

粘土層沉陷(由于固結和次時間 效应)的二維問題*

陳 宗 基

(中国科学院土木建筑研究所)

提 要

本文指出现行的沉陷计算方法不考虑因均差应力 (Deviatoric stresses) 而产生的沉陷是不正确的。文中证明了均差应力张量不能忽略, 而土壤的结构对均差应力的反应 (与时间因素有关) 则必须考虑。作者根据他自己的关于粘土层固结与流变的理论, 提供几个二维问题的分析, 证明了总沉陷可以分为三部分, 即瞬时下沉, 因流变而产生的和因固结而产生的沉陷, 并且提出了时间为很大数值时的沉陷公式。可以断言, 在实际中, 沉陷不能单从压缩试验来估计。在二维问题中, 土壤的固结与古典的一维固结情形迥然不同, 因为土壤总是有横向膨胀的。均差应力就是粘土在荷载下瞬时下沉 (Instantaneous deflection) 和不断流变的原因。

緒 言

在土力学中, 沉陷计算通常采用从一维情形导出的公式。当竖向荷载的范围与土层厚度相比较是很大的时候, 整个系统可以当作一维情形。根据这个概念, 人们在实际中想从压缩试验来估计沉陷; 在这种试验中横向变形不可能产生。当土层厚度与基脚横向尺寸相比较是很大的时候, 土层常常被分为若干个水平层, 每层用一维情形的沉陷公式来计算, 竖向应力的分布则按布兴奈斯 (Boussinesq) 公式计算。

由于土壤的力学行为的复杂, 迄今尚无满意的计算沉陷的方法。通常, 理论与经验的公式联合应用, 导致许多矛盾, 因为这些公式是基于不同的概念。比如我们来分析特扎基 (Terzaghi)²⁾ 的一维沉陷公式和布兴奈斯的应力分布公式的联合应用。在实际中, 我们碰到的都是多维情形, 因为严格来说, 粘土层总会有横向变形, 古典的一维情形在实际中是不能出现的。特扎基把土壤的骨构当作可压缩的但具有不同的膨胀和压缩模量的材料, 即当作不完全可逆的可压缩的材料。但他没有作出进一步的关于土壤流变性质的说明, 比如关于土壤对于剪应力的反应。与此相反, 布兴奈斯明确地假定他的材料为一维线性弹性体。所以这两个理论所根据的基本概念是很不同的, 因而上述计算沉陷的方法缺乏健全的理论基础。这个方法还有一个缺点, 即时间因素对沉陷过程的影响无法考虑进去。

注: 原稿为英文, 题名 "Two Dimensional Problem of Settlement of Clay Layers due to Consolidation and Secondary Time Effect". 刘恢先译。

* 1957 年 9 月 5 日收到。本文曾在 1957 年 2 月全国力学学术报告会上宣读。

这一点可以直接看出如下:在压缩试验中,土壤的孔隙水可从试样的上下面自由渗出,但这样的边界条件不能在分割的水平土层中获得。所以,压缩试验中的时间效应(Time effect)一点也不能表示沉陷的增加为时间的函数的实际情形。因此,只有最后的沉陷能够作为各水平层的极限沉陷的总和估计出来。柴多维奇(Цытович)¹⁾给出了这样的计算公式并附有计算应力分布的图表。细节可参阅他所著的書。

应用上述计算方法便无法考虑均差应力张量,作者认为恰恰是这个应力张量导致土壤的连续粘滞流变和瞬时下沉,因此全部沉陷不能用上述现行公式来计算。均差应力张量的影响可用下面的例子来说明。让我们把一块厚橡皮放在绝对刚硬的桌面上,并在局部加置荷载橡皮面上就发生与时间俱增的沉陷。由于橡皮是不可压缩的($\nu=1/2$),体积变化不可能发生,因此全部沉陷都是均差应力的影响。这个例子可以引伸到充满水分的粘土层。在此情形,在受局部荷载后的瞬时下沉完全是剪力作用的后果,因为这时 $t=0$,没有孔隙水挤出来(土壤骨构的渗透性很低),因而没有体积变形产生。所以多维问题只能用考虑了均差应力张量的理论来解决。第一个考虑了这个均差应力张量的理论是格色凡诺夫(Герсеванов)³⁾提出的;呼洛林(Флорин)⁴⁾和比阿(Biot)⁵⁾也曾经提出过三维理论。但是伦都里克(Rendulic)⁶⁾特扎基⁷⁾卡里路(Carillo)⁸⁾等人关于土壤固结的多维理论则不能认为是正确的,因为剪应力完全被忽略。比阿理论的缺点是忽略了由于剪应力作用的时间效应。作者的意见是,粘滞流变*是粘土流变性质的基本构成部分,在计算中是不能忽视不顾的。根据特扎基²⁾的经验,在大多数的地基中都发生着流变的情形。

