

平板上压制筋条的塑性流动問題

王 仁

(北京大学数学力学系)

提 要

本文考虑从一块平板上压制出平行筋条的塑性流动问题,这里是把它当作一个理想刚塑性的平面应变问题来处理的。文中假设下压板和平板之间是足够粗糙的,因而没有相对滑动。而在上压板和平板之间,则考虑了两个情形:即摩擦系数 $\mu=0$ 及 $\mu \geq 0.175$ 的情形;前者相当于完全光滑的压板,而后者相当于完全粗糙的压板,也就是没有相对滑动的情形。在不同的 h/d 比值下 (h 为平板厚度, $2d$ 为筋条宽度),都找出了滑移线网的图形和它们所对应的速度图及应力图。文中指出这些解都是满足应力和应变条件的完全解。根据这些解可以求出在上压板上的压力分布和不同收缩比时的平均压力。

文中把这些结果和众所周知的反挤情形加以比较,后者相当于本文的一个极端情形。事实上,可以说本文考虑了在反挤时底面的影响。

苏联学者依留辛 (Ильюшин) 最近提出了一个近似方法,它的结果也和本文的正确解作了比较,证明当收缩比很大的时候,它的近似解是相当精确的。

最后还将变形分布的情形,用方格的变形表示出来,这使我们能一目了然。

1. 引 言

在飞机制造工业中,由于对飞机表皮光滑度的要求,以及大功率压力机的应用,用以加固机身包皮的筋条已经不再是用铆钉连接,而是由大压力机从一块平板中连表皮带筋条直接压制出来。

本文把这个金属压力加工的问题,当作一个理想刚塑性的平面应变问题来处理。这种处理方法包含两个方面的假定。首先是对于材料的假定。我们假定材料是理想塑性的;并且因为所考虑的应变比较大,相对而言,弹性的应变可以忽略不计。因此,和弹性应变为同一数量级的变形部分将被认为是不变形的刚体。后一个假定是关于受压物体的。我们将认为物体内部各点的变形是平行于一个固定平面的,那就是所谓平面应变的问题。

铝合金原来是一个没有显著屈伏点的材料,这样,第一个假定等于把它的硬化效应

平均地分布到变形的各部分去。再则, 参看圖 1, 若是 $l \gg 2(w+d)$, 其中 l 为平板長度, $2(w+d)$ 为每个流动区間的寬度, 那么在 $A_1A'_1$ 和 $A_2A'_2$ 区間內的变形被認為与 z 无关也确是一个很好的近似。由于第二个假定, 我們只需要考慮平面上的流动, 如圖 2 所示; 并且因为对称的关系, 只需考慮 $A_1A'_1$ 和 $B_1B'_1$ 区間就可以了。

这种处理方法在塑性力学中是發展得比較完善的。关于理論上的处理, 在塑性力学課本^[1-3]及有关論文^[4-8]中, 都已有很清楚的敘述。在实用上的价值, 也因为經過一些实验上的验证^[9-12]而大大地增加。为便于参考起見, 讀者也可参看文献[13], 那里曾將这个理論的内容扼要地闡述了一下。

在圖 1 中, 若是材料厚度 h 比筋条寬度 d 大得很多, 那么, 塑性区域將集中在凹模附近, 而底面將不对流动有何影响。这种塑性流动問題就是大家熟知的反挤問題[9, (296 頁)]; 做过的工作已經很多, 最近約翰遜曾在[14]中用上述理論考慮了这个問題的各种情形。

关于从平板中压制筋条的問題, 那是一个压花模子的问题; 据作者所知, 用上述方法处理的, 只有[15]中所作的关于薄層膠板的承载压力的計算。最近依留辛^[16]根据这种解的特性作了一些假定; 他給出了一个近似理論, 并且还用本文所处理的問題作为例题。我們將在第四節把这些解和本文所給的解拿來討論。

本文所給的解中还假定了平板底面和下压板之間有足够大的摩擦力, 因而它們之間沒有相对滑动。在上压板和平板之間則考慮了光滑和粗糙的两个情形, 它們分别相当于摩擦系数为 $\mu=0$ 及 $\mu \geq 0.175$ 的情形。

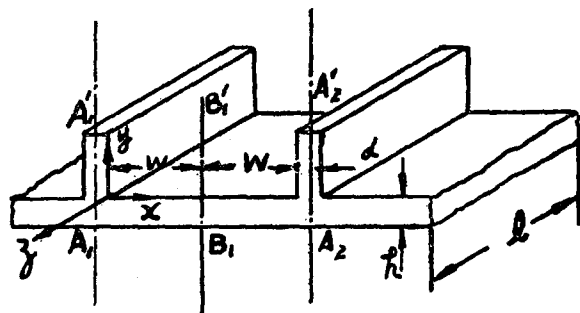


圖 1.

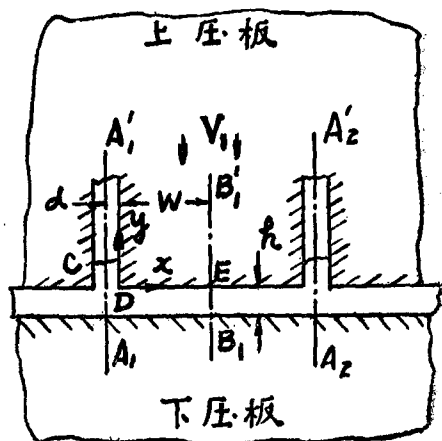


圖 2.

