第1卷 第3期　　力 学 学 报　　Vol. 1, NO. 3
1957年8月　CHINESE JOURNAL OF MECHANICS　August, 1957

对于計划及备件供应的統計理論的一个貢献*

J. 柯夏西尼克
(捷克科学院通訊院士)

备件的問題，是國民經济中一个很重要的問題．备件的适当供应可以防止相当的損失，同时也是產品穩定出口的条件之一．为了保养机器和設备，我們必須在儲藏中，或者通过商業路綫，能得到足够的备件供应．易于損坏的部分必須由出產商随着新机器而供应．

对于磨損，我們了解为一个物件逐漸損坏，終至于成为无法使用．磨損是由好多因素產生的；有些因素經常作用，有些因素則是随机出現．在前一情形，我們可以提到，比如說：在工作时間，由于連續加載以致磨擦而損坏，以及材料的疲劳等等．在后一情形，可以提到工作条件的随机变动，例如湿度、温度、同周圍的化学成分．但是經常作用的因素也能受到随机因素的影响，比如說：在工作中由于加載而遭致的磨損，也同載荷本身的随机变化、机件材料的机械性質的变差、制造和裝配时的随机誤差等等有关．

由于随机因素的影响，机件的有用寿命常常变动很大．我們可以提到下列物件的有用寿命的变差：电灯泡、收音机中的眞空管、球軸承、工藝过程中的設备、汽車輪胎、火車車輪等等各式各样的机件；或者更明顯地說，各式各样的机器和設备的元件．

影响元件有用寿命的因素，在很大范圍內，是可以加以控制的．这就是質量控制的任务．在另一方面，工作条件和它的变差却很难控制．下面我們將要考慮，在穩定的工作和制造条件下，机件有用寿命的变差．在这些条件下，所有由于任一特殊情况而引起的，机件寿命的变差形成一个集体，它具有一个常概率分布．

首先讓我們假定，在 $t=0$ 的时候，我們將 $N(0)$ 部机器來使用．並且假定每一部机器只包括一个这样的机件，如果它損坏了，机器便不能运行．工作条件假定是穩定的．当那些机件磨損时，运行着的机器数目便逐漸減少．用 $N(t)$ 表示在 t 的时候，运行着的机器的数目，那末

$$N(t)\leqslant N(0).$$

如果 $N(0)$ 很大，$N(t)$ 是 t 的函数，因此便描出了一条曲綫．这条曲綫从 $N(0)$ 起，

* 1956年12月26日收到．

当 t 增大的时候，便漸趋于零．当殘存得最長的最后一个机件損坏时，便达到零点．为了我們的目的，$N(t)/N(0)$ 是更有用．曲綫 $\nu(t)=N(t)/N(0)$ 將被称为已給机械的“死亡率”曲綫．它告訴我們在一定的时間以后，有多少机件仍旧有用．为了对于这些曲綫可能采取的形狀得到一些概念，我們將根据簡化了的幷局限了的假定，來推演一些方程．

我們現在假定在單位时間內損坏了的机件数目，同在使用的机件数目成正比：

$$-dN=\mathfrak{H}N\,dt. \tag{1}$$

比例常数用 $\mathfrak{H}$ 來表示．(1)式的積分便給出“死亡率”方程

$$N=Ke^{-\mathfrak{H}t}.$$

積分常数 K 由 $t=0$ 时 $N=N(0)$ 的情况來决定．因此

$$N(t)=N(0)e^{-\mathfrak{H}t}. \tag{2}$$

在这种假定下，“死亡率”曲綫是一条指数曲綫．这个例子僅僅是許多可能情况中的一种．关于“死亡率”的瞬时強度和由其推演出的“死亡率”曲綫，可以有一些其他假定．比如說：

$$\frac{dN}{dt}=-\mathfrak{H}N^kt^m. \tag{3}$$

当 $k=1, m=1$ 的时候，便引導出下列关系：

$$\frac{N(t)}{N(0)}=e^{-\frac{\mathfrak{H}}{2}t^2}. \tag{4}$$

从选定的假定來推導“死亡率”曲綫，本身幷沒有太大的意义．这样的曲綫可以用來作模型，同实际中出現的幷且僅僅从观察大量实际情况所得出的“死亡率”曲綫相比較．例如一个标准的情况，便是人类死亡率曲綫(圖 1)．它給了我們一定数量的人的出生和生存下去的百分比．