根据实验和实际事实,作者曾尝试建立一个新的、考虑了土壤骨构的固结和流变的理论。在这里,土壤被认为是线性的、粘弹性(Visco-elastic)并且有低透水性而又充满水分的材料。为了数学上的简便,采用了麦克斯威尔(Maxwell)模型来描述土壤骨构的流变行为。下面提出了关于二维问题的若干解答,这些解答是以作者为肥粘土导出的微分方程为根据。

微分方程的求解 如果不考虑体积力,二维问题的微分方程式⁹⁾如下:

$$\left. \begin{aligned} -\psi \Delta u + (\Theta + \psi/3) \partial \varepsilon / \partial x + \partial \sigma_w / \partial x &= 0, \\ -\psi \Delta w + (\Theta + \psi/3) \partial \varepsilon / \partial z + \partial \sigma_w / \partial z &= 0, \\ p \varepsilon &= -K \Delta \sigma_w, \\ \Delta \varepsilon &= \beta^2 \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $\varepsilon = -(\partial u / \partial x + \partial w / \partial z)$;

u 和 w 为 x 与 z 方向的变位;

σ_w = 水压力;

$\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$ 拉普拉斯算子(Laplace Operator);

$K = k / \eta_w$ 其中 k 为土壤骨架的渗透系数, η_w 为孔隙水的粘滞系数;

$\psi = \frac{\eta G p}{\eta p + G}$ 其中 G 为剪切模量, η 为土壤结构的剪切粘滞系数;

p 黑维赛得算子(Heaviside's Operator);

* 注:粘滞流变不能和塑性理论中的塑性流变相混同,塑性流变是在总合应力超过一定限度时立即发生,而粘滞流变总是在粘滞弹性材料中发生。

$$\Theta = \frac{E}{3(1-2\nu_0)}, \text{ 其中 } \nu_0 \text{ 为弹性变形的泊桑比(Poisson's ratio);}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{3K\Theta} \frac{(ap+3E)p}{bp+E}, \text{ 这是以算子形式写出,}$$

$$\text{其中 } E=2G(1+\nu_0), \quad a=6\eta(1+\nu_0), \quad b=6\eta(1-\nu_0).$$

在上列微分方程中, 压应力称为正号应力, 压缩变形称为正号变形。

可以证明, 下面的式子是微分方程(1)的解答:

$$\left. \begin{aligned} u &= i \exp(i\Omega x) [\exp(\Omega z) A_1 - \exp(-\Omega z) A_2 + \{[1+\Omega z] \exp(\Omega z) B_1 + \\ &+ [1-\Omega z] \exp(-\Omega z) B_2\} / 2\psi\Omega - \{\exp(Mz) C_1 + \exp(-Mz) C_2\} \Omega / \beta^2], \\ w &= \exp(i\Omega x) [\exp(\Omega z) A_1 + \exp(-\Omega z) A_2 + z \{\exp(\Omega z) B_1 + \\ &+ \exp(-\Omega z) B_2\} / 2\psi + \{\exp(-Mz) C_1 - \exp(Mz) C_2\} M / \beta^2], \\ \sigma_w &= \exp(i\Omega x) [\exp(\Omega z) B_1 + \exp(-\Omega z) B_2 - \\ &- \{\exp(Mz) C_1 + \exp(-Mz) C_2\} / \alpha], \\ s &= \exp(i\Omega x + Mz) C_1 + \exp(i\Omega x - Mz) C_2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $\Omega = 2\pi/\text{波長}$;

$$M^2 = \Omega^2 + \beta^2 = \Omega^2 + \frac{1}{3K\Theta} \frac{(ap+3E)p}{bp+E};$$

$$\alpha = \frac{1}{3\Theta} \frac{ap+3E}{bp+E}.$$

在上列方程式中, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 和 C_2 都是积分出来的“常数”, 它们都是算子 p 的函数, 因而是时间的函数。