2. 上压板和平板之间为光滑的情形

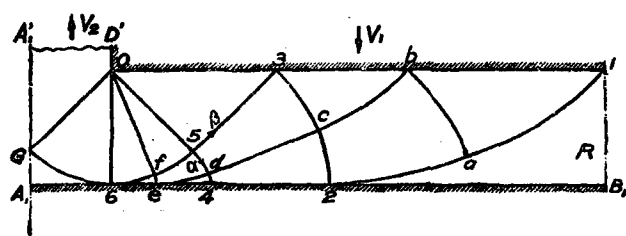
当上压板和平板之间为光滑的时候, 这个平面塑性流动问题的边界条件是: 沿上压板 DE (参看圖 2), 已知下降速度为 V_1 及切向应力为零; 在 CD 上外力为零; 沿下压板 A_1B_1 变形速度为零。由于这些边界条件, 我們知道滑移綫和頂面要成 45° 而和底面要相切。根据不可压缩的条件, 筋条 CD 向上移动的速度 $V_2 = V_1 w/d$ 。

最简单的情形是当 $h = \sqrt{2}d$ 。圖 3 表示这时的滑移綫網和所对应的速度圖和应力圖^[6]。在圖 3(a) 中, $A_1'OG$ 为刚性区域, $OG\delta$ 为一扇形区域, 这样的滑移綫網可以满足 $A_1'D$ 上无外力的应力条件和 $A_1'OG$ 上升的剛体运动条件。区域 $O\delta\beta$ 中两组滑移綫均为直綫, 頂面上的边界条件得以满足。从弧綫 $\delta\beta\beta$ 和上下压板的边界条件可以作出其他区域的滑移綫網。取 x, y 坐标如圖 2, 当 $x = 7d$ 时, 滑移綫与滾綫的形式已極为接近; 更往中間走, 則可用滾綫代替(这种滑移綫網的作法, 可采用数值积分法^[1], 或作圖法^[18]。最近乔頓和湯姆遜^[17] 还根据作圖法原理做了机械积分裝置, 更为便利)。区域 $A_1G\delta$ 和 $B_1\beta I$ 是两个死角区域, 从滑移綫 $G\delta$ 及 βI 和对称綫 GA_1 及 IB_1 很容易在这些区域中做出滑移綫網, 所对应的应力分布既不違反塑性条件, 也能适合下压板的边界条件(可参考[7])。从速度边界条件又得知这里不能有塑性流动, 因而可看为刚性区域。

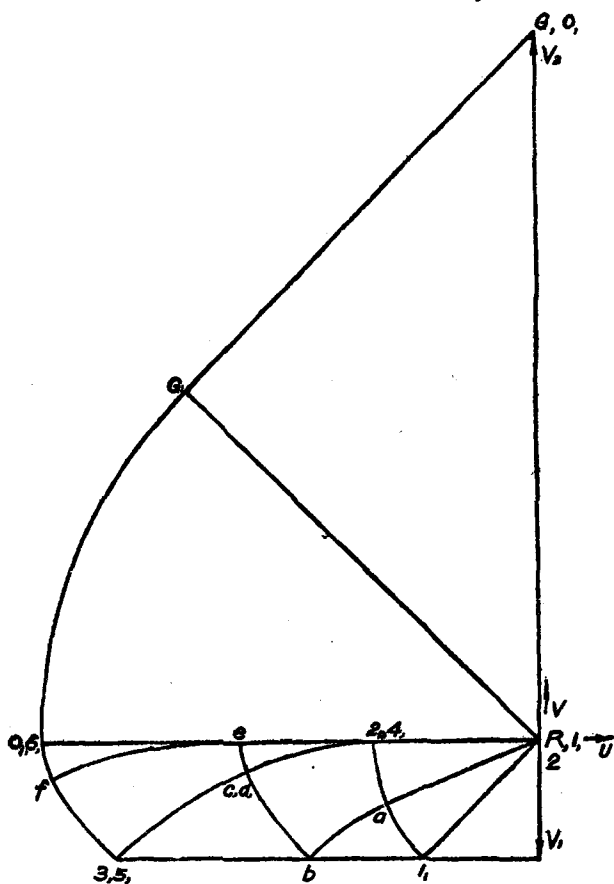
圖 3(b) 和 3(c) 是上述滑移綫網所对应的速度圖及应力圖。在圖中各对应点和綫都用同样的标号註出。

在速度圖 3(b) 中, 縱横坐标分別为沿 y 和 x 方向的速度。 $R, 1, 2$ 是对应于中間的刚性区域, 因与固定的下压板相連, 故速度为零, 是速度圖的起点。沿上压板各点速度的垂直分量应等于下降速度 V_1 , 故在点 1, 当跨过滑移綫 (12) 时, 有一个速度的間断, 等于 $\sqrt{2}V_1$; 因而在流动区域内的点 1_1 (称为 1_1 , 我們用下标 1 表示在流动区域内的点), 其速度分量为 $(-V_1, -V_1)$, 綫段 ($R1_1$) 就代表它的速度矢量。从不可压缩的条件可以知道, 这个速度間断沿 (12) 綫为常数, 所以在速度圖中, 綫段 (1_12_1) 是繞 R 点的一个圓弧, 半徑为 $\sqrt{2}V_1$ 。沿下压板, 垂直速度分量为零, 因而点 $2_1, 4, e, \delta$ 等都在 u 軸上。利用滑移綫上一点在物理平面內 [圖 3(a)] 的切綫和在速度平面內 [圖 3(b)] 的对应切綫成正交的性質, 速度圖就很容易求出來了。 G, O 代表筋条上升的速度, 应该等于 $V_1 w/d$ 。