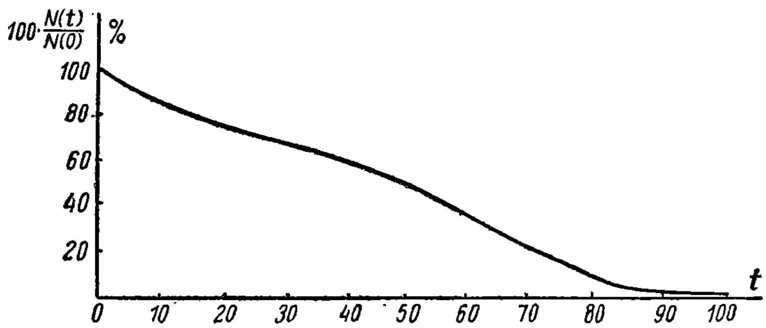

圖 1.

具有完全相同的有用寿命的机件的“死亡率”曲率，应該表示成为一条与軸平行的直綫，幷且当所有的机件都“死亡”的时候，便突然停止(圖 2)．

表达將达到一定寿命 t 的概率密度曲綫 $h(t)$ 便是“死亡率”曲綫的負微分．微小面積 $h(t)dt$ 給出在 t 的时候，变为不能运行的机件的数目同 $N(0)$ 的比例．从这个观点，“死亡率”曲綫便表現为达到 t 或更長寿命的概率的曲綫．

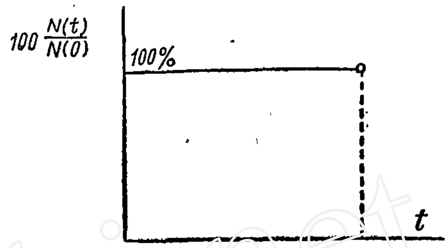

圖 2.

我們考慮下列問題：在时間 $t=0$ 的时候，我們將 $N(0)$ 部机器投入生產，每部机器僅僅包含一个机件可能会磨損．概率密度曲綫 $h(t)=-\frac{d}{dt}\frac{N(t)}{N(0)}$ 是已給的．还有讀 $\dot{m}(t)$ 为出產商供給备件的強度．在时間 dt 內，供应了 $\dot{m}(t)dt$ 个备件．在这个供应內，可以包括裝备在整个新机器里的机件数目，假如不是更換磨損的机件而是更換整个机器，或者是加添新机器的話．自然我們是假定每个机件或每部机器从制造商处送到后，便立即投入生產．那末在时間 t，將有 $N(t)$ 部机器在运行，这里

$$N(t)=N(0)\nu(t)+\int_0^t \dot{m}(\tau)\cdot\nu(t-\tau)d\tau. \tag{5}$$

运行着的机器的瞬时数目，是在开始投入生產的 $N(0)$ 部机器的瞬时部数加上后來以 $\dot{m}(\tau)d\tau$ 数量連續供应的数量而得．这許多机件的磨損是按照同一“死亡率”曲綫 $\nu(t)$．自然我們必須了解，在 τ 的时候供应的数量 $\dot{m}(\tau)d\tau$ 是从时間 τ 起开始磨損，也就是按照关系(5)而磨損．

R. V. 邱吉尔[1]已經提到这个簡單問題的答案，他用了拉氏变换來解方程(5)．我們將用下列变换：

$$N(t)\doteqdot p\int_0^\infty N(t)e^{-pt}dt=F(p), \tag{5a}$$

$$m(t)\doteqdot p\int_0^\infty m(t)e^{-pt}dt=M(p), \tag{5b}$$

$$\nu(t)\doteqdot p\int_0^\infty \nu(t)e^{-pt}dt=\frac{1}{(\mathfrak{S}p)}. \tag{5c}$$

函数 $m(t)=\int_0^t \dot{m}(\tau)d\tau$ 給出在 $m(0)=0$ 的情况下，由时間 $t=0$ 起供应的备件的总数．

1) Modern Operational Mathematics in Engineering, 1944, p. 79.

