

Birkhoff 系统稳定性的动力学控制¹⁾

陈 菊^{*} 郭永新⁺ 刘世兴⁺ 梅凤翔^{*, 2)}

^{*}(北京理工大学宇航学院, 北京 100081)

⁺(辽宁大学物理学院, 沈阳 110000)

摘要 本文研究 Birkhoff 系统和广义 Birkhoff 系统平衡稳定性的动力学控制。首先建立系统的运动方程和平衡方程。其次, 研究 Birkhoff 系统中控制参数出现在 Birkhoff 函数中平衡稳定性的动力学控制。方法是通过选取控制参数使得 Birkhoff 函数 B 成为定号函数, 而其时间导数 $\dot{B}$ 为与 B 反号的常号函数。再次, 研究广义 Birkhoff 系统平衡稳定性的动力学控制, 这时研究的方法是控制参数出现在 Birkhoff 函数或附加项中。如果选取控制参数使 Birkhoff 函数是一定号函数而其时间导数成为与其反号的常号函数, 这时平衡稳定性得以控制。最后举例说明结果的应用。

关键词: 平衡稳定性, 动力学控制, 控制参数, Birkhoff 函数

中图分类号: O316 **文献标识码:** A doi: 10.6052/0459-1879-19-367

Dynamical control of stability for Birkhoffian system^{*}

Chen Ju¹⁾, Guo Yongxin²⁾, Liu Shixing²⁾, Mei Fengxiang^{*}

(School of Aerospace, Beijing Institute of Technology, Beijing, 100081, China)

(School of physics, Liaoning University, Shenyang 110000, China)²⁾

Abstract: A dynamical control of the stability of equilibrium for the Birkhoffian system and generalized Birkhoffian system are studied. First, the equilibrium of motion and the equations of equilibrium of the systems are established. Secondly, the dynamical control of the stability of equilibrium for the Birkhoffian system where the Birkhoffian contain control parameters is investigated. The control parameters are chosen such that the Birkhoffian B become a definite function and its derivative of time $\dot{B}$ is opposite sign. Thirdly, the dynamical control of the stability of equilibrium for Birkhoffian system where control parameters are contained in the Birkhoffian or in the additional terms is exploited. Finally, some examples are given to illustrate the application of the result.

Keywords: stability of equilibrium, kinetical control, control parameter, Birkhoffian

2019-12-23 收稿, 2020-05-11 录用, 2020-05-11 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11272050, 11572034, 11872030, 11972177).

2) 梅凤翔, 教授; 主要研究方向: 分析力学. E-mail: meifx@bit.edu.cn

引用格式: 陈菊, 郭永新, 刘世兴, 梅凤翔. Birkhoff 系统稳定性的动力学控制. 力学学报, 2020, 52 (4)

Chen Ju, Guo Yongxin, Liu Shixing, Mei Fengxiang. Dynamical control of stability for Birkhoffian system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020,

引言

Birkhoff 系统是一类应用广泛的约束力学系统。Birkhoff 力学的研究已取得重要进展，如专著[1-4]。在该力学系统下，关于稳定性的研究通常采用的方法是 Lyapunov 函数法和一次近似法。特别的，对于自治和半自治 Birkhoff 系统而言，Birkhoff 函数即为系统的积分。因此，如果 Birkhoff 函数在平衡领域内是正定的，则平衡位置是稳定的。

力学系统的运动依赖于作用力以及所受的约束，因此既可以借助力来控制运动，也可以借助于约束来控制运动。前者称为动力学控制，后者称为运动学控制。本文讨论用动力学控制的方法研究 Birkhoff 系统和广义Birkhoff系统的平衡稳定性。虽然对于 Birkhoff 系统来说，其“作用力”并不明显，但是 Birkhoff 函数一般来说是具有能量意义的。因此，对Birkhoff 系统和广义 Birkhoff 系统，均可借助 Birkhoff 函数中包含控制参数的方法来控制系统的运动。进一步地，Birkhoff 系统亦可借助其附加项中所包含控制参数来控制系统的运动。这种用动力学函数来控制系统的运动，也可称为动力学控制。