余弦函数型的荷载

设有一均匀厚度 h 的粘土层复盖在半无限体的石层上。假定石层是绝对刚硬和不透水的; 并假定它和粘土层的接触面没有摩擦, 使剪应力不可能在此处发生。在粘土层的上表面, 孔隙水可自由地挤出, 并假定剪应力在此处也不能发生。当然, 假定粘土层的上、下面都没有摩擦是在悲观的一面。我们也可以假定上、下面都没有水平位移产生, 但这样的假定是在乐观的一面。所以, 作者赞成第一个假设, 因为它是在安全方面并且在本文所考虑的情形(即粘土层复盖于土体之上)之下是合理的。假定荷载具有无限大的范围并按余弦函数 $q \cos \Omega x$ 变化, 而且在时间 $t=0$ 时就开始作用。再者, 土壤过去受应力的历史不予考虑, 因此, 用运算数学的语言来说, 荷载的强度是 $q \cos \Omega x \cdot 1$ (见图 1)。如果 x 平面取在石层的表面, z 轴的正向向上, 则边界条件如下:

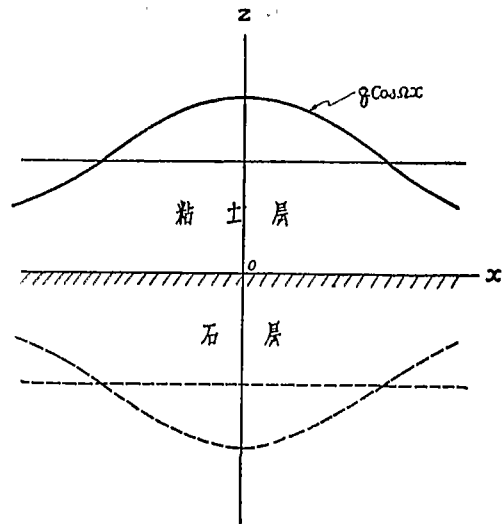


图 1, 荷载 $q \cos \Omega x \cdot 1$

当 $z=0$:

$$1. w=0,$$

$$2. \tau_{xz}=0,$$

$$3. \frac{\partial \sigma_w}{\partial z}=0,$$

当 $z=h$:

$$4. \sigma_w=0,$$

$$5. \tau_{xz}=0,$$

$$6. \sigma_z=2\psi\varepsilon_z+(\Theta-2\psi/3)\varepsilon+\sigma_w=q\cos\Omega x\cdot\mathbf{1}.$$

这个情形对 x 轴和对 z 轴都是对称的。所以只须 3 个“积分常数” $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$, 和 $\hat{C}_3$ 来代替解答 (2) 中的 6 个常数 $A_1, \dots, C_2$ 。

可以证明在对称的情形下, 下列公式是前述微分方程的解答。

$$\begin{aligned} u &= \sin \Omega x \{-\cosh \Omega z \hat{C}_1 - \cosh \Omega z \hat{C}_2 / 2\psi \Omega - z \sinh \Omega z \hat{C}_2 / 2\psi + \Omega \cosh Mz \hat{C}_3 / \beta^2\}, \\ w &= \cos \Omega x \{\sinh \Omega z \hat{C}_1 + z \cosh \Omega z \hat{C}_2 / 2\psi - M \sinh Mz \hat{C}_3 / \beta^2\}, \\ \sigma_w &= \cos \Omega x \{\cosh \Omega z \hat{C}_2 - \cosh Mz \hat{C}_3 / \alpha\}, \\ \varepsilon &= \cos \Omega x \cosh Mz \hat{C}_3. \end{aligned} \quad (3)$$

下面只计算了粘土层上表面的竖向变位 W 。根据上列 6 个边界条件, W 可以从下列公式计算:

$$w_{z=h} = -\cos \Omega x \cdot \sinh \Omega h \hat{C}_2 / 2\psi \Omega,$$

式中:

$$\hat{C}_2 = \frac{q}{\cosh \Omega h} \frac{p \tanh \Omega h}{(p+2\psi K \Omega^2) \tanh \Omega h - 2\psi K \Omega M \tanh Mh + p \Omega h / \cosh^2 \Omega h} \cdot \mathbf{1}.$$

令 W 表示沉降 ($W = -w_{z=h}$) 得:

$$W = \frac{h \cos \xi x / h}{2\psi \xi} \frac{p \tanh^2 \xi}{pQ - 2\psi KP / h^2} q \cdot \mathbf{1}, \quad (4)$$

