

倾斜界面耦合弹性层中的渡越辐射能¹⁾

陕耀^{*,†,2)} 苏臻^{*,†,**} 周顺华^{*,†}

^{*}(上海市轨道交通结构耐久与系统安全重点实验室, 上海 201804)

[†](道路与交通工程教育部重点实验室, 同济大学, 上海 201804)

^{**}(上海勘察设计研究院(集团)有限公司, 上海 200093)

摘要 物理学中, 摄动源在非均匀介质中或非均匀介质附近匀速直线运动所产生的能量辐射现象称为渡越辐射. 列车沿轨道运行, 由轮轨接触产生的弹性波在非均匀轨道和基础中传播将发生渡越辐射, 而轨道和基础的非均匀性集中体现在不同轨道基础之间的过渡段(如路桥过渡段、桥隧过渡段或有砟-无砟轨道过渡段). 为研究车致弹性波在过渡段中引发的渡越辐射现象, 本文以典型高速铁路路桥过渡段结构形式为依据, 建立了二维平面应力渡越辐射能计算模型. 其中, 两个材料参数不同的半无限弹性层由一倾斜界面耦合, 底端固定, 上表面自由, 一个集中载荷在自由表面上匀速运动. 界面两侧弹性体中的波动方程均分解为本征场、自由场两个部分分别求解, 其中自由场波动方程采用分离变量法数值求解. 通过模型求解得到了不同载荷移动速度和界面倾斜角度条件下的渡越辐射能及界面附近应变能密度. 结果表明, 渡越辐射能的大小随载荷移动速度增大单调非线性增大, 移动载荷速度达到刚度较大一侧介质表面波速的 74% 时产生的渡越辐射能就将超过载荷本身激发的本征场应变能; 界面倾斜角度越大, 即两侧介质刚度过渡距离越短, 渡越辐射能与本征场应变能比值越大.

关键词 高速铁路, 过渡段, 渡越辐射, 波数, 能流

中图分类号: O343.1 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-19-246

TRANSITION RADIATION IN ELASTIC MEDIUMS COUPLED BY AN INCLINED INTERFACE¹⁾

Yao Shan^{*,†,2)} Li Su^{*,†,**} Shunhua Zhou^{*,†}

^{*}(Shanghai Key Laboratory of Rail Infrastructure Durability and System Safety, Shanghai 201804, China)

[†](Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 201804, China)

^{**}(SGIDI Engineering Consulting (Group) Co.Ltd, Shanghai 200093, China)

Abstract The energy radiation phenomenon that is excited when a perturbation source moves along a straight line with a constant velocity in or near an inhomogeneous medium is referred as transition radiation. As a common physical phenomenon, transition radiation is emitted when train induced elastic waves propagate in non-uniform rail infrastructures, which are the inhomogeneous medium. Such non-uniformities of infrastructures are mainly concentrated in transition zones between different track structures, namely between bridge and subgrade, tunnel and bridge or ballast track and ballastless track. In this paper, a two-dimensional plane-stress model is established based on the common configuration of high-speed railway transition zone to investigate the transition radiation of the train-induced elastic wave in transition

2019-09-02 收稿, 2020-01-16 录用, 2020-01-17 网络版发表.

1) 国家自然科学基金青年科学基金资助项目 (51708424).

2) 陕耀, 副教授, 主要研究方向: 轨道交通线路系统动力学和路基沉降控制理论. E-mail: shanyao@tongji.edu.cn

引用格式: 陕耀, 苏臻, 周顺华. 倾斜界面耦合弹性层中的渡越辐射能. 力学学报, 2020, 52(1): 111-123

Yao Shan, Li Su, Shunhua Zhou. Transition radiation in elastic mediums coupled by an inclined interface. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(1): 111-123

zones. Two semi-infinite elastic layers with different physical properties are coupled by an inclined interface. The bottom of each layer is fixed and the surface is free. A constant load moves on the free surface with a constant velocity passing through the inclined interface between two layers. The elastic wave field is solved separately in an eigenfield and a free field, respectively. The free field is solved by employing the method of separation of variables. The transition radiation energy flux and the energy flux near the interface are calculated separately with different combinations of load moving velocities and interface inclined angles to analyze the influence of these two factors on the transmission of transition radiation. Results show that the total transition radiation energy increases monotonically and non-linearly with the increase of load moving velocity and interface inclined angle. The transition radiation energy even exceeds the strain energy in the eigenfield when the load velocity reaches 74% of the Rayleigh wave velocity in this case. A larger interface inclined angle (i.e. a shorter transition zone) leads to a larger ratio of the transition radiation energy to eigenfield strain energy.