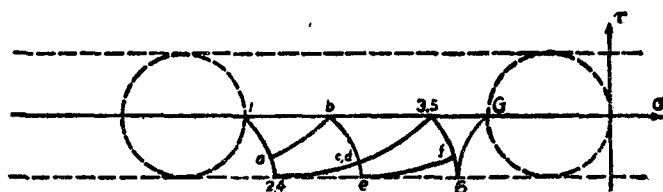
圖 3(c) 是根据平面莫尔圓而繪制的应力圖。 G 点的平均正应力 $(\sigma)_G$ 可由沿 $A_1'D'$ 垂直合力等于零的边界条件决定。在目前的情形, $(\sigma)_G = -k$ 及 $(\tau)_G = k$, 这里



(a)

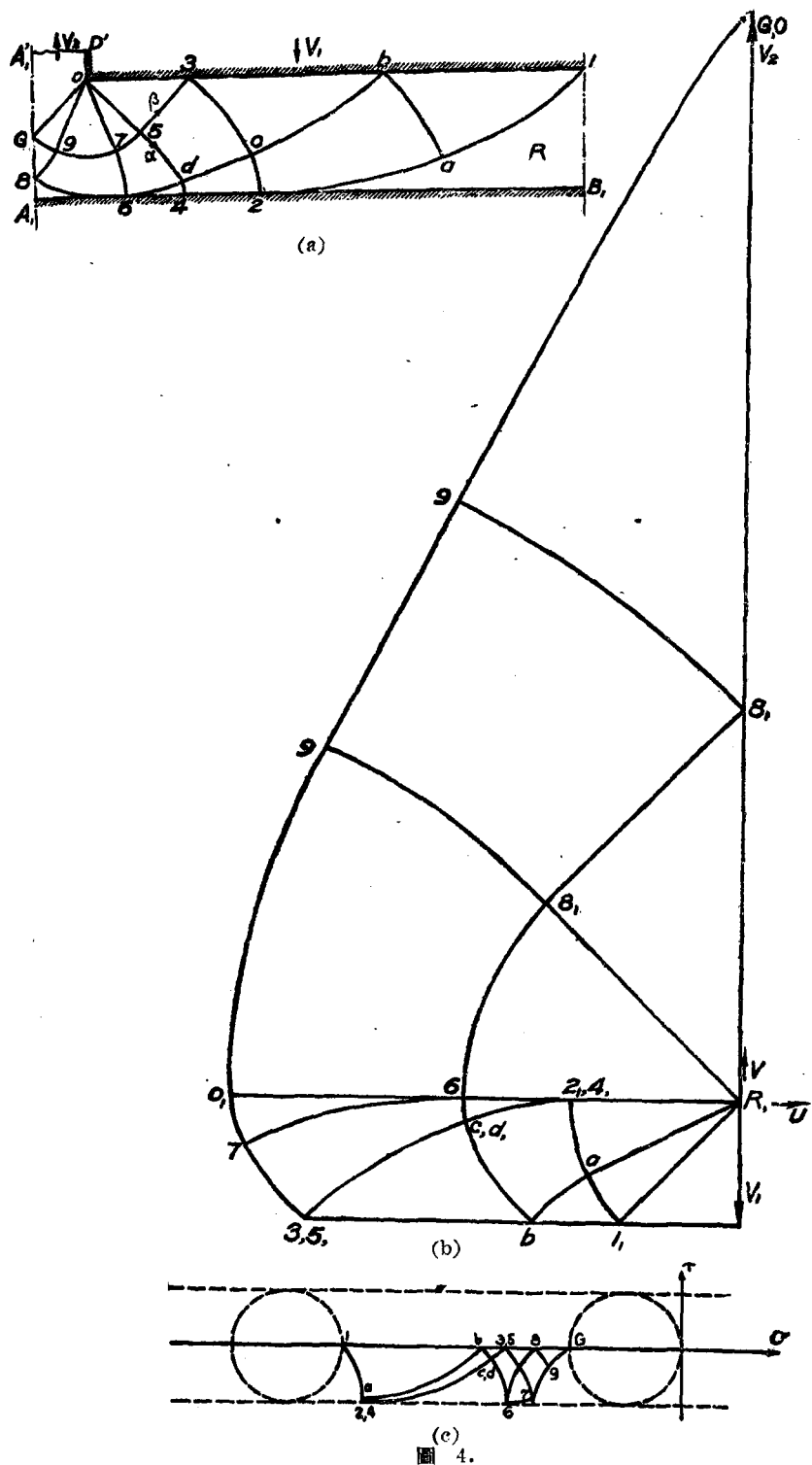


(b)



(c)

图 3.



k 是材料的屈伏剪应力。文献 [6] 中还证明了对应于应力平面中的滑移綫都是滾綫，而且滑移綫上一点在物理平面內的切綫和在应力平面內的对应切綫成正交。既已决定 G 点的应力状态，对应于应力平面中的滑移綫就很容易求出來了。再则，根据平均正应力沿滑移綫的变化規律，可以求出流动区域内任意点的平均正应力，这点既处于塑性状态下，它的应力状态也就确定了。

根据速度圖，很容易找到经过任意点的流綫，也很容易用布拉格^[8]的方法校核塑性功为正的條件。

经过这些校核以后，我們知道圖 3(a) 所示的解是一个完全解^[4,7,13]。

当 h 大于或小于 $\sqrt{2}d$ 的时候，滑移綫網也很容易根据所給的边界条件作出；这些滑移綫網和所对应的速度圖和应力圖分別如圖 4 和 5 所示的。它們的分別还在 $(\sigma)_G$