假使(5)式的双方各乘以 e^{-pt}，并且由零到无窮大積分，我們便得到

$$F(p)=\frac{N(0)}{\mathfrak{H}(p)}+\frac{M(p)}{\mathfrak{H}(p)}=\frac{1}{\mathfrak{H}(p)}[N(0)+M(p)]. \qquad (6)$$

因此函数 $N(t)$ 的 $F(p)$ 可以求得. 假如在任何时間 t 需要正在生產的机器的数目是決定了，那末我們可以用同一个方程去計算备件供应的必須强度，或者从零时起，在这种强度下供应的备件的总数.

如果"死亡率"曲綫是指数函数，这就是

$$\nu(t)=e^{-\lambda t},$$

那么

$$\frac{1}{\mathfrak{H}(p)}=\frac{p}{p+\lambda}.$$

并由方程(6)得

$$M(p)=\left(1+\frac{\lambda}{p}\right)F(p)-N(0). \qquad (7)$$

如果所希望的备件供应强度是这样，使得在任何时間、运行着的机器数目同开始时的数目 $N(0)$ 相等，那末 $F(p)=N(0)$，并且因之

$$M(p)=\frac{\lambda}{p}\cdot N(0). \qquad (8)$$

因此 $m(t)=\lambda tN(0)$，并且 $\dot{m}(t)=\lambda N(0)$. 如此則从零时起所供应的备件的数目随时間而綫性增加，同时供应强度 $\dot{m}(t)$ 是一个常数.

一般說來，备件供应的强度依賴着"死亡率"曲綫的形狀. 因此，一个不变的供应强度并不保証，开始时的 $N(0)$ 部机器將在任何时間都在生產綫上.

也許会提出这样的問題，它是关于在已給时間 t_0，在已給的一群机器內变为不能生產的概率密度 $h(t,t_0)$. 这个問題的解答也可以从方程(5)求得. 去求得总体 $N(t_0)$ 的"死亡率"曲綫并由它的負微分去得出瞬时密度曲綫 $h(t,t_0)$，只要假定在时間 t_0，备件的供应停止便够充分了. "死亡率"函数 $N(t)$（当 $t>t_0$）將是

$$N(t)=N(0)\nu(t)+\int_0^t \dot{m}(\tau)\nu(t-\tau)d\tau-\int_{t_0}^t \dot{m}(\tau)\nu(t-\tau)d\tau=$$

$$=N(0)\nu(t)+\int_0^{t_0} \dot{m}(\tau)\nu(t-\tau)d\tau, \qquad (9)$$

那么

$$h(t,t_0)=-\frac{d}{dt}\,\frac{N(t)}{N(t_0)}.$$

在应用中，問題常常是建立一个备件儲藏來保証一部或多部机器能工作到一定的时間 T_0。很明顯，这任务只能在一定的概率上完成．如果这概率愈大，那么备件的儲藏量就必須愈大。

我們假設，像前面的例子一样，僅僅乎只有一个备件按照一个已知"死亡率"曲綫 $\nu(t)$ 而遭致磨损．我們因此也知道成为不能使用的概率的密度 $h(t)$ 是 $\nu(t)$ 的負微分．假設总数 k 的备件是可用的，他們各有可用寿命 $t_1, t_2, \cdots, t_k$，那么从換上一个新备件起，一部机器的运行时間便是

$$T_k = t_1 + t_2 + \cdots + t_k. \tag{10}$$

可用寿命 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 是随机数量，它們在穩定的制造和使用情况下，有着同一个相对频率曲綫 $h(t)$．自然 T_k 也是一个随机数量，由一个概率密度曲綫來定义．这个曲綫直接和备件的数目以及密度 $h(t)$ 有关．

用运算微積分可以很容易地求出 T_k 的概率密度曲綫[1]．

假如

$$T_k = t_1 + t_2 + \cdots + t_k = \sum_1^k t_i,$$

并且

$$h_i(t) \doteq \int_0^\infty h_i(t) e^{-pt} dt = \mathfrak{H}_i(p), \tag{11}$$

$$h(T_k) \doteq \int_0^\infty h(T_k) e^{-pT_k} dT_k = \mathfrak{H}(p),$$

那末

$$\mathfrak{H}(p) = \mathfrak{H}_1(p) \cdot \mathfrak{H}_2(p) \cdots \mathfrak{H}_k(p). \tag{12}$$