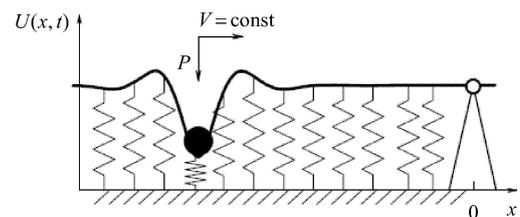
Key words high-speed railway, transition zone, transition radiation, wave number, energy flux

引 言

物理学中, 摄动源 (perturbation source) 在非均匀介质中或非均匀介质附近匀速直线运动所产生的能量辐射现象称为渡越辐射 (transition radiation). 这一现象由前苏联物理学家 Ginzburg 和 Frank^[1] 在 1946 年首次提出, 他们分析了一个带电粒子穿越理想导体和真空之间界面时所产生的电磁辐射. 渡越辐射的早期研究即表明这一现象在不同物理场中普遍存在, 包括电磁场^[2]、光场^[3]、声波场^[4]和弹性波场^[5]等. 产生这一现象的物理解释为: 物体在不同介质中运动时自身所携带的能量由于介质性质的不同而不同, 在两种介质界面处, 这一能量差必须被平衡才能满足介质连续条件, 因此这一能量差独立于物体运动而向两侧介质中自由传播, 产生的能量辐射现象即为渡越辐射现象. 我国学者对渡越辐射的研究多集中在电磁学^[6-8]和光学^[9-12]领域.

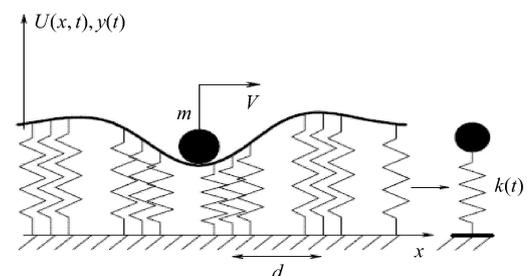
Vesnitskii 和 Metrikin^[13] 1992 年最早将渡越辐射引入力学分析, 开始对移动载荷引起的弹性波在非均匀介质中传播的渡越辐射现象进行研究. 弹性波场中, 一个匀速运动的点载荷经过非均匀的弹性介质界面时, 介质中会产生能量辐射 (该载荷运动速度应小于介质波速, 以去除契伦科夫辐射等其他辐射的影响). 为了探究轨道劣化和弓网接触 (受电弓和接触网) 劣化等问题的物理本源, 从 1996 年起陆续有学者^[5]对列车载荷引起的弹性波在非均匀轨道和基础中传播的渡越辐射现象进行了理论分析. 研究方法主要是将列车-轨道-路基系统理想化为一维或二维的物理模型, 求解其位移场和应力场, 通过位移场和应力场推导能量流动表达式, 进而研究轮轨接触弹性波在非均匀轨道和基础中传播产生渡越辐

射能的流动规律. 模型经历了均匀弹性地基上的半有界弦/梁^[5]、周期性/随机非均匀弹性地基上的无限弦/梁^[5]、两个均匀各向同性半平面^[14]和两个均匀各向同性弹性层^[15]的发展, 如图 1 所示. 而轨道和基础的非均匀性 (轨道几何不平顺和基础刚度变化) 集中体现在不同轨道基础之间的过渡段 (以高速铁路路桥过渡段为例, 如图 2 所示), 统计资料表明, 过渡段轨道劣化速度显著高于一般路基段和桥梁段.



(a) 半有界弦/梁、均匀弹性地基^[5]

(a) Semibounded string/beam on a homogeneous elastic foundation^[5]

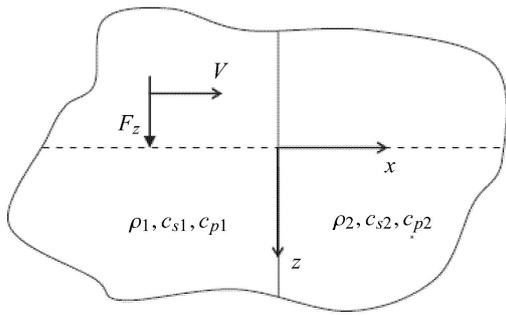


(b) 无限弦/梁、周期性/随机非均匀弹性地基^[5]

(b) Infinite string/beam on a periodically/randomly inhomogeneous elastic foundation^[5]

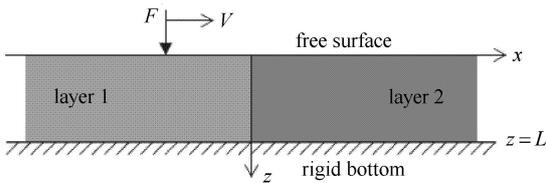
图 1 力学中的渡越辐射计算模型

Fig. 1 Transition radiation models in mechanics



(c) 两个均匀各向同性半平面^[14]

(c) Two homogeneous elastic half-planes coupled by a vertical interface^[14]



(d) 两个均匀各向同性弹性体^[15]

(d) Two homogeneous elastic layers coupled by a vertical interface^[15]

图 1 力学中的渡越辐射计算模型(续)

Fig. 1 Transition radiation models in mechanics (continued)

国内外对于过渡段动力特性的研究主要集中在现场实测、室内试验和数值分析. 以现场实测和室内试验数据^[16-22]为问题提出和理论验证的依据, 采用理论和数值模型^[23-32]计算过渡段车辆-轨道-路基大系统各组成部分的动力响应, 通过与现场实测或室内试验所得数据的对比来验证模型的可行性, 进而分析过渡段刚度变化和轨道几何不平顺对列车运行

平稳性和轨道各组成部分服役性能劣化的影响规律. 现有的过渡段动力性能的数值分析多以研究对象动力响应的现象描述为主, 其产生机理尚须从波动和能量的角度进行探索和研究.