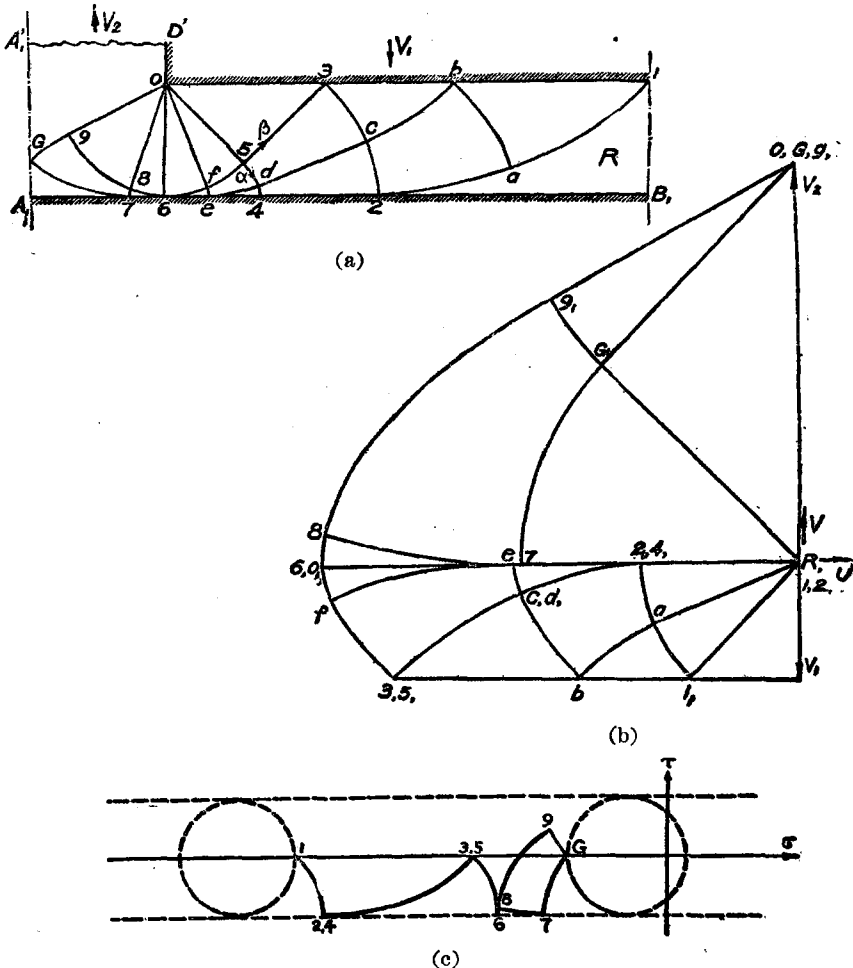


圖 5.

的值。根据向上的合力为零的条件,可以决定:当 $h > \sqrt{2}d$ 时, $(\sigma)_a = k$; 当 $h < \sqrt{2}d$ 时, $(\sigma)_a$ 随 h/d 的比值而改变,圖 6 为計算的結果。

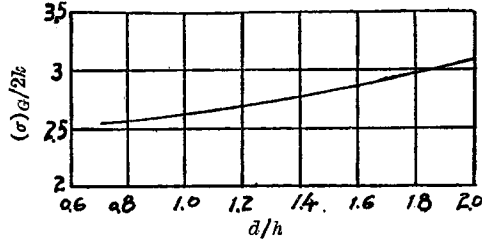


圖 6.

3. 上压板和平板之間为粗糙的情形

当上压板和平板之間为粗糙的时候, 这个平面塑性流动問題的边界条件是: 沿上压板 DE (圖 2), 已知下降速度为 V_1 及切向速度为零, 其余的条件和上述情形相同。这时, 滑移綫不但和底面相切, 也和頂面相切。从以下將得出的压力分布圖(圖 8)得知, 压板上的压力大于 $5.71k$, 所以只要上压板和平板間的摩擦系数大于 $k/5.71k = 0.175$ 时, 这个条件就能够滿足。

圖 7 表示当 $h = \sqrt{2}d$ 时的滑移綫網、速度圖和应力圖。在中間部分將有上下两个死角区域。和上述情形一样, 可以証明这个解是一个完

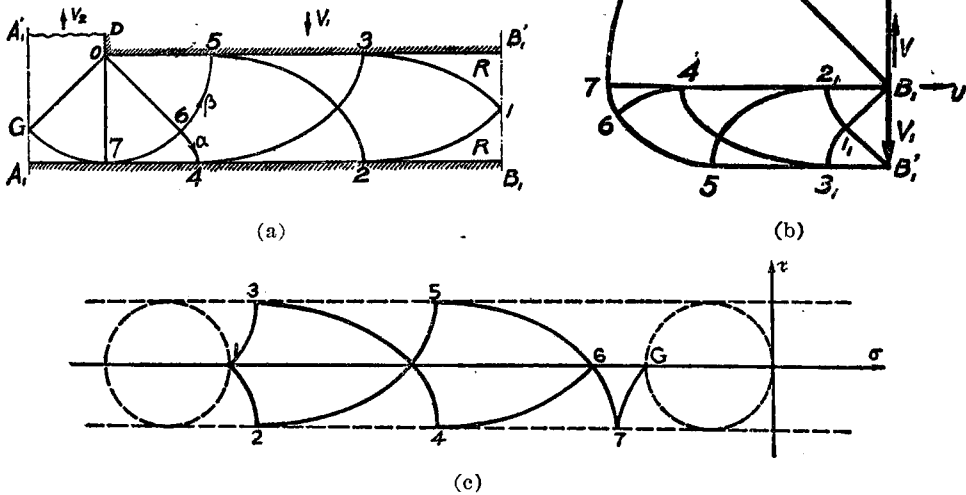


圖 7.