假如 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 屬于一个集体，那末

$$\mathfrak{H}_1(p) = \mathfrak{H}_2(p) = \cdots = \mathfrak{H}_k(p),$$

并因此

$$\mathfrak{H}(p) = \mathfrak{H}_1^k(p), \tag{13}$$

这里 $\mathfrak{H}_1(p)$ 是在集体內的 t_i 的概率密度的运算符号。

例如，假設

$$h_i(t) = \lambda e^{-\lambda t} \doteq \frac{\lambda}{p+\lambda},$$

$T_k = t_1 + t_2 + \cdots + t_k$ 的密度的符号將是

1) J. Koželnik, Sborniku MAP, XX, 1946, p. 306.

$$\mathfrak{H}(p)=\left(\frac{\lambda}{p+\lambda}\right)^{k} \doteqdot \frac{\lambda^{k}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t}. \tag{14}$$

表示概率密度的圖形可以从方程(13)得出． 在圖 3 里，被蔭蔽的面積給出所尋求的概率P_k，因为在这个面積内 $T_k \geqslant T_0$。从数理統計中，我們知道，当 k 的值很大时，T_k 的分布漸近于正态(高斯)分布．它的平均値是 $\overline{T}_k=k\overline{t}$ 而方差是 $\sigma_{T_k}=\sqrt{k}\,\sigma_t$。

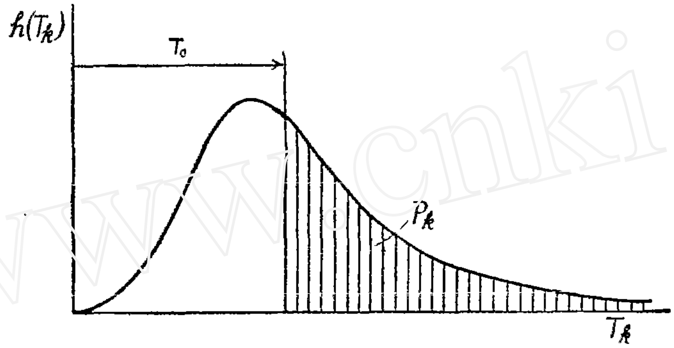

圖 3.

用这个方法，对于同一类型和同一來源的备件的旣擇定的件数 k，可以計算出一部机器將要达到或超过旣定工作时間 T_0 的概率 P_k． 当 k 的値增加时，这个概率起初增加很快，然后对于大量的备件則增加較慢．因此很明顯，將备件的儲藏量超过一定値并沒有益处．

直到現在，我們只考慮了由于每部机器的一个机件的磨損而停車．在应用中，常常几个机件在同时遭致磨損．

假設对于个別机件生存期的概率密度是已知的，同时假設我們知道他們是互不相关的，那么在一定概率上，并不难于計算出每种备件必須儲存多少，以便保証那机器作为一个总体可以运行到要求的或更長的时間．

我們考慮，例如：一个包含三个备件 a, b, c 的情況． 假設他們生存期的概率密度是 $h_a(t)$、$h_b(t)$ 和 $h_c(t)$。令类型 a 的备件的儲藏量是 m_a，类型 b 的是 m_b，类型 c 的是 m_c。現在我們求出，由于一种所有可用的备件全部損坏，以致机器在时間 $\geqslant T_0$ 的时候，不能运行的概率． 这些概率 P_a, P_b 和 P_c 可以像上面討論过的單一元件的問題一样來决定． 备有儲藏 m_a, m_b 和 m_c 的机器將运行到等于或大于 T_0 的时間的概率是由乘積 $P_a \cdot P_b \cdot P_c$ 來給出．每一种备件的数目可以被調整到使得 P_a、P_b 和 P_c 差不多相等．或者，这个数目可以由其他經济条件來决定．