Steenbergen 和 Michael^[33]从普遍物理力学概念角度指出: 影响列车运行稳定性和轨道劣化的本源在于轨道的非均匀性. 对于运行的列车, 任何轨道组成材料或者几何形位的变化都可以归结为“非均匀”, 轮轨接触产生的弹性波在非均匀介质中传播引起的渡越辐射是影响列车运行平稳性和引起轨道性能劣化的物理力学基础.

轨道和基础的非均匀性集中于不同轨道基础之间的过渡段, 以路桥过渡段为例 (如图 2 所示), 桥台与路基之间存在显著的垂直界面和材料性质差异, 过渡段路基沿线路纵向和深度方向均呈现典型的填料性质变化和成层分布, 不同填料间水平和垂向界面明显, 车致弹性波在过渡段范围内传播将产生复杂的渡越辐射. 渡越辐射现象会显著放大轨道和基础的应力场与应变场, 造成轨道和基础服役性能恶化, 进而影响列车运行平稳性和旅客乘坐舒适度^[15]. 以往关于波在非均匀弹性介质中渡越辐射的研究表明, 扰动源运动速度越接近波在介质中传播的速度, 所产生的渡越辐射能越显著. 同理, 随着列车运行速度的不断提高, 当接近表面波 (瑞利波) 速时, 既有过渡段结构引发的渡越辐射是否会加速过渡段服役性能的劣化? 既有高速铁路过渡段设计是否还能满足长期稳定性的要求?

为回答上述问题, 需要对既有高速铁路过渡段渡越辐射能量流动规律和波场特征进行深入研究.

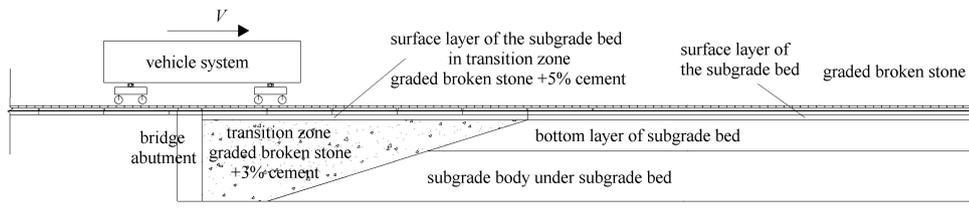


图 2 高速铁路路桥过渡段结构^[34]

Fig. 2 High-speed railway bridge-embankment transition zone configuration^[34]

为了研究过渡段复杂界面引起的车致弹性波渡越辐射能, 需要建立通过复杂多界面耦合的介质振动模型 (如图 3 所示). 该理想模型的实现仍有很长的路要走, 需要逐步厘清由垂直界面、倾斜界面和水平界面单独存在引起的渡越辐射能, 以及几种界面共

同作用的渡越辐射能. 目前为止, 既有研究已基本实现了通过垂直界面耦合的半无限弹性层模型^[15] (如图 1(d) 所示) 的构建. 在此基础上, 后续研究应着重解决倾斜界面引起的渡越辐射问题, 以及进一步分析垂直界面与倾斜界面共同作用下的渡越辐射问题.

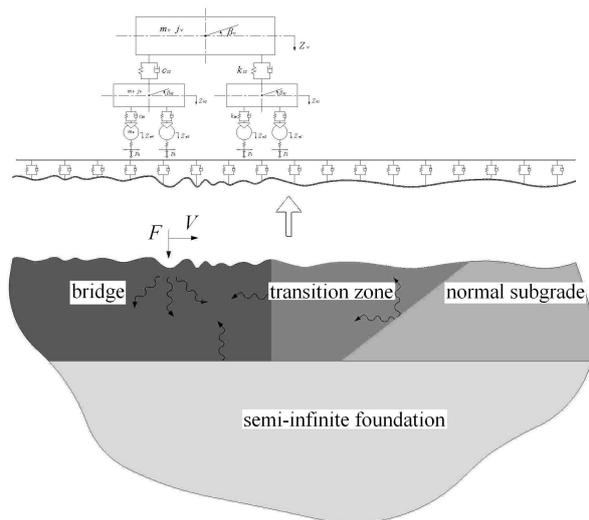


图3 过渡段复杂多界面耦合振动模型

Fig. 3 Transition zone multi-interfaces coupling vibration model

本文在 van Dalen 等^[15] 建立的由垂直界面耦合的两个半无限均匀弹性层模型的基础上, 采用分离变量法求解了由倾斜界面耦合的两个半无限均匀弹性层模型波动方程, 并采用半解析方法对该模型中两个弹性层中的渡越辐射能流密度进行了计算, 分析了受载荷移动速度和界面倾斜角度影响的渡越辐射能流分布规律, 以期对高速铁路过渡段动力响应机理提供参考.

1 倾斜界面渡越辐射物理模型及数学模型

1.1 物理模型

高速铁路路桥过渡段结构复杂, 以我国《高速铁路设计规范》(TB 10621—2014)^[34]中推荐的倒梯形路桥过渡段结构为例, 高速铁路路桥过渡段中存在桥台背与过渡段填料间垂直界面, 基床表层与基床底层、基床底层与路基本体之间的水平界面以及过渡段填料与普通路基段之间的倾斜界面等多种不同刚度介质之间的界面. 为理解高速铁路路桥过渡段中的能流和波动特征, 有必要对不同介质界面处产生的渡越辐射现象进行研究. van Dalen 等^[15] 给出了移动载荷经过两个由垂直界面耦合的弹性层所激发的渡越辐射能的计算方法. 为了进一步理解高速铁路路桥过渡段中的波动及能量, 本文中建立了分析由倾斜界面耦合的两个半无限弹性层中渡越辐射现象的物理模型.