式中:

$$\xi = \Omega h,$$

$$Q = \tanh \xi + \xi / \cosh^2 \xi,$$

$$P = \xi (Mh \tanh Mh - \xi \tanh \xi).$$

必须记住在公式 (4) 中, ψ 和 M 都是以算子形式写出, 以 p 代表黑维赛得算子。有了公式 (4), 就可能计算在二维对称荷载下的沉降。

当时间 t 为很大数值时的沉降

现在来寻求当时时间为很大数值时的解答。在此情形, 算子 p 和带算子形式的 β^2 可以当作极小的数量。应用中值定理可证明 $P < 3/4 \beta^2 h$ 因而 P 是 p 的一次式。所以, 沉降 W 的公式 (4) 可以展开为下列级数:

$$W = h \frac{\cos \xi x / h}{2\psi \xi} \frac{\tanh^2 \xi}{Q} \left\{ 1 + \frac{2\psi}{Q} \frac{KP}{ph^2} + \left(\frac{2\psi}{Q} \frac{KP}{ph^2} \right)^2 + \dots \right\} q \cdot \mathbf{1}. \quad (5)$$

在后面, 所有 $\beta^2 h^2$ 的二次及更高次的项 (即 $p^2, p^3 \dots$ 等) 都忽略不计; 可以证明, 作为时间算子的 $KP/p^2 h^2$, 它的每次方将带进 $K\beta^2/p$ 的同次方与相应的 ξ 的函数的乘积, 但是 ξ 的函数是与时间无关的。可以看出, 第一、二、三各项相应地包含下列算子: $\frac{1}{\psi} \cdot \mathbf{1}$, $\frac{\beta^2}{\psi} \cdot \mathbf{1}$, $\psi \left(\frac{\beta^2}{p} \right)^2$ 。用 $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t) \dots$ 相应地表示上列函数, 则得下列关系:

$$\frac{1}{\psi} \cdot \mathbf{1} = F_1(t) = \frac{1}{G} \left(1 + \frac{t}{\mu} \right), \quad (5.1)$$

$$\frac{\beta^2}{p} \cdot \mathbf{I} = F_2(t) = \frac{1}{K\Theta} \{1 - (1 - g^2) \exp(-g^2 t / \mu)\}, \quad (5.2)$$

$$\psi\left(\frac{\beta^2}{p}\right) \cdot \mathbf{I} = F_3(t) = \frac{G}{K^2\Theta^2} g^2 \{g^2 - (1 - g^2) g^2 t / \mu\} \exp(-g^2 t / \mu), \quad (5.3)$$

式中:

$$g^2 = \frac{1 + \nu_0}{3(1 - \nu_0)};$$

$\mu = \eta / G$, 表示土壤骨樑的松弛时间(Relaxation time)。

对于这些时间的函数,可作出下列注解:

1. $F_1(t)$ 只含 μ , G 而不含 K 和 Θ , 所以 $F_1(t)$ 代表沉降的直线上升部分, 这部分沉降完全是均差应力的结果;

2. 当时间为很大数值时, $F_2(t)$ 接近于一常数, 等于 $1/K\Theta$ 。在后面还会证明从 $F_2(t)$ 可得出由于固结而产生的沉降的时间函数;

3. 当时间为很大数值时, $F_3(t)$ 及更高次的时间函数接近于零, 因此第三项及以后各项可以忽略不计(见后面对于第三项的估计);

4. 所有指数函数的指数内含有 g^2/μ 。物理上的意义如下: $\mu = \eta/G$ 愈大, 则土壤骨樑的流变愈小, 要在更长的时间才能达到最终稳定状态。这个结论是和实际相符的。对于软弱的粘土层, 终级的均速沉降曾经在两年或更短时间内观察到。但根据记录, 有的刚硬粘土层的稳定状态在 25 年内才达到。

为了更深入地了解公式(5)的物理意义, 我们来研究一下当 $\xi = \Omega h \rightarrow 0$ 的极限状态。在此情形, 均匀竖向荷载的波长与粘土层厚度相较可谓无限大。

第一项得出:

$$\frac{hq}{4} \cos \frac{\xi x}{h} \cdot \frac{1}{\psi} \cdot \mathbf{I} = \frac{hq}{4G} \cos \frac{\xi x}{h} \left(1 + \frac{t}{\mu}\right), \quad (5.4.1)$$

第二项变换为:

$$\frac{hq}{4} \cos \frac{\xi x}{h} \frac{K\beta^2}{p} \cdot \mathbf{I} = \frac{hq}{4\Theta} \cos \frac{\xi x}{h}. \quad (5.4.2)$$

第一项代表土壤对于纯均差应力的反应, 在古典的一维情形是不出现的。这是由于在古典一维情形中, 假定了没有横向位移发生。当然, 横向位移在二维情形下是可能的。当余弦荷载的波长为无限大, 如同我们所研究的极限情形, 横向位移同样可能; 因为在半波长的地方(即很远的地方)粘土可以有横向的移动。但如果粘土层边界上的剪应力不忽略的话, 横向位移的发生是不会那样显著的。因此, 作者在前面曾指出, 这些解答是在悲观的一面。他曾经特地挑选这个边界条件来表明剪应力对变形的最大影响。如果拿一个与古典一维情形相似但不完全相同的情形来研究, 则第二项必须考虑。这一项包含压缩模量 Θ ; 对于不可压缩的材料, Θ 成为无限大, 第二项等于零。所以很明显, 第二项和土力学中的固结具有相同的意义。