全解。

当 $h \geq \sqrt{2}d$ 时, 滑移綫網可以像上述情形一样的加以修改。

4. 結果和討論

(一) 上压板的压力分布 根据所构造的滑移綫網, 可以求得上压板的压力分布, 如圖 8 所示。当 $x \gg d$ 时, 滑移綫趋近滾綫; 压力的增長率当上压板和平板之間为光滑和粗糙的情形分别为 $d(p/k)/d(x/h) = 1.00$ 及 2.00 , 这里的 p 就是压板上的压力。在后者的情形, 靠近中間有一个死角区域, 其中确实的应力分布情况不得而知, 我們只能从这个区域的平衡条件求出在压板上的平均压力。若是不考慮这里的死角区域, 而延拓原有的滑移綫網, 則可根据圖 8 來求这个区域的平均压力。这样所得的結果, 將高于按死角計算所得的。不过, 这个差別不大; 并且随着压力的增加, 当 $x \gg d$ 时, 这差別是可以忽略的。

(二) 平均压力和收縮比的关系 正如第一節所說, 理想塑性的假定, 就是等于把

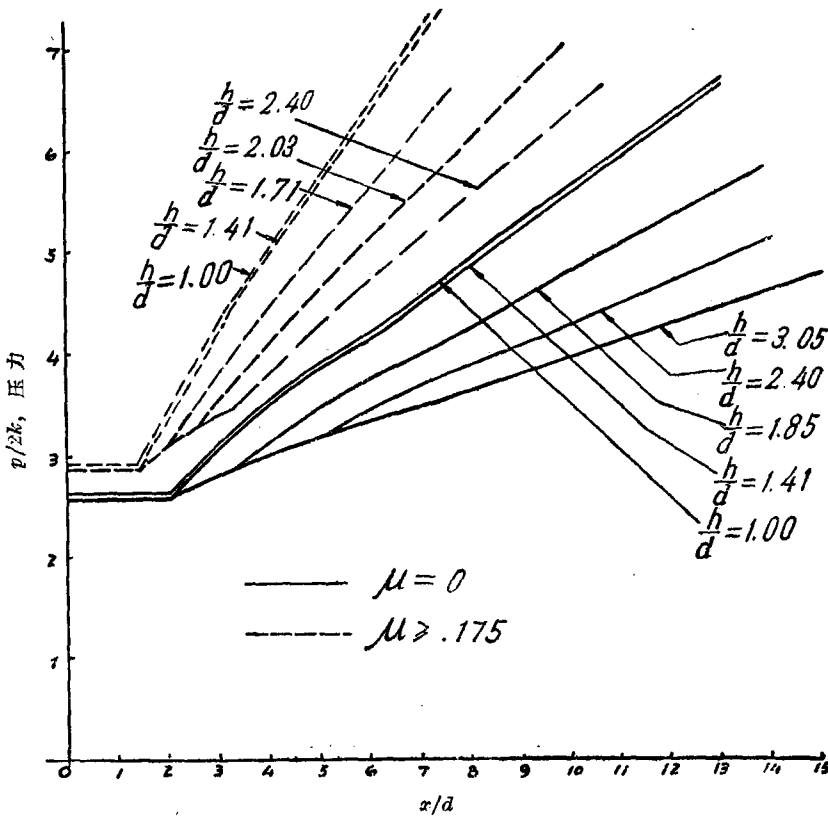


圖 8.

硬化的影响平均地分布到各个变形区域去, 所以我们对于压板上的平均压力觉得更有意义。

对于相同的 d , 平均压力 $\bar{p}$ 是随着压板的宽度 $2w$ 的加大而增加的。圖 9 和圖 10 表示了这两者之间的关系。它们分别为当上压板和平板间是光滑和粗糙的情形。为了便于比较起见, 横坐标是采用收缩比 $r = w/(w+d)$ 。在圖中还可以看出随着比值 h/d 的增加, 平均压力 $\bar{p}$ 在减少。在两个圖中都把約翰遜^[14] 关于反挤的解用虚线画出([14] 中平均压力是对底面面积而言, 这里 $\bar{p}$ 是对上压板的面积而言, 这里已经做了转换, 故数值与原文有差别)。因为他不考虑底面的影响, 因此可以看作 $h/d = \infty$ 的情形, 并且是各有限 h/d 的下限。

約翰遜又在文献 [18] 中提及希望知道底面对于反挤问题的影响。顯然, 圖 9 和 10 上的这些曲线就是表示底面对于平均压力的影响。当 h/d 减小时, 平均压力则逐渐增加。

在圖 10 中, 还将依留辛^[16] 的解画上。按照他的理论, 当 $\mu = 0.25$ 时, 在上压板和平板的全部接触面之间没有相对滑动, 正如本文第三節所述的情形。这样得出的曲线和本文所得的曲线极为相近。虽然依留辛假定了 $w \gg d$, 但是从圖上看來, 即使 $r = 0.82$ ($w = 4.6d$), 它们的差别还很小。但是, 第三節的解只需要 $\mu \geq 0.175$, 因此, 若在依留