因高速列车经过引起的过渡段路基动变形处于弹性阶段, 可将过渡段路基各组成部分视为通过界

面相互耦合的各向同性弹性体 (小应变), 列车等效为沿自由面直线运动的集中载荷或质量块. 为分析过渡段波场特性, 整个过渡段车辆-轨道-线下基础系统抽象为如图 4 所示的物理模型. 弹性层顶部为自由面, 底部为刚性基础, 两弹性介质由一倾斜界面耦合, 在该界面处满足位移、应力连续条件. 该模型中坐标系为直角坐标系, x 轴建立在自由面上, 其正方向为移动载荷运动方向, z 轴垂直于 x 轴, 正方向从自由面指向刚性基础. 坐标系零点为介质 1 与介质 2 在自由面上的连接点. 本文中将介质 1 定义为移动载荷先经过的介质, 介质 2 定义为移动载荷后经过的介质. 介质倾斜角度定义为介质界面与介质 2 底部刚度基础之间的夹角 θ .

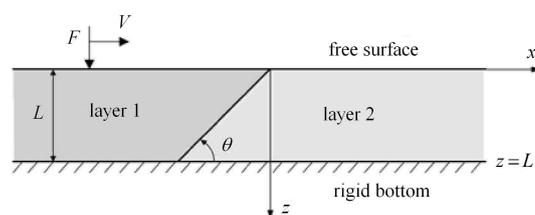


图4 匀速运动载荷在两种层状介质倾斜界面处激发渡越辐射的物理模型

Fig. 4 Physical model for transition radiation excited by a surface load moving over an inclined interface of two elastic mediums

为分析两种介质刚度差异产生的渡越辐射现象, 移动的点载荷在两种弹性介质表面匀速移动产生的弹性波场可被分解为本征场 (eigenfield) 和自由场 (free field) 两个部分求解. 本征场描述载荷本身在单一弹性介质中引起的波动响应, 自由场描述由界面两侧介质差异引起的渡越辐射能场, 两者叠加成为可观察到的总体弹性波场. 本征场动力响应随载荷移动, 并局限于载荷一定距离范围内, 仅受到介质材料参数、载荷值大小及载荷移动速度影响. 由于两种介质的材料差异, 在其界面处两种介质中产生的本征场响应存在差值, 即在同一空间坐标位置存在两个不相等的动力响应值. 而界面处两种介质又需满足位移应力连续条件, 这一差异即可视为自由场的扰动源. 自由场响应由界面向两侧介质中自由传播, 且独立于载荷的运动, 不仅受到介质材料参数、载荷值大小及载荷移动速度影响, 同时也受到界面倾斜角度的影响.

1.2 数学模型

由斯托克斯-亥姆霍兹矢量定理可知, 任何一个

足够平滑的矢量场都可以分解成无旋的部分和无散的部分. 为描述 1.1 节中物理模型的本征场及自由场弹性波, 引入 $\varphi^{(i),j}$, $\psi^{(i),j}$ 两个亥姆霍兹势函数, 其中 $\varphi^{(i),j}$ 表示散度, $\psi^{(i),j}$ 表示旋度. $i = \{1, 2\}$ 表示该势函数所表征的介质层, $j = \{e, f\}$ 分别代表本征场、自由场. 两个由倾斜界面耦合的弹性层中的弹性波场可由下述亥姆霍兹方程描述

$$\partial_t^2 \varphi^{(i),j} = (c_p^{(i)})^2 \nabla^2 \varphi^{(i),j}, \quad c_p^{(i)} = \sqrt{\frac{\lambda^{(i)} + 2G^{(i)}}{\rho^{(i)}}} \quad (1)$$

$$\partial_t^2 \psi^{(i),j} = (c_s^{(i)})^2 \nabla^2 \psi^{(i),j}, \quad c_s^{(i)} = \sqrt{\frac{G^{(i)}}{\rho^{(i)}}} \quad (2)$$

式中, $c_p^{(i)}$ 表示弹性介质的压缩波速, $c_s^{(i)}$ 表示剪切波速. $\lambda^{(i)}$ 与 $G^{(i)}$ 为拉梅常数, $\rho^{(i)}$ 为材料密度. 旋度与散度势函数与弹性层中的位移关系如式 (3), 式中逗号前后分别为势函数所表示的 x 方向位移及 z 方向位移. 利用弹性介质中的物理方程可得到亥姆霍兹势函数与应力场对应关系

$$u_x^{(i),j} = \partial_x \varphi^{(i),j} - \partial_z \psi^{(i),j}, \quad u_z^{(i),j} = \partial_z \varphi^{(i),j} + \partial_x \psi^{(i),j} \quad (3)$$