均匀的带形荷载

现在提出下面的例子。在一水平范围为无限大, 厚度为 h 的粘土层上放置一宽度为 $2L$ 、长度为无限大的直线带形荷载; 为了数学上的简便, 假定荷载面积以外的面积不受

荷载。前 5 个边界条件保持和余弦荷载一致。带形荷载的强度为 $q\text{kg/cm}^2$ ，可用下列富里哀积分代表：

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \xi x/h \cdot \sin \xi L/h}{\xi} d\xi \cdot q \cdot 1 = \begin{cases} q \cdot 1, & |x| < L; \\ 0, & |x| > L. \end{cases}$$

如果加入新的符号 δ_1 和 δ_2 ，它们决定于：

$$\delta_1 = (x - L)/h, \quad \delta_2 = (x + L)/h,$$

则上列积分可以变换为：

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \delta_2 \xi - \sin \delta_1 \xi}{\xi} d\xi \cdot q \cdot 1.$$

当时 δ 为很大数值时，沉陷可从下列公式算出：

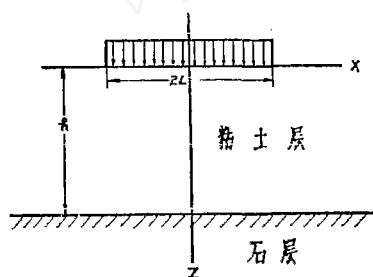


图 2. 均匀带形荷载

$$W = \frac{hq}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \delta_2 \xi - \sin \delta_1 \xi}{2\psi \xi^2 Q} \tanh^2 \xi \cdot \left\{ 1 + \frac{2\psi}{Q} \frac{KP}{ph^2} + \left(\frac{2\psi}{Q} \frac{KP}{ph^2} \right)^2 + \dots \right\} d\xi \cdot 1. \quad (6)$$

可以看出上式右侧的单位是长度。

现在来考虑下列积分：

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^\infty \frac{\sin \delta \xi \tanh^2 \xi}{2\xi^2 Q \psi} d\xi \cdot 1,$$

$$\mathcal{I}_2 = K \int_0^\infty \frac{\sin \delta \xi \tanh^2 \xi}{\xi^2 Q^2} \frac{P}{ph^2} d\xi \cdot 1,$$

$$\mathcal{I}_3 = 2K^2 \int_0^\infty \frac{\sin \delta \xi \tanh^2 \xi}{\xi^2 Q^3} \left(\frac{P}{ph^2} \right)^2 \psi d\xi \cdot 1.$$

可以证明，所有的积分函数都是属于下列形式：

$$F(\xi) \Phi(p) \cdot 1.$$

这个形式对数值积分是十分适合的。为了算出这些积分，可以采用著名的费隆 (Filon) 公式：

$$\int_a^b f(\xi) \sin \delta \xi d\xi = h [-\alpha \{ f(b) \cos \delta b - f(a) \cos \delta a \} + \beta s_{2n} + \gamma s_{2n-1}].$$

在这个公式里，积分的范围被分为 $2n$ 等分，每等分为 $h = (b - a)/2n$ ，系数 α ， β 和 γ 都是 δh 的函数，可以列成表格。再者， s_{2n} 代表曲线 $f(\xi) \sin \delta \xi$ 在积分限值 a 和 b 之间的偶数竖坐标的总和，减去第一个和最后一个竖坐标的一半；单数坐标的总和则用 s_{2n-1} 代表。上述计算应按 δ_2 及 δ_1 分别进行，然后从前者减去后者。对前两个积分将具体进行计算，但对第三个积分只作一估计。

$\mathcal{I}_1$ 的计算

应用 Q 的式子，可写出：

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^\infty \frac{\sin \delta \xi \tanh^2 \xi}{2\xi^2 Q} d\xi \cdot \frac{1}{\psi} \cdot 1 = \int_0^\infty \frac{\sin \delta \xi}{\xi^2} \frac{\sinh^2 \xi}{\sinh 2\xi + 2\xi} d\xi \cdot \frac{1}{\psi} \cdot 1.$$