针对以上构想，我们提出如下两个问题：1) 对于 Birkhoff 系统而言，Birkhoff 函数 B 可依赖控制参数，若已知 Birkhoff 函数组 $R_\mu (\mu = 1, 2, \dots, 2n)$ ，如何选取合适的控制参数使得零解稳定？2) 对广义 Birkhoff 系统，Birkhoff 函数 B 或附加项 $\Lambda_\nu (\nu = 1, 2, \dots, 2n)$ 可依赖控制参数，若已知 Birkhoff 函数组 $R_\mu (\mu = 1, 2, \dots, 2n)$ ，如何选取合适的控制参数使得零解稳定？

1. 系统的运动微分方程

Birkhoff 方程为^[1-3]

$$\Omega_{\mu\nu} \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n)$$

(1)

其中

$$\Omega_{\mu\nu} = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}$$

(2)

当 $\det(\Omega_{\mu\nu}) \neq 0$ ，可由方程 (1) 解出所有 $\dot{a}^\mu$ ，有

$$\dot{a}^\mu = \Omega^{\mu\nu} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} \right) \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (3)$$

其中

$$\Omega^{\mu\nu} \Omega_{\nu\alpha} = \delta_\alpha^\mu$$

(4)

设方程 (3) 有零解

$$a^\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2n)$$

(5)

则平衡方程为

$$\Omega^{\mu\nu} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} \right) \Big|_0 = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n)$$

(6)

广义 Birkhoff 方程有形式^[4-5]

$$\Omega_{\mu\nu} \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} + \Lambda_\mu = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n)$$

(7)

其中

$$\Lambda_\mu = \Lambda_\mu(t, a^\nu) \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2n)$$

(8)

为附加项。设方程 (7) 有解

$$a^\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2n)$$

(9)

则平衡方程为

$$\Omega^{\mu\nu} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} - \Lambda_\nu \right) \Big|_0 = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n)$$

(10)

2. Birkhoff 系统平衡稳定的控制

定理 1. 假设给定 Birkhoff 函数 B 与 Birkhoff 函数组 $R_\mu (\mu = 1, 2, \dots, 2n)$, 其中 B 可含控制参数 $u_\rho (\rho = 1, 2, \dots, r)$, 则通过选取适当的控制参数可使系统的平衡是稳定的。

证明: 首先, 选取 B 使之正定。其次, 按方程求 $\dot{B}$ 使之负。由方程 (3), 求 $\dot{B}$, 有

$$\begin{aligned}\dot{B} &= \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \Omega^{\mu\nu} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} \right) + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial u_\rho} \dot{u}_\rho \\ &= \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial R_\nu}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial u_\rho} \dot{u}_\rho\end{aligned}\quad (11)$$

特别地, 如果

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial R_\nu}{\partial t} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, 2n)\quad (12)$$

则有

$$\dot{B} = \frac{\partial B}{\partial u_\rho} \dot{u}_\rho\quad (13)$$

如果适当控制参数 $u_\rho (\rho = 1, 2, \dots, r)$ 的选取使得 $\dot{B} < 0$, 则平衡是稳定的。

3. 广义 Birkhoff 系统平衡稳定的控制

定理 2. 对广义 Birkhoff 系统平衡稳定的控制, 可提出两类问题:

1) 对给定的 Birkhoff 函数 B , Birkhoff 函数组 $R_\mu (\mu = 1, 2, \dots, 2n)$ 和附加项 $\Lambda_\nu (\nu = 1, 2, \dots, 2n)$, 如果 B 含控制参数 $u_\rho (\rho = 1, 2, \dots, r)$, 则可选适当的控制参数使平衡是稳定的。

2) 对给定的 Birkhoff 函数, Birkhoff 函数组和附加项, 如 Λ_ν 含控制参数, 则可选适当的控制参数使平衡是稳定的。

证明: 首先选 B 为正定的。其次, 求其导数 $\dot{B}$ 。如果 B 含控制参数, 则有

$$\begin{aligned}
\dot{B} &= \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \Omega^{\mu\nu} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} - \Lambda_\nu \right) + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial u_\rho} \dot{u}_\rho \\
&= \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \Omega^{\mu\nu} \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial t} - \Lambda_\nu \right) + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial u_\rho} \dot{u}_\rho
\end{aligned} \tag{14}$$