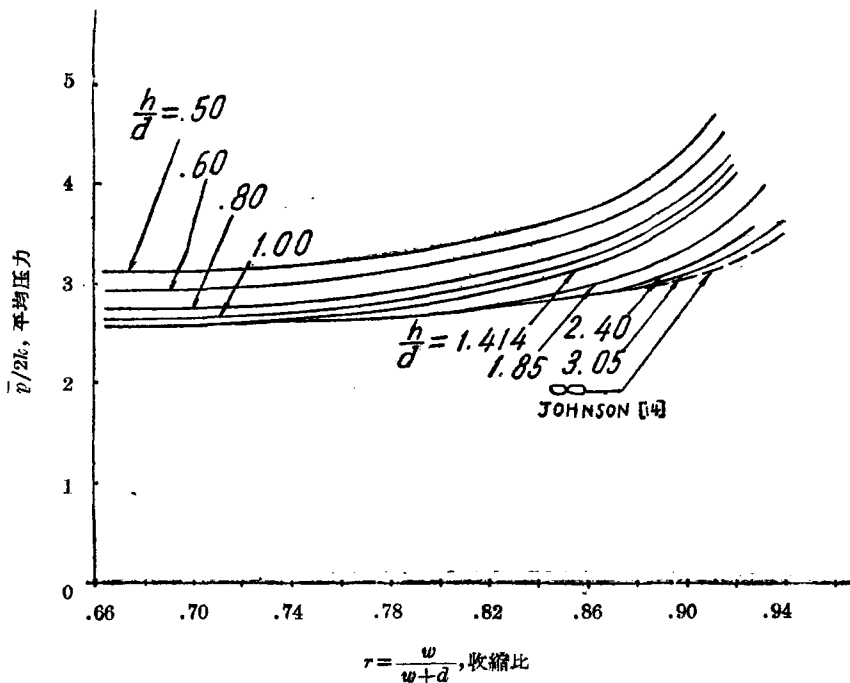


圖 9.

辛的解中,应用 $\mu=0.175$ 的值,如图 10 表示,只有当 $w \gg d$ 时,他的解才和本文所给的正确解相近。例如应用在 [16] 中的例题所采用的 $w=19d$, 即 $r=0.95$ 的数值,所得结果与正确解相差百分之八。当 w/d 值减少时,两者的差则增加得很快。

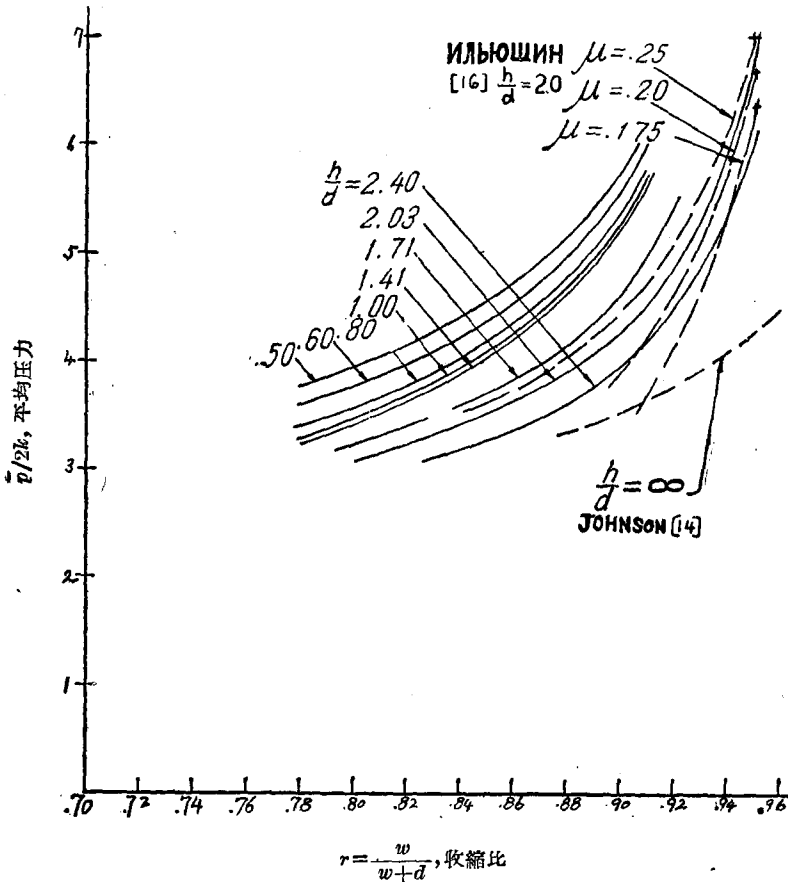


图 10.

在依留辛的解中,其主要参数是 $(w+d)/h$, 不能顾及 d 和 h 之间的关系。不过, [16] 中假定 $2d$ 是和 h 为同一量级或是比后者为小。从以上结果,我们可以很明显地看到: h/d 的值是和压板上的压力分布有着密切关系的。但从平均压力对 $(w+d)/h$ 的曲线(图 11), 却可以看出, 在 $\mu=0$ 的情形, 当 h/d 在 0.6 到 1.85 之间, 及 $(w+d)/h > 10$ 时, 平均压力的变化是小于百分之二的。在 $\mu \geq 0.175$ 的情形, 当 h/d 在 0.50 及 1.00 之间时, 平均压力相差很少, 又因平均压力随 $(w+d)/h$ 而增加, 故相对差别更随之减少。因此, 在 $(w+d)/h$ 大的时候, 依留辛的假定是相当可靠的。