$\mathcal{I}_1$ 的积分范围将分为两部分： $0 \leq \xi \leq 3$ 和 $3 \leq \xi < \infty$ ，相应的积分称为 $\mathcal{I}_{11}$ 和 $\mathcal{I}_{12}$ 。第一个积分可利用费隆公式直接算出，但如 δ 的数值很大，则计算十分繁复，因为当 δ 很大时，正弦函数跳动得很剧烈。因此不如用迴路积分法 (Contour integration) 来计算积分 $\mathcal{I}_1$ 。

从 0 到 ∞ 的数值。这方面的结果以后再发表。

在第二部分 $3 \leq \xi < \infty$ 范围里面, 下式可以成立:

$$\frac{\sinh^2 \xi}{\sinh 2\xi + 2\xi} = \frac{1}{2}.$$

这样写, 误差不超过 3.5%, 所以积分 $\mathcal{J}_1$ 的第二部分可以写为:

$$\mathcal{J}_{12} = \frac{1}{2} \int_3^\infty \frac{\sin \delta \xi}{\xi^2} d\xi = \frac{\sin 3\delta}{6} - \frac{\delta \operatorname{Ci}(3\delta)}{2}.$$

所以第一项在沉降 W 里面所占部分, 即固结变而产生的沉降(次时间效应)可以从下式得出:

$$W_1 = \frac{hq}{\pi} \{ (\mathcal{J}_{11} + \mathcal{J}_{12}) \delta_2 - (\mathcal{J}_{11} + \mathcal{J}_{12}) \delta_1 \} F_1(t), \quad (6.1)$$

式中 $F_1(t)$ 取决于公式(5.1)。

现在来研究一种特殊情形, 即 $\delta \xi$ 很小, 它的正弦函数可以用其宗量来代替; 积分 $\mathcal{J}_1$ 可以变换为:

$$\mathcal{J}_1 = \delta \int_0^3 \frac{\sinh^2 \xi}{\xi(\sinh 2\xi + 2\xi)} d\xi \frac{1}{\psi} \cdot 1 + \frac{1}{2} \int_3^\infty \frac{\sin \delta \xi}{\xi^2} d\xi \frac{1}{\psi} \cdot 1.$$

进一步计算, 得出下列 W_1 的公式:

$$W_1 = \frac{hq}{\pi} \left\{ 2.34 \frac{L}{h} + \frac{1}{2} \frac{x-L}{h} \operatorname{Ci} \left(3 \frac{x-L}{h} \right) - \frac{1}{2} \frac{x+L}{h} \operatorname{Ci} \left(3 \frac{x+L}{h} \right) \right\} F_1(t).$$

借助于小数值的 δ 的展开: $\operatorname{Ci}(3\delta) \sim 0.577 + \ln |3\delta|$, 得

$$W_1 = \frac{q}{2\pi} \left\{ 3.49L + x \ln \frac{|x-L|}{x+L} - L \ln \frac{9|x^2-L^2|}{h^2} \right\} F_1(t). \quad (6.1.1)$$

可以看出这部分沉降随 h^2 的对数值而增加。这个公式适用于 h 比 $(x-L)$ 和 $(x+L)$ 大得很多的时候, 亦即粘土层很厚的时候。

现在来考虑另一极限情形, 即粘土层厚度与 $(x-L)$ 和 $(x+L)$ 相较非常小, 即 $\delta \rightarrow \infty$ 。积分仍分为两部分计算, 即 $0 \leq \xi \leq \xi_1$ 和 $\xi_1 \leq \xi < \infty$; ξ_1 很小, $\sinh \xi_1 = \xi_1$ 可以成立。下列积分必须算出:

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^{\xi_1} \frac{\sin \delta \xi}{4\xi} d\xi + \int_{\xi_1}^\infty \frac{\sin \delta \xi}{\xi^2} \frac{\sinh^2 \xi}{\sinh 2\xi + 2\xi} d\xi.$$

对于 δ 的大数值(即 $\delta \rightarrow \infty$), 第一项得出 $1/4 \operatorname{Si}(\delta \xi_1)_{\delta \rightarrow \infty} = \pi/8$; 但第二项得不出数值, 因正弦函数跳动得十分剧烈, 故得:

$$W_1 = \frac{hq}{4G} \left(1 + \frac{t}{\mu} \right).$$

这与前面在余弦荷载, 波长为无限大时获得的结果相同(见 5.4.1)

$\mathcal{J}_2$ 的计算

现在考虑第二个积分:

$$\mathcal{J}_2 = K \int_0^\infty \frac{\sin \delta \xi \tanh^2 \xi}{\xi^2 Q^2} \frac{P}{ph^2} d\xi \cdot 1.$$