在应用中，个別机件寿命的長短的概率密度互不相关这一情況并不常常成立． 很明顯的，一对互相关联的齒輪的寿命長短并不是互不相关．

这一类型的最簡單的情況出現在：当我們知道被考慮的机件的寿命 t 同适当的变

数 $x_1, x_2, \cdots$ 的关系，就是有着下列函数

$$t=f(x_1, x_2, \cdots). \tag{15}$$

然后，我們有

$$dt=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots, \tag{16a}$$

并且

$$\Delta t \doteq \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots \qquad (\Delta x_i \sim dx_i). \tag{16b}$$

假使参数 $x_1, x_2, \cdots$ 等等的变差，也就是 Δx_i 的值都是很小的話，方程(16a)在任何情况下都漸近于(16b)．在方程(16b)里的微導数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 是常数，是对于 x_i 的平均值而計算得的．假若我們知道了 Δx_i 的概率密度，我們可以立即得到 Δt 的分布．

例如，假設我們考慮的函数是

$$\Delta t=a_1\Delta x_1+a_2\Delta x_2+a_3\Delta x_3.$$

Δx_1 的一維分布可以被給出如

$$h_1(\Delta x_1) \doteq \sum_i \mathfrak{P}_i e^{-p\Delta x_{1i}}, \tag{17}$$

这是一个不連續分布．令变数 $\Delta x_2, \Delta x_3$ 的分布是二維的，这两个变数是随机相关，就是：

$$h_{23}(\Delta x_2, \Delta x_3) \doteq \sum_j \mathfrak{P}_j e^{-q\Delta x_{2j}-\Delta x_{3j}}, \tag{18}$$

那末我們有

$$h(\Delta t) \doteq \left[\sum_i \mathfrak{P}_i e^{-a_1 p\Delta x_{1i}}\right]\left[\sum_j \mathfrak{P}_j e^{-a_2 q\Delta x_{2j}-a_3 s\Delta x_{3j}}\right], \tag{19}$$

假使相乘后，我們使 $p=q=s$．对于連續分布，有着一个类似的形式：

$$h(\Delta t) \doteq \mathfrak{H}_1(a_1 p)\mathfrak{H}_{23}(a_2 q, a_3 s), \tag{20}$$

这里我們又令 $p=q=s$.

在当 x_2 和 x_3 是随机独立的特殊情况下，我們有

$$\mathfrak{H}_{2,3}(a_2 q, a_3 s)=\mathfrak{H}_2(a_2 q)\mathfrak{H}_3(a_3 s). \tag{21}$$

我們現在將討論另一重要类型的問題．

讓我們假設有 n 部同一类型的机器，他們的生產能力会被某一个單件而損坏；并且在任何情况下，都是由于那同一單件．在时間等于零的时候，讓这一类可用的机件的数目是 k，在这 k 件中，有 n 件是新裝配在机器里的．現在讓所有的机器运行．机件寿命 t 的概率密度 $h(t)$ 是已知，生產和使用的情况也是穩定的．我們要尋求：当所有 n 部机器备有已給的备件件数时，將运行至时間 T_0 或更長时間的概率．

讓 p_i 为任一机器，具有恰好 i 件备件，能运行到 $\geqslant T_0$ 的时間的概率．那末具有等于或少于 k 件备件而能达到 $\geqslant T_0$ 的时間的概率將由下式給出：

$$\mathfrak{P}_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_k. \tag{22}$$

并且对于 $k+1$ 件备件的对应的概率是

$$\mathfrak{P}_{k+1} = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k+1}, \tag{23}$$

这里的 $\mathfrak{P}_k$ 和 $\mathfrak{P}_{k+1}$ 是前面已經討論过的类型的概率．很明顯(圖 4)，

$$p_{k+1} = \mathfrak{P}_{k+1} - \mathfrak{P}_k. \tag{24}$$

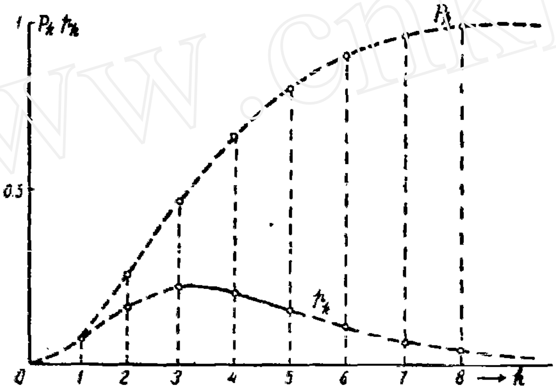

圖 4.