如果仅 Λ_ν ($\nu=1,2,\dots,2n$) 含有控制参数, 则

$$\dot{B} = \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \Omega^{\mu\nu} \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial t} - \Lambda_\nu \right) + \frac{\partial B}{\partial t} \tag{15}$$

由 Lyapunov 定理可知, 若适当控制参数 u_ρ ($\rho=1,2,\dots,r$) 的选取满足 $\dot{B} < 0$ 时, 系统在平衡位置是稳定的。

4. 算例

例 1. 已知四阶 Birkhoff 系统为

$$\begin{aligned}
R_1 &= a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0 \\
B &= \frac{1}{2} \left\{ (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2 u \right\}
\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $u=u(t)$ 为控制参数。选取适当的 u 使得系统在零解 $a^\mu = 0$ ($\mu=1,2,3,4$) 附近是稳定的。

由式 (16) 可计算出

$$(\Omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

根据上述所论的方法, 欲使 B 在 $a^\mu = 0$ ($\mu=1,2,3,4$) 邻域内正定, 应有

$$u(t) > 0$$

根据式 (13) 可直接得到

$$\dot{B} = \frac{1}{2} (a^4)^2 \dot{u}$$

为使 $\dot{B} \leq 0$, 需选取 $\dot{u} \leq 0$ 。于是, 控制参数 $u(t)$ 的取值范围如下

$$u > 0, \dot{u} \leq 0$$

(17)

例 2. 已知广义 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数组, Birkhoff 函数以及附加项如下

$$\begin{aligned} R_1 &= a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0 \\ B &= \frac{1}{2} \left\{ (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 u + (a^4)^2 \right\} \\ \Lambda_1 &= -\frac{1}{2} a^3 u, \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_4 = 0 \end{aligned}$$

(18)

试求 $u=u(t)$ 使系统的零解 $a^\mu = 0$ ($\mu=1,2,3,4$) 是稳定的。

由式 (15) 直接得到

$$\dot{B} = -\frac{1}{2} (a^3)^2 u + \frac{1}{2} (a^3)^2 \dot{u}$$

很显然, 若取 $u > 0$, 则 B 在 $a^\mu = 0$ ($\mu=1,2,3,4$) 邻域内是正定的。若取

$$\dot{u} - u \leq 0$$

则 $\dot{B} \leq 0$ 。因此, 控制参数的取值范围有

$$u(t) > 0, \quad \dot{u} - u \leq 0 \quad (19)$$

这时系统的平衡是稳定的。

例 3. 广义 Birkhoff 系统为

$$\begin{aligned} R_1 &= a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0 \\ B &= \frac{1}{2} \left\{ (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2 \right\} \\ \Lambda_1 &= -a^3 u_1, \Lambda_2 = -a^4 u_2, \Lambda_3 = a^1, \Lambda_4 = a^2 \end{aligned}$$

(20)

试求 $u_i=u_i(t)$ 使系统的零解是稳定的。

同样的由式 (15), 我们有

$$\dot{B} = -\left\{ (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 u_1 + (a^4)^2 u_2 \right\}$$

因此, 当控制参数选取为

$$u_1(t) > 0, \quad u_2(t) > 0$$

(21)

$\dot{B}$ 负定。故解 $a^\mu = 0$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) 是渐近稳定的。

例 4. 已知四阶 Birkhoff 系统为

$$R_1 = a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0$$
$$B = \frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{2}(a^4)^2 - ua^1 \ln t \quad (t > 0)$$

其中 $u = u(t)$ 为控制参数。选取适当的 u 使得系统在零解 $a^\mu = 0$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) 附近是稳定的。

首先, 由 Lyapunov 稳定性可知, 若选定 B 使其正定, 则

$$ua^1 \ln t < 0$$

因此, 有 $u < 0, a^1 \ln t > 0$ 或 $u > 0, a^1 \ln t < 0$ 。

其次, 由(11)式可知,

$$\dot{B} = -ua^1 \frac{1}{t} - \dot{u}a^1 \ln t$$

当控制参数满足条件

$$u < 0, \dot{u} > 0, u - \dot{u}t \ln t > 0 \text{ 或 } u > 0, \dot{u} < 0, u - \dot{u}t \ln t < 0$$