积分的路线将分为两部分, $0 \leq \xi \leq 1$, 和 $1 \leq \xi < \infty$ 相应的积分称为 $\mathcal{J}_{21}$ 和 $\mathcal{J}_{22}$ 。可以证

明在第一积分范围,如果忽略 P 的二次方和更高次方,则 P 可以近似地用下式表示:

$$P = \beta^2 h^2 \left(\xi - \frac{2}{3} \xi^3 + \frac{2}{5} \xi^5 \right),$$

第一个积分成为:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{21} &= K \int_0^1 \frac{\sin \delta \xi}{\xi} \frac{\tanh^2 \xi \left(1 - \frac{2}{3} \xi^2 + \frac{2}{5} \xi^4 \right)}{(\tanh \xi + \xi / \cosh^2 \xi)^2} d\xi \frac{\beta^2}{p} \cdot \mathbf{I} = \\ &= K \int_0^1 \frac{\sin \delta \xi}{\xi} \frac{\sinh^2 2\xi \left(1 - \frac{2}{3} \xi^2 + \frac{2}{5} \xi^4 \right)}{(\sinh 2\xi + 2\xi)^2} d\xi \frac{\beta^2}{p} \cdot \mathbf{I}. \end{aligned}$$

此式可借助于前面讨论过的费隆的方法进行计算.

在第二积分范围 $1 < \xi < \infty$, P 可以近似地写为:

$$P = \frac{1}{2} \beta^2 h^2 (\tanh \xi + \xi / \cosh^2 \xi),$$

在这里忽略了 p 的二次方和更高次方. 第二个积分可以写成:

$$\mathcal{J}_{22} = K \int_1^\infty \frac{\sin \delta \xi}{\xi^2} \frac{\sinh^2 \xi}{\sinh 2\xi + 2\xi} d\xi \frac{\beta^2}{p} \cdot \mathbf{I}.$$

这个积分在计算 $\mathcal{J}_1$ 时出现过, 仅仅积分的下限和时间的函数有所不同. 如果考虑到下列关系: $\int_1^\infty = \int_0^\infty - \int_0^1$, $\mathcal{J}_1$ 的积分结果可以引用. 因此, 仅仅从 0 到 1 间的积分需要算出, 此后 $\mathcal{J}_{22}$ 就可以直接找出.

对于第二项在沉降中所占的部分, 下面的公式是适用的:

$$W_2 = \frac{hq}{\pi} \{ (\mathcal{J}_{21} + \mathcal{J}_{22}) \delta_2 - (\mathcal{J}_{21} + \mathcal{J}_{22}) \delta_1 \} F_2(t). \quad (6.2)$$

式中, $F_2(t)$ 取决于公式(5.2).

这个公式给出由于固结的沉降, 应用与 $\mathcal{J}_1$ 相同的计算方法, 在 δ 为大数值的情形, 可以发现 $\mathcal{J}_{21} \pm \pi/2$, 正号或负号取决于 δ 的符号; 而由于正弦函数急剧跳动的结果 $\mathcal{J}_{22}$ 接近于零. 在这个 W_2 的极限情形, 得 $W_2 = hq/4\theta$; 在无限波长余弦荷载的情形, 曾经获得相同的结果 (见 5.4.2). 设 δ 为无限大, 则得一维情形, 但这与古典的一维情形不同. 在前一情形, 土壤可以在横向自由移动; 而在后一情形, 土壤完全被限制. 如果假定在粘土层的边界上不可能发生位移, 就得到与古典一维情形更相符合的情形.

$\mathcal{J}_3$ 的估计

可以证明

$$P \leq \beta^2 h^2 Q.$$

借助于上列不等式, 第三个积分 $\mathcal{J}_3$ 可以估计如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 &= 2K^2 \psi \int_0^\infty \frac{\sin \delta \xi \tanh^2 \xi \left(\frac{P}{ph^2} \right)^2}{\xi^2 Q^3} d\xi \cdot \mathbf{I} + 4K^2 \int_0^\infty \frac{\sin \delta \xi \sinh^2 \xi}{\xi^2 (\sinh 2\xi + 2\xi)} d\xi \left(\frac{\beta^2}{p} \right)^2 \psi \cdot \mathbf{I} = \\ &= \frac{4G^2}{\Theta^2} \mathcal{J}_1 \frac{F_3(t)}{F_1(t)}, \end{aligned}$$

式中, $F_3(t)$ 可在公式(5.3)得出.