n 部机器中的一部分 α_i 部，备有正好 i 件备件(这里 $i=1, 2, \cdots, k-n+1$)，能同时运行到 $\geqslant T_0$ 的时間的概率將是

$$\Pi = \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_{k-n+1}!}\, p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_{k-n+1}^{\alpha_{k-n+1}}, \tag{25}$$

具有条件

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-n+1} = n.$$

所有机器將运行到 $\geqslant T_0$ 的时間的概率 $\Pi_{n,k}$ 是由(25)式定义了的概率的和給出，这就是

$$\Pi_{n,k} = \mathrm{pars} \sum \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_{k-n+1}!}\, p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_{k-n+1}^{\alpha_{k-n+1}} \tag{26}$$

[因此 $\Pi_{n,k} = \mathrm{pars}(p_1+p_2+\cdots+p_{k-n+1})^n = \mathrm{pars}\,\mathfrak{P}_{k-n+1}^n < 1$]，这里是如此求和，使得

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-n+1} = n, \tag{26a}$$

$$n \leqslant 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (k-n+1)\alpha_{k-n+1} \leqslant k. \tag{26b}$$

在 $n=1$(一部机器)同 k 件备件的特殊情况下，所尋求的概率是

$$\Pi_{1,k} = \sum \frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_k!}\, p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}, \tag{27}$$

这里又是

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=1, \tag{27a}$$

$$1\leqslant 1\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+k\alpha_k\leqslant k. \tag{27b}$$

这些条件能够被满足，当

$$\Pi_{1,k}=p_1+p_2+\cdots+p_k=\mathfrak{P}_k. \tag{28}$$

由是我們得到了同前面已經得到的相同的結果.

对于两部机器和 k 件备件的情况，一个簡單关系也成立. 对于这个情况，

$$\Pi_{2,k}=\sum\frac{2!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_{k-1}!}p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}, \tag{29}$$

具有下列条件

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k-1}=2, \tag{29a}$$

$$2\leqslant 1\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(k-1)\alpha_{k-1}\leqslant k. \tag{29b}$$

这些条件可被满足，如果

$$\Pi_{2,k}=2\sum_{i,j}p_i^{\alpha_i}\ p_j^{\alpha_j}\ \frac{1}{\alpha_i!\,\alpha_j!}\qquad(\alpha_{i,j}=0,1,2).$$

这个結果可以用下列形式表示:

$$\Pi_{2,k}=p_1(p_1+p_2+\cdots+p_{k-1})+p_2(p_1+p_2+\cdots+p_{k-2})+$$
$$+p_3(p_1+p_2+\cdots+p_{k-3})+\cdots+p_{k-1}p_1,$$

如此便得

$$\Pi_{2,k}=p_1\mathfrak{P}_{k-1}+p_2\mathfrak{P}_{k-2}+\cdots+p_{k-1}\mathfrak{P}_1=\sum_{i=1}^{k-1}\mathfrak{P}_{k-i}\,p_i. \tag{30}$$

对于当 $k=n+1$ 的更特殊的情况，这就是当备件的数目比机器的数目大一个的情况，我們得到

$$k-n+1=2,$$

因此

$$\Pi_{n,n+1}=(p_1+p_2)^n.$$

这里

$$\alpha_1+\alpha_2=n,\qquad n\leqslant\alpha_1+2\alpha_2\leqslant n+1,$$

如此使得

$$\Pi_{n,n+1}=p_1^n+p_1^{n-1}p_2n=p_1^{n-1}(p_1+np_2). \tag{31}$$

如果我們有 $k=n$ 的情况，这就是备件数同机器数相等，那末 Π 的表現式化归为

$$\Pi_{n,n}=p_1^n. \tag{32}$$

这里我們所談到的一些情况可以有相当的实际用处. 不过它們的应用預先假定了在任何情况下，从实驗数据，我們能够得到备件的寿命的概率密度曲綫.

