',$$
$$0.10530\,E_1+0.70690\,E_3+0.05825\,E_5+0.02805\,E_7=+0.00485\,k',$$
$$0.01910\,E_1+0.03495\,E_3+0.23672\,E_5+0.01723\,E_7=-0.00011\,k',$$
$$0.00533\,E_1+0.01202\,E_3+0.01228\,E_5+0.11922\,E_7=+0.000003\,k',$$

式中的 $k'=\frac{2P}{\pi}$.

解上式得:

$$E_1=-0.02733\,k',\quad E_3=0.01096\,k',\quad E_5=0.00016\,k',\quad E_7=0.00019\,k'.$$

作用于固定边的最大弯矩为:

$$M(x)_{\max}=\frac{2P}{\pi}[-0.02733-0.01096+0.00016-0.00019]=0.02459\,P.$$

上述这解法当同样有效地可用来解其他形式的荷重,并且很容易被推广到兩相鄰边为固定兩相鄰边为簡支等情形. 正如在引言中已經述及, 如果代替彈性地基而有均布張力或压力作用于板的平面内,则用三角級数来解將得到在数学形式上与彈性地基上的板相同的結果. 对于更一般的情形, 例如板系在彈性地基之上并在板平面内有均布張力或压力作用,或这板系正交各向异性,则所提供的解法將仍为一有效的途徑.

参 考 文 献

[1] S. Timoshenko, Theory of Plates and Shells.
[2] 張福范，以双重三角級数解固定边矩形板(清华学报，1955)。
[3] 胡海昌，固定边矩形板的弯曲問題(物理学报，1955)。
[4] W. Nowaski，弹性薄板及薄壳的研究(中国科学院力学研究所，1956)。

CLAMPED EDGED RECTANGULAR PLATES ON THE ELASTIC FOUNDATION

Chang, Fo-van

(*Tsing-Hwa University*)

Abstract

In the theory of the small deflection of thin plates, the clamped edged rectangular plate is a difficult problem. Consequently, it has attracted the attention of such world famous scholars as И. Г. Бубнов, S. Timoshenko, and A. E. H. Love.

However, if we add one more factor to the problem, for instance the clamped edged plate is on the elastic foundation, the problem will become much more complicated. To the author's knowledge, owing to the mathematical difficulty no rigorous solution has yet been obtained. This paper presents a method by using the double sine series. Judged from the results so obtained the method is an effective one.

As can be expected, when the modulus of foundation approaches zero, our governing equations for the solution of the problem will turn to be the equations obtained by Timoshenko for the case of no elastic foundation.

Two cases are discussed in this paper, the one is of a uniformly loaded plate, the other is of a concentrated load acting at the middle of the plate. For the first case we get a system of infinite simultaneous equations of the following type:

$$\frac{1}{\sinh^2\frac{m\pi b}{2a}\alpha_m+\cos^2\frac{m\pi b}{2a}\beta_m}\left[\frac{4qa^2}{\pi^3 m^3\sqrt{1+\frac{ka^4}{\pi^4 m^4 D}}}\left(\beta_m\sinh\frac{m\pi b}{a}\alpha_m-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{a}\beta_m\right)+E_m\left(\beta_m\sinh\frac{m\pi b}{a}\alpha_m+\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{a}\beta_m\right)\right]+$$

$$+\frac{8}{\pi^3}\sqrt{\frac{ka^4}{D}}\frac{a}{b}\sum_{n=1,3\cdots}^{\infty}\frac{F_n}{n^3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right)^2+\frac{ka^4}{\pi^4 n^4 D}}=0,$$

in which
$$\alpha_m=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{ka^4}{m^4\pi^4D}}+1\right)},$$
$$\beta_m=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{ka^4}{m^4\pi^4D}}-1\right)}.$$

For the second case we get the equations of the type:

$$\frac{1}{\sinh^2\frac{m\pi b}{2a}\alpha_m+\cos^2\frac{m\pi b}{2a}\beta_m}\left[\frac{2P\sin\frac{m\pi}{2}}{m\pi}\sinh\frac{m\pi b}{2a}\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{2a}\beta_m+\right.$$
$$\left.+E_m\left(\beta_m\sinh\frac{m\pi b}{a}\alpha_m+\alpha_m\sin\frac{m\pi b}{a}\beta_m\right)\right]+$$
$$+\frac{8}{\pi^3}\frac{a}{b}\sqrt{\frac{ka^4}{D}}\sum_{n=1\cdot3\cdots}^{\infty}\frac{F_n}{n^3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{n^2}\right)^2+\frac{ka^4}{\pi^4Dn^4}}=0.$$

Numerical examples are included to show how to use these governing equations to obtain the bending moments acting along the clamped edges.