因此, $\mathcal{J}_3$ 的数值是 $\left(\frac{4G^2}{\Theta^2} \frac{F_3(t)}{F_1(t)} \right)$ 与第一项的乘积. 在实际中, 系数 $\frac{4G^2}{\Theta^2}$ 的数值约在 0.2

到 0.3 左右. 当时间为大数值时, $F_3(t)$ 随指数规律减小, 而 $F_1(t)$ 随时间的一次方增加. 因此, 第三项也许可以在沉陷计算中忽略.

总沉陷

总沉陷可用前两项的和来代表:

$$W = W_1 + W_2. \quad (7)$$

这公式将总沉陷写成粘土层的流变和固结两种效应的总合.

比阿基于他的理论算出了无限厚粘土层的沉陷. 他只研究了因固结而产生的沉陷, 而没有研究由于均差应力而产生的沉陷, 从数学观点来看, 半无限体的解答比有限厚度的粘土层的解答来得简单. 本文第二项的结果可以当作极厚粘土层由于固结而产生的沉陷的近似值. 但如果计算第一项 W_1 (它给出由均差应力所产生的沉陷), 从公式(6.1.1)可以看出其结果为无限大. 这个结果也可以从弹性理论得知.

结 论

从上面的计算, 可以清楚地看出实际沉陷的估计不能单纯基于压缩试验来进行, 因为在压缩试验中, W_1 一项无法考虑, 而在时间为很大数值时, 它可以变成很大的数值. 在这里还可以指出, 因固结而产生的沉陷 W_2 也和一维理论所预期的结果不同. 这是由于土壤能在横向变形的后果, 这一效应在粘土层的边界没有剪应力时尤为显著.

上面导出的公式在时间为大数值时是有效的, 只要材料保持统计上的均值 (Statistically equivalent). 从特扎基和其他研究者所进行的观测可以断言, 这个不变的统计状态 (Constant statistical state) 能持续几年以至几十年. 当土壤密度的变化增大到这样的程度, 即达到由于体积减小而产生的硬化效应不能忽略的时候, 上面的公式很可能不再生效. 在这种情形, 我们必须研究非线性现象, 但这就超出本文的范围了, 还可以指出, 上面的分析只有在粘土可以满足作者在他的理论⁷⁾中所作出的假设的时候才会有效. 根据作者所做的试验, 这些假设仅仅对于肥粘土和污泥才是合理的.

参 考 文 献

- [1] Цытович Н. А., (1951) Механика грунтов, Москва.
- [2] Terzaghi, K., (1948) Theoretical Soil Mechanics, Ch. XIII, New York.
- [3] Горсвалов Н. М. и Польшин Д. Е., (1948) Теоретические основы механики грунтов, глава VIII, IX.
- [4] Флорин В. А., (1938) "К вопросу о гидродинамических напряжениях, в Грунтовой Массе".
- [5] Biot, M. A., (1941) J. Appl. Phys. 12, 155, 426, 578.
- [6] Rendulic, L., (1935) Wasserwirtsch. u. Technik 2, 250; (1936) Bauingenieur 17, 559; (1937) 18, 459.
- [7] Terzaghi, K., (1935) De Ingenieur 50, B 289; 51, B 263; (1953) Proc. 3rd ICOSOMEF, III, 158, Zürich.
- [8] Carillo, N., (1942) J. Math. Phys. 21, 1.
- [9] Tan, Tjong-kie 陈宗基, (1954) "Investigations on the Rheological Properties of Clays", Dr. Sc. Techn. thesis, Delft Techn. Univ.; (1953) Proc. 3rd ICOSOMEF, III, 169, Zürich. 中国科学 1957. VI, 1, 203.

TWO DIMENSIONAL PROBLEMS OF SETTLEMENTS OF CLAY LAYERS DUE TO CONSOLIDATION AND SECONDARY TIME EFFECTS

TAN, TJONG-KIE

(Institute of Civil Engineering, Academia Sinica)

SYNOPSIS

It is pointed out that the settlement due to deviatoric stresses is incorrectly disregarded in conventional methods of calculation. It is shown that the deviatoric tensor of stress can not be neglected, whereas the time dependent response of the soil skeleton to deviatoric stresses should be taken into account. On the base of his theory on the consolidation and flow of clay-layers the author presents an analysis on several two dimensional problems. It is shown that the total settlement may be considered as consisting of three main components, viz. instantaneous settlement and settlements due to flow and due to consolidation. Settlement formulas are presented for large values of time. It is concluded that settlements in practice can not be predicted merely from oedometer tests. The consolidation in two dimensional problems turns out to behave quite differently from that of the classical one-dimensional case, as the soil can always deform laterally. The deviatoric stresses are responsible for the instantaneous deflection and the continuous flow of the clay mass.