(三) 平板内部的变形分布 平板内部每一点的变形速度都对应于速度图上的一个

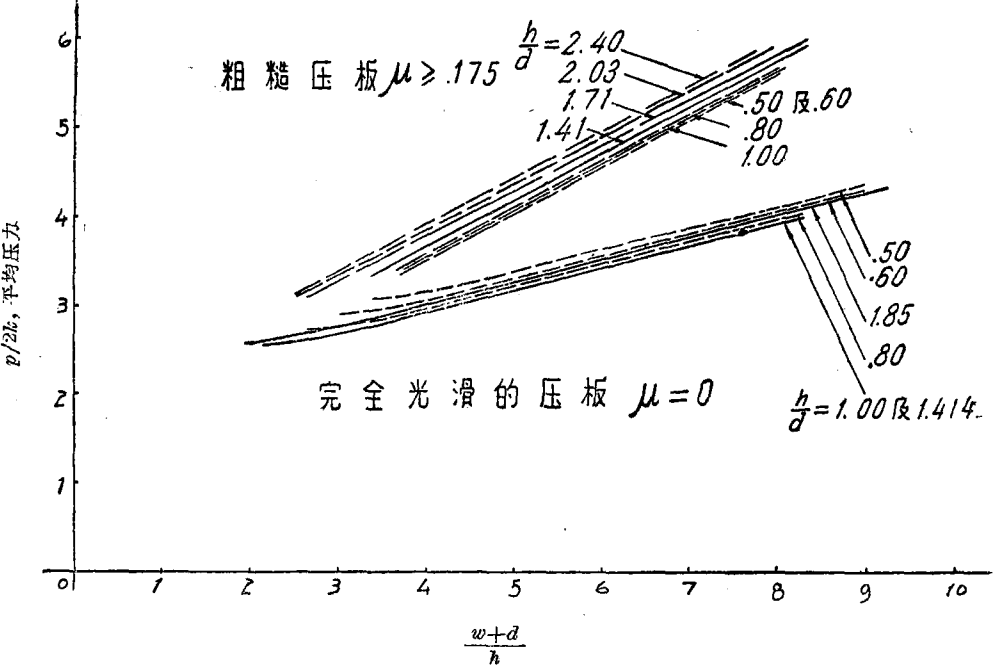


圖 11.

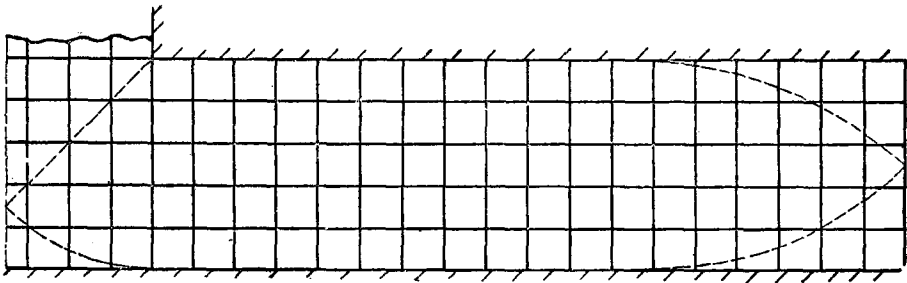


圖 12.

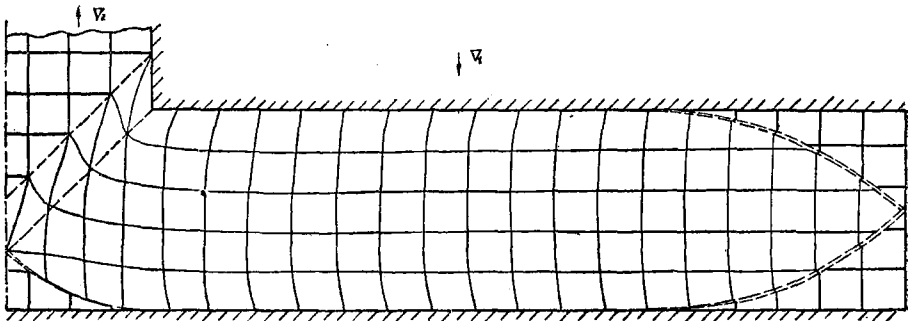


圖 13.

点。因此,若在平板的截面上画上方格(圖 12),則在压板下降一个微小距离以后,这些方格在变形后的位置就很容易求出,物体变形的分布情形也很容易从方格的变形看出。圖 12 中, $w/d=5.1$, $h/d=\sqrt{2}$, 若是上压板和平板之間 $\mu \geq 0.175$ 的情形,則在上压板下降 $0.05 h$ 以后,方格就变成圖 13 所示的形式。