将点载荷经过 $x = 0$ 的时刻定义为 $t = 0$, 点载荷先经过的弹性层称为介质 1, 后经过的弹性层称为介质 2, 则模型的应力、位移边界条件可由式 (4) ~ 式 (8) 表示

$$\sigma_{zz}^{(1)}(x, z = 0, t) = \begin{cases} -F\delta(x - Vt), & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\sigma_{zz}^{(2)}(x, z = 0, t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -F\delta(x - Vt), & t \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\sigma_{zx}^{(i)}(x, z = 0, t) = 0 \quad (6)$$

$$u_x^{(i)}(x, z = L, t) = 0 \quad (7)$$

$$u_z^{(i)}(x, z = L, t) = 0 \quad (8)$$

式中, $i = \{1, 2\}$ 分别表示介质 1、介质 2, L 表示介质层厚度 (如图 4 所示), t 表示时间, V 表示点载荷移动速度, δ 为狄拉克函数. 两个介质层界面处位移应力应满足式 (9) ~ 式 (12) 所示的连续条件.

$$\sigma_{xx}^{(1)}\left(x = -\frac{z}{\tan \theta}, z, t\right) = \sigma_{xx}^{(2)}\left(x = -\frac{z}{\tan \theta}, z, t\right) \quad (9)$$

$$\sigma_{xz}^{(1)}\left(x = -\frac{z}{\tan \theta}, z, t\right) = \sigma_{xz}^{(2)}\left(x = -\frac{z}{\tan \theta}, z, t\right) \quad (10)$$

$$u_x^{(1)}\left(x = -\frac{z}{\tan \theta}, z, t\right) = u_x^{(2)}\left(x = -\frac{z}{\tan \theta}, z, t\right) \quad (11)$$

$$u_z^{(1)}\left(x = -\frac{z}{\tan \theta}, z, t\right) = u_z^{(2)}\left(x = -\frac{z}{\tan \theta}, z, t\right) \quad (12)$$

介质中的位移场、应力场均为本征场与自由场的叠加, 即

$$\mathbf{u}^{(i)}(x, z, t) = \mathbf{u}^{(i),e}(x, z, t) + \mathbf{u}^{(i),f}(x, z, t) \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)}(x, z, t) = \boldsymbol{\sigma}^{(i),e}(x, z, t) + \boldsymbol{\sigma}^{(i),f}(x, z, t) \quad (14)$$

式中, 上标 e 表示本征场, f 表示自由场.

1.3 波动方程求解

将 1.2 节中给出的亥姆霍兹方程作傅里叶变换, 代入边界条件中即可得到两个弹性层各自的本征场波动方程频域解. van Dalen 等^[15]在其对垂直界面耦合弹性层中渡越辐射能的研究中给出了本征场的详细求解过程, 本文不再赘述.

自由场定义为由于点载荷所作用的弹性介质材料变化产生的弹性波辐射场, 其激励源为两种不同材料介质在界面处的本征场动力响应差异. 由于载荷作用在本征场中已经考虑, 因此自由场的边界条件中自由表面不再重复计算载荷作用, 其边界条件可表达如下

$$\sigma_{zz}^{(i),f}(x, z = 0, t) = 0 \quad (15)$$

$$\sigma_{zx}^{(i),f}(x, z = 0, t) = 0 \quad (16)$$

$$u_x^{(i),f}(x, z = L, t) = 0 \quad (17)$$

$$u_z^{(i),f}(x, z = L, t) = 0 \quad (18)$$

考虑本征场在介质界面处的响应差异为激励源, 自由场在介质中的传播为弹性连续介质中的自由振动, 其波动方程可采用分离变量法求解. 在一个二维问题中, 波动方程可分解为相互独立的 x 相关项、 z 相关项和常数项. 自由场可分解为无穷多组模态的叠加, 每个模态对应一个唯一的水平向波数 $k_{x,k}^{(1)}$ (介质 1) 和 $k_{x,l}^{(2)}$ (介质 2), 垂向压缩波数 $k_{z,P,k}^{(1)}$ (介质 1) 和 $k_{z,P,l}^{(2)}$ (介质 2), 垂向剪切波数 $k_{z,S,k}^{(1)}$ (介质 1) 和 $k_{z,S,l}^{(2)}$ (介质 2) 及模态参数 $C_k^{(1)}$ (介质 1) 和 $C_l^{(2)}$ (介质 2). 因此, 求解自由场波动方程的关键是求解各模态一一对应的水平向波数和模态参数 (垂向波数可由水平向参数直接转化得到). 式 (19) ~ 式 (22) 给出了频域内模态叠加方法表达的自由场亥姆霍兹势函数.

$$\hat{\varphi}^{(1),f}(x, z, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)} Z_{P,k}^{(1)}(z) e^{+ik_{x,k}^{(1)}x}, \quad x < -\frac{z}{\tan \theta} \quad (19)$$

$$\hat{\varphi}^{(1),f}(x, z, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)} Z_{P,k}^{(1)}(z) e^{+ik_{x,k}^{(1)}x}, \quad x < -\frac{z}{\tan \theta} \quad (20)$$

$$\hat{\varphi}^{(2),f}(x, z, \omega) = \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(2)} Z_{p;l}^{(2)}(z) e^{-ik_{x;l}^{(2)} x}, \quad x > -\frac{z}{\tan \theta} \quad (21)$$

$$\hat{\psi}^{(2),f}(x, z, \omega) = \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(2)} Z_{s;l}^{(2)}(z) e^{-ik_{x;l}^{(2)} x}, \quad x > -\frac{z}{\tan \theta} \quad (22)$$