$\dot{B}$ 负定。解 $a^\mu = 0$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) 是渐近稳定的。

5. 结论

有关 Birkhoff 系统和广义 Birkhoff 系统的稳定性研究已有一些结果, 如文献[6, 8-14]。大多结果是在给定的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组下进行研究的。本文在此基础上考虑了包含参数时的情形, 研究了当系统的 Birkhoff 函数或附加项出现控制参数时, 通过选取控制参数使得 Birkhoff 函数 B 成为定号函数, 而其时间导数为与 B 反号的常号函数, 来实现控制系统的平衡稳定性。通过例题讨论并得到了 Birkhoff 函数及其导数符号变化的几种可能情形。由于完整力学系统和非完整力学系统均可纳入 Birkhoff 力学系统, 因此 Birkhoff 力学具有一定的普遍性。故本文的思想和方法可以进一步用来研究 Hamilton 力学系统, 非完整力学系统以及变质量力学系统等的平衡稳定性。

参考文献

1. Santilli R M. Foundations of Theoretical Mechanics I, II. Springer-Verlag, New York., 1983
2. 梅凤翔, 史荣昌等. Birkhoff 系统动力学. 北京: 北京理工大学出版社., 1996

- Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B. Dynamics of Birkhoffian System. Beijing Institute of Technology Press, Beijing., 1996(in Chinese)
3. Galiullin AS, Gafarov G G, Malaishka RP, Khwan A M. Analytical Dynamics of Helmholtz, Birkhoff and Nambu Systems. Moscow: UFN., 1997 (in Russian)
 4. 梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统动力学. 北京: 科学出版社., 2013
Mei F X. Dynamics of Generalized Birkhoff System. Beijing: Science Press., 2013(in Chinese)
 5. Mei F X. The Noether's theory of Birkhoffian systems. Science in China, Serie A., 1993, 36 (12): 1456-1467
 6. Shi R C, Mei F X, Zhu H P. On the stability of motion of a Birkhoff system. Mech. Res. Commu., 1994, 21 (3):269-272
 7. Mei F X. On the Birkhoffian mechanics. Int. J. Non-Linear. Mech., 2001, 36(5): 817-834
 8. Fu J L, Chen L Q, Luo Y, Luo S K. Stability for the equilibrium state manifold of relativistic Birkhoffian systems. Chin. Phys., 2003, 12 (4): 351-356
 9. 许志新. Birkhoff 系统的守恒量与稳定性. 物理学报., 2005, 54 (10): 4971-4973
Xu Z X. The Conserved quantity and the stability of Birkhoff system. Acta. Phys. Sin., 2005, 54 (10): 4971-4973 (in Chinese)
 10. Li Y M, Mei F X. Stability for manifolds of equilibrium states of generalized Birkhoff system. Chin. Phys. B., 2010, 19 (8): 080302
 11. Mei F X, Wu H B. Bifurcation for the generalized Birkhoffian system. Chin. Phys. B., 2015, 24 (5): 054501
 12. 张毅. 自治广义 Birkhoff 系统的平衡稳定性. 物理学报., 2010, 59 (01): 0020-05
Zhang Y. Stability of equilibrium for the autonomous generalized Birkhoffian system. Acta. Phys. Sin., 2010, 59 (01): 0020-05 (in Chinese)
 13. 陈向炜, 曹秋鹏, 梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统稳定性对双参数的依赖关系. 力学季刊., 2017, 38(1): 108-112
Chen X W, Cao Q P, Mei F X. Dependence of stability of generalized Birkhoff system on two parameters. Chinese Quarterly of Mechanics., 2017, 38(1): 108-112 (in Chinese)
 14. 崔金超, 梅凤翔. 广义 Birkhoff 方程的平衡稳定性. 动力学与控制学报., 2010, 08 (4): 297-3
Cui J C, Mei F X. Stability of equilibrium for generalized Birkhoff equation. Journal of Dynamics and Control., 2010, 08 (4): 297-3 (in Chinese)