錄　　附

在推演关系 26 的时候，我們利用了它同一个簡單的博奕的相似点。

备有正好 i 件备件，一部机器能运行 $\geqslant T_0$ 的时間的概率分布 p_i，可以由擲一个半徑等于 r 的球來得出。在这个球的表面上，划分出面積 $f_1, f_2, \cdots f_{k-n+1}$，使得 $p_i=\dfrac{f_i}{4\Pi r^2}$，这样 $\mathfrak{P}_{k-n+1}$ 便是 $\dfrac{1}{4\Pi r^2}\Sigma f_i$。

如果我們注意到，在很多次投擲的时候，每一特殊面積同桌面接触的次数，我們便得到一个不連續的概率分布(圖 4)由下式表出：

$$\mathfrak{H}(s)=p_1 e^{-s}+p_2 e^{-2s}+\cdots+p_{k-n+1} e^{-(k-n+1)s}.$$

如果我們投擲 n 个这样的球，并且紀錄下在一系列的投擲里，有多少次下列情形出現，

$$n \leqslant s\alpha_1+2s\alpha_2+\cdots+(k-n+1)s\,\alpha_{k-n+1} \leqslant k,$$

我們便得到一个分布，由下列关系來示性

$$[\mathfrak{H}(s)]^n=[p_1 e^{-s}+p_2 e^{-2s}+\cdots+p_{k-n+1} e^{-(k-n+1)s}]^n.$$

这样一个分布的符号是

$$[\mathfrak{H}(s)]^n=\sum \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_{k-n+1}!} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\cdots p_{k-n+1}^{\alpha_{k-n+1}} e^{-[\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(k-n+1)\alpha_{k-n+1}]s},$$

僅当滿足下列条件的这些項目是包括在里面：

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k-n+1}=n,$$

$$n \leqslant \alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(k-n+1)\alpha_{k-n+1} \leqslant k.$$

[許國志譯]

A CONTRIBUTION TO THE STATISTICAL THEORY OF PLANNING AND SPARE PARTS SUPPLY

J. Kožešnik

(*Czechoslovak Academy of Sciences*)

Abstract

We make a statistical study of the supply of spare parts.

Let $N(0)$ denote the number of new machines put in commission. These machines may be rendered unserviceable by the wear of one certain part, hence at the time t, the ones remaining in service will be $N(t)(\leqq N(0))$. We plot the curve $\nu(t)=N(t)/N(0)$ and call it the mortality curve.

The following problems are considered.

Suppose that there are $N(0)$ machines in commission at the beginning and the spare parts are supplied at a rate $m(t)$. At time t, there will be

$$N(t)=N(0)\nu(t)+\int_0^t \dot{m}(\tau)(t-\tau)d\tau$$

machines running. If the number of machines required to be in service at the time t is laid down, then we are able to calculate the rate of supply of spare parts provided that the mortality curve is known. To faciliate the calculation, the method of Laplace transform is used.

In practice, we are interested in ensuring statistically the working of one or more machines for a given time T_0 by establishing a reserve of spare parts. Using the method of Laplace transform again, we are able to find easily the probability that a machine will reach or exceed the prescribed working period T_0 with a supply of k parts. We observe that this probability increases rapidly with the increase of k initially, and more slowly when k becomes sufficiently large. Therefore there is no advantage to increase the reserve above a certain limit.

Another important type of problems is this: A number n of machines of the one and same kind are running. We suppose that there is only one part whose wear may render the machine unserviceable. We are seeking the probability that all n machines will run for a time $\geqslant T_0$ with a reserve of k parts of which n are newly fitted in the machines.

Let p_i be the probability that any one machine may be kept running for a time $\geqslant T_0$ with exactly i spares. Then the probability $\Pi_{n,k}$ that all n machines will run for a time $\geqslant T_0$ is given by

$$\Pi_{n,k}=\text{pars}\sum\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_{k-n+1}!}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_{k-n+1}^{\alpha_{k-n+1}},$$

where the summation is carried so that

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k-n+1}=n,$$
$$n\leqslant 1\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(k-n+1)\alpha_{k-n+1}\leqslant k.$$

In deriving this formula, we make use of the analogy of the following game: Consider a ball of radius r. On its surface, areas $f_1, f_2, \cdots, f_{k-n+1}$ are marked so that $f_i=4\Pi r^2 p_i$. If we throw n such balls and record how often certain particular area contacts with the surface, the probability distribution can be found.