将以上 4 式代入式 (3) 可得到自由场位移表达式, 通过弹性介质应力-应变关系可以得到应力场表达式. 对于自由场位移应力, 每个模态都应当满足边界条件要求, 故将得到的表达式代入式 (15) ~ 式 (18) 可得如下等式

$$\begin{aligned} & \left[-\lambda(k_x^{(i)})^2 - (2G + \lambda) \left(k_{z,p}^{(i)} \pm \frac{k_x^{(i)}}{\tan \theta} \right)^2 \right] \eta_p^{(i)} B_{p1}^{(i)} + \\ & \left[-\lambda(k_x^{(i)})^2 - (2G + \lambda) \left(k_{z,p}^{(i)} \mp \frac{k_x^{(i)}}{\tan \theta} \right)^2 \right] B_{p2}^{(i)} \mp \\ & \left[2Gk_x^{(i)} \left(k_{z,s}^{(i)} \pm \frac{k_x^{(i)}}{\tan \theta} \right) \right] \eta_s^{(i)} B_{s1}^{(i)} \pm \\ & \left[2Gk_x^{(i)} \left(k_{z,s}^{(i)} \mp \frac{k_x^{(i)}}{\tan \theta} \right) \right] B_{s2}^{(i)} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \mp \left[2k_x^{(i)} \left(k_{z,p}^{(i)} \pm \frac{k_x^{(i)}}{\tan \theta} \right) \right] \eta_p^{(i)} B_{p1}^{(i)} \pm \\ & \left[2k_x^{(i)} \left(k_{z,p}^{(i)} \mp \frac{k_x^{(i)}}{\tan \theta} \right) \right] B_{p2}^{(i)} + \\ & \left[\left(k_{z,s}^{(i)} \pm \frac{k_x^{(i)}}{\tan \theta} \right)^2 - (k_x^{(i)})^2 \right] \eta_s^{(i)} B_{s1}^{(i)} + \\ & \left[\left(k_{z,s}^{(i)} \mp \frac{k_x^{(i)}}{\tan \theta} \right)^2 - (k_x^{(i)})^2 \right] B_{s2}^{(i)} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \pm ik_x^{(i)} B_{p1}^{(i)} \pm ik_x^{(i)} \eta_p^{(i)} B_{p2}^{(i)} - \left(ik_{z,s}^{(i)} \pm \frac{ik_x^{(i)}}{\tan \theta} \right) B_{s1}^{(i)} + \\ & \left(ik_{z,s}^{(i)} \mp \frac{ik_x^{(i)}}{\tan \theta} \right) \eta_s^{(i)} B_{s2}^{(i)} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \left(ik_{z,p}^{(i)} \pm \frac{ik_x^{(i)}}{\tan \theta} \right) B_{p1}^{(i)} + \left(-ik_{z,p}^{(i)} \pm \frac{ik_x^{(i)}}{\tan \theta} \right) \eta_p^{(i)} B_{p2}^{(i)} \pm \\ & ik_x^{(i)} B_{s1}^{(i)} \pm ik_x^{(i)} \eta_s^{(i)} B_{s2}^{(i)} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

式中, $\eta_p^{(i)} = e^{-ik_{z,p}^{(i)} L}$, $\eta_s^{(i)} = e^{-ik_{z,s}^{(i)} L}$. 上标 $i = \{1, 2\}$ 表示介质 1 或介质 2, 式中正负号与 $x < -z/\tan \theta$, $x > -z/\tan \theta$ 相关. 若要 $B_{p1}^{(i)}$, $B_{p2}^{(i)}$, $B_{s1}^{(i)}$, $B_{s2}^{(i)}$ 有非零解, 应有系数行列式等于零. 求解该方程即可得到自由场无限多个模态一一对应的水平向波数 $k_x^{(i)}$, 将求得的 $k_x^{(i)}$ 代回到方程组 (22)~(25) 中, 可求出波动方程中 z 相关项常数 $B_{p1}^{(i)}$, $B_{p2}^{(i)}$, $B_{s1}^{(i)}$, $B_{s2}^{(i)}$. 至此, 自由场波动方程中未知数仅剩模态参数 $C_k^{(1)}$ (介质 1) 和 $C_l^{(2)}$ (介质 2), 模态参数求解方法

与 van Dalen 等^[15] 垂直界面模型中模态参数的求解方法相同.

1.4 数值计算方法

由于自由场波动方程采用了分离变量法求解, 波函数分解为无穷多个模态的叠加, 难以通过纯解析方法求解每个模态所对应的波数和参数. 马文涛等^[35-37]均在研究中对二维弹性力学问题的数值求解方法做出了有益的贡献. 本文中对于介质中自由场的响应亦采用数值方法求解, 具体方法过程如下.

自由场波动方程在频域内进行求解, 由 van Dalen^[33] 研究给出的结果可知, 自由场渡越辐射能谱密度峰值均出现在 10 Hz 以内, 故本文频域范围均取为 0~10 Hz, 频率步长取为 0.1 Hz. 对每一个频率, 为了得到介质中任意一点自由场位移值和应力值, 均需要求解与模态一一对应的水平向波数, z 相关项参数和模态参数.