附言: 本文中有許多計算和繪圖工作是黃杰藩和吳鳳林两位同志做的,特此誌謝。

参 考 文 献

- [1] Hill, R., The Mathematical Theory of Plasticity, 1950, Oxford.
- [2] Соколовский, В. В., Теория пластичности, 1950, Изд. АН СССР.
- [3] Prager, W. and Hodge P. G. Jr., Theory of Perfectly Plastic Solids, 1951, John Wiley & Sons.
- [4] Lee, E. H., Theoretical Analysis of Metal Forming Problems in Plane Strain. *J. Appl. Mech.*, **19** (1952), p. 97—103.
- [5] Green, A. P., On the Use of Hodographs in Problems of Plane Plastic Strain. *J. Mech. Phys. Solids*, **2** (1954), p. 73—80.
- [6] Prager, W. A., Geometrical Discussion of the Slip Line Field in Plane Plastic Flow. *Trans. Royal Institute of Technology, Stockholm*, Nr. 65 (1953). 或見俄譯本“Механика”1956年第6期 91—107.
- [7] Bishop, J. F. W., On the Complete Solution to Problems of Deformation of a Plastic Rigid Material. *J. Mech. Phys. Solids*, **2** (1953), p. 43—53.
- [8] Prager, W., The Sign of Plastic Power in the Graphical Treatment of Problems of Plane Plastic Flow. *Quart. Appl. Math.*, **13** (1955), p. 333—335.
- [9] 古布金著,梁炳文譯,金屬压力加工原理,1955,高等教育出版社。
- [10] Hundy, B. B., Plane Plasticity. *Metallurgia*, March 1954, p. 109—118.
- [11] Muvdi, B. B. and Tong, K. N., Yielding in Compression of Strip between Smooth Dies. *J. Mech. Phys. Solids*, **4** (1956), p. 121—127.
- [12] Thomsen, E. G., Comparison of Slip-line Solutions with Experiment. *J. Appl. Mech.* **23** (1956), p. 225—230.
- [13] 王仁,平行刚性压板間的塑性流,北京大学学报,自然科学第四期总 5 期(1956) 443—456.
- [14] Johnson, W., Extrusion through Square Dies of Large Reduction. *J. Mech. Phys. Solids*, **4** (1956), p. 191—198.
- [15] Wang, A. J. and Lee, E. H., Plastic Indentation into a Thin Sheet Laid over a Rough Base, 待发表。
- [16] Ильюшин, А. А., Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения. ПММ, т. 19, В. 6 (1955), 693—713.
- [17] Jordan T. F. and Thomsen, E. G., Comparison of an Unsymmetric Slip-line Solution in Extrusion with Experiments. *J. Mech. Phys. Solids*, **4** (1956), p. 175—190.
- [18] Johnson, W., Experiments in Plane Strain Extrusion. *J. Mech. Phys. Solids*, **4** (1956), p. 269—282.

PLASTIC FLOW IN THE EXTRUSION OF RIBS ON FLAT PLATES

WANG, JEN

(Peking University)

ABSTRACT

We consider the extrusion of ribs on thin flat plates as a problem in the theory of plane strain for perfectly plastic-rigid materials. These assumptions imply that $l \gg 2(w+d)$, (Fig. 1), and that the effect of work hardening being distributed over the deformed regions.

The problem is one of coining. The author is unaware of other solutions treated in the present manner, except a similar initial motion problem given in Ref. 15. However, if the thickness h of the plastic material is large compared to the width of the extruded bar d , the flow region will be concentrated around the die and this is the familiar problem of inverted extrusion (Ref. 1, 14). The effect of the base plate, however, is not known. ИЛЮШИН (Ref. 16) has recently given an approximate solution to the present problem. His results are discussed in section 4.

The present solution assumes that the friction between the flat plate and the lower die surface to be sufficiently large so that there is no slip between them. However, the coefficient of friction μ between the flat plate and the upper die is taken to be zero or larger than 0.175, corresponding respectively to free slip and no slip between these surfaces.

§2 deals with the case of $\mu = 0$. The slip line field and the corresponding hodograph and stress planes (Ref. 6) are given for the case of $h = \sqrt{2}d$, in Fig. 3. Because of symmetry only one half of a flowing unit is shown, the slip line field satisfies both the stress and the velocity conditions in the plastic and rigid regions and is therefore a complete solution (Ref. 4).

The solutions for the cases of $h >$ and $< \sqrt{2}d$ are given in Figs. 4 and 5 respectively. In the latter case, the requirement of zero resultant force along the extruded surface AD' , gives the mean normal stress at point G as a function of h/d which is plotted in Fig. 6.

§3 deals with the case of $\mu \geq 0.175$. Since the pressure on the die is always larger than $5.712k$ (Fig. 8), $\mu \geq 1/5.712 = 0.175$ means that there is no slip along the contact surface. The slip line field and the corresponding hodograph and stress planes are given in Fig. 7 for the case of $h = \sqrt{2}d$. Similar solutions can be obtained for other values of h/d .

In §4, the pressure distribution along the upper die is given in Fig. 8. The average pressure $\bar{p}/2k$ (where k is the yield stress in shear of the plate material) versus the reduction ratio, $r = w/w+d$, is given in Figs. 9 and 10, for smooth and rough dies respectively. In these figures, Johnson's results (Ref. 14) are denoted as

$h/d = \infty$, since he does not consider the effect of the bottom surface. It is seen that his results are lower bounds to the present solutions. The effects of the base plate in the case of inverted extrusion can be clearly seen.

The approximate solutions of Ильюшин is also plotted in Fig. 10. According to his assumptions, the case of $\mu = 0.25$ corresponds to zero slip along the entire contact surfaces. His example with $\mu = 0.25$ (using $h = d$) is remarkably close to the present exact solution, however, if other values of μ are used, the solutions approach each other only when $w \gg d$. His solution also does not consider the effect of h/d separately. Plotting average pressure versus $(w + d)/h$ (Fig. 11), we see that the average pressure varies very little for different values of h/d near unity. The relative variation diminishes for larger values of $(w + d)/h$. Thus Ильюшин's assumptions seem to be reasonable.

Finally, the deformation of an originally square grid is followed through with the help of the hodograph. In the undeformed case, $w/d = 5.1$ and $h/d = \sqrt{2}$, see Fig. 12. After the upper die has moved a distance of $0.05h$, the deformed grid line is shown in Fig. 13.