求解的起点是 1.3 节中给出的行列式为零的方程, 该方程为复平面上的超越方程, 本文中利用 Matlab 内置函数 `fsolve` 对数值求解, 该算法原理为牛顿迭代法, 这种算法需要给出初始值, 算法在初始值附近范围内寻找满足条件的解. 将 $k_x^{(i)}$ 的实部和虚部作为两个独立的未知数, 经过试算将实部取值范围设为 $-0.5 \sim 0.5$, 虚部取值范围设为 $-16 \sim 0$. 实部初始值步长为 0.02, 虚部初始值步长为 0.2, 误差范围选取为 1.0×10^{-8} , 即当行列式绝对值小于 1.0×10^{-8} 时, 认为该实部与虚部的组合为可接受的 $k_x^{(i)}$ 值. 该方法计算得到的 $k_x^{(i)}$ 存在重复值. 认为两个解实部和虚部差值均小于 1.0×10^{-6} 情况为重复解, 仅保留其中误差较小解. van Dalen 等^[15]认为, 自由场中选取 100 个模态已经能较好地反映介质中的渡越辐射现象, 且水平向波数虚部值越大的模态对渡越辐射能做出的贡献越小. 因此本文中将计算得到的水平向波数解按虚部值由大到小进行排序, 仅保留前 100 个解. 将求解得到的水平向波数回代至频散方程中求解方程组即得到了每个模态对应的 z 相关项参数.

模态参数的求解涉及到了将每个模态计算得到的应力应变值对 z 进行积分的过程. 对于每个算例的自由场计算均存在 5 个积分项, 且每个积分项需要对介质 1、介质 2 不同模态组合及每个频率进行积分, 即对于一个算例为求解自由场模态参数需进行 500 万次积分, 这一过程将极大地影响计算效率. 因此, 本文中将积分简化为 z 方向上的求和, 取计算

步长为 0.01, 这一算法极大地提高了计算效率, 且由于所取步长较短, 积分算法与求和算法的计算精度差距不大, 约为 2%~5%。

模态选取量越多, 自由场计算结果与理论解吻合度越高. 本文计算条件下, 选取 100 个模态已能满足模型界面处的位移应力连续条件.

2 渡越辐射能案例分析

渡越辐射能定义为两弹性介质中向无限远处传播的能量, 该范围内能量传播不再受本征场作用影响, 因此这部分能量仅为自由场中的传播模贡献. 渡越辐射能与介质中本征场应变能的比值表征了介质刚度变化对系统中能量分布的影响.

为计算自由场产生的辐射能通量, 选取如图 5 所示闭合面 Γ_1 , 其水平边界为介质自由面 $z = 0$ 和介质刚性基础 $z = L$, 其垂直界面为介质两侧 x 方向无限远处, 即 $|x| \rightarrow \infty$. 通过该闭合面的能通量可通过闭合面范围内各点应力应变的乘积积分得到.

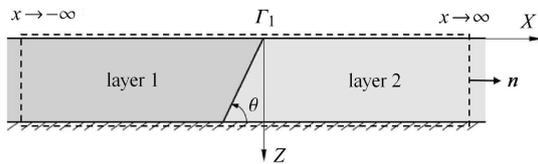


图 5 渡越辐射能通量计算闭合面

Fig. 5 Enclosing surface for accessing the energy flux associated with the transition radiation

2.1 计算参数

为研究载荷移动速度和界面倾斜角度对弹性层中能流密度分布的影响, 本节中采用的载荷移动速度为 20 ~ 90 m/s (间隔取 10 m/s), 界面倾角为 15°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 150° 共 14 种情况下界面两侧介质中的渡越辐射能. 频域计算范围均为 0~10 Hz, 步长均为 0.1 Hz, 自由场均选取 100 个模态进行计算. 这里再次说明, 本文中介质 1 均定义为载荷先经过的介质, 介质 2 定义为载荷后经过的介质, 界面倾斜角度定义为介质界面与介质 2 刚性基础之间的夹角 θ .

所有算例中介质 1 材料为材料 A, 介质 2 材料为材料 B, 具体材料参数见表 1. 介质层厚度均为 25 m. 载荷移动速度改变的 8 个算例中界面倾角均取为 60°, 界面倾斜角度改变的算例中载荷移动速度均取为 50 m/s, 移动载荷取值均为 10 kN/m.

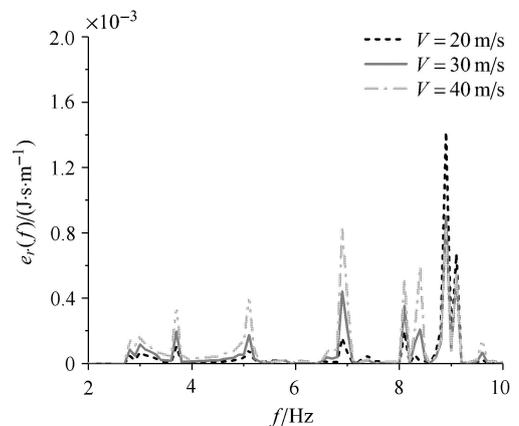
表 1 材料参数表

Table 1 Material parameters

	E/MPa	μ	$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	$v/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$
A	70	0.4	1700	121
B	50	0.3	1700	106

2.2 载荷移动速度对渡越辐射能的影响

本文载荷移动速度的取值控制在介质临界速度以内, 以防止其他类型辐射 (例如, 切伦科夫辐射) 的产生对渡越辐射现象的干扰, 因此, 载荷移动速度取值为 20 ~ 90 m/s (该案例分析中介质 1 临界速度为 121 m/s, 介质 2 临界速度为 106 m/s). 在载荷移动速度增大的过程中, 渡越辐射能谱密度分布变化规律相似, 且当载荷移动速度逐渐接近临界速度时, 渡越辐射能谱密度变化量值过大, 难以在同一坐标尺度内表现能谱密度分布规律受到载荷移动速度的影响, 因此, 本节采用载荷移动速度为 20, 30, 40 m/s 的计算结果来反映载荷速度变化对渡越辐射能谱密度分布规律的影响, 如图 6 所示. 能量谱密度中的特征频率主要来源于水平向波数为实数的模态, 故复波数为实数解的模态较多的频率将计算得到较大的能量谱密度, 主要受界面倾斜角度、介质刚度差异的影响. 随着载荷移动速度增大, 渡越辐射能谱密度峰值点对应的频率位置并未发生变化, 但峰值并不是单调增大的. 频率较小范围内 (在该算例中为小于 8.5 Hz) 应变能谱密度随着载荷移动速度的增大而增大, 而频率较大范围内应变能谱密度峰值随

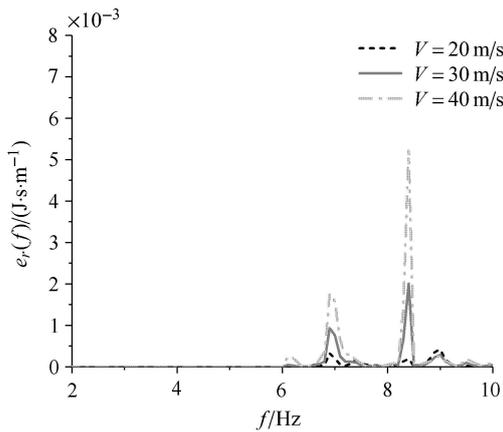


(a) 介质 1 中渡越辐射能谱密度分布

(a) Spectral density of transition radiation in layer 1

图 6 渡越辐射能谱密度随载荷移动速度变化规律

Fig. 6 Spectral density of transition radiation with different load moving velocities



(b) 介质 2 中渡越辐射能谱密度分布

(b) Spectral density of transition radiation in layer 2

图 6 渡越辐射能谱密度随载荷移动速度变化规律 (续)

Fig. 6 Spectral density of transition radiation with different load moving velocities (continued)

着载荷移动速度的增大有所下降. 对整个频域而言, 可以认为随着载荷移动速度的增加渡越辐射能谱密度向较小频率内集中. 介质 2 中应变能谱密度最大值显著大于介质 1, 但介质 1 中峰值点较多, 应变能密度在频域上的分布较介质 2 更均匀.

图 6(a) 与图 6(b) 对比可知, 随着载荷移动速度的提升界面两侧介质中能量密度峰值差异减小. 介质 1 中随载荷移动速度增大应变能谱密度向频率较小侧集中, 介质 2 中 3 个应变能峰值点始终在频率为 6.2, 6.9 和 7.4 Hz 位置处, 但三者之间的大小关系发生了变化, 随着速度的增大, 频率较小位置谱密度的增大幅度要大于频率较大位置.

如表 2 所示, 载荷移动速度较小时, 渡越辐射能谱密度峰值并不随速度单调增大. 当载荷移动速度超过 50 m/s 后, 渡越辐射能谱密度峰值随载荷移动速度增大而单调递增, 且变化率也逐渐增大. 当速度由 80 m/s 提升至 90 m/s, 两侧介质中渡越辐射能谱密度最大值增长率均发生显著增长. 介质 1 中速度为 80 m/s 时谱密度最大值仅为速度为 90 m/s 时的 13%, 介质 2 中该比值为 26%. 将得到的渡越辐射能谱密度分布对频率积分可得到介质中向无限远处传播的渡越辐射能 E_r .

为理解渡越辐射现象对总能流密度分布的影响, 将计算得到的渡越辐射能 E_r 除以该算例参数下本征场应变能 E_e , 得到的比值称为正规化的渡越辐射能. 虽然介质 2 中渡越辐射能较大, 但由于其介

表 2 自由场远场应变能计算结果汇总

Table 2 Summary table for the free field strain energy calculation results

Load moving velocities/ (m·s ⁻¹)	Maximum spectral density of transition radiation in layer 1/ (J·s·m ⁻¹)	Maximum spectral density of transition radiation in layer 2 / (J·s·m ⁻¹)
20	1.420×10 ⁻³	0.420×10 ⁻³
30	0.900×10 ⁻³	2.000×10 ⁻³
40	0.840×10 ⁻³	5.320×10 ⁻³
50	1.320×10 ⁻³	10.060×10 ⁻³
60	0.01	0.856
70	0.174	1.485
80	0.432	3.069
90	3.318	11.81

质刚度较小, 本征场应变能远大于介质 1 中本征场应变能, 故介质 2 中渡越辐射能对总能量场的贡献比介质 1 小. 介质 1 中渡越辐射能在载荷移动速度提升到 80 m/s 以上时超过本征场应变能. 图 7 中为正规化后的渡越辐射能随载荷移动速度的变化规律, 由图可知随着载荷移动速度的增大, 两侧介质中渡越辐射能对总能量场做出的贡献均单调非线性增大. 本算例中, 介质 1 临界速度为 121 m/s, 介质 2 临界速度为 106 m/s, 如图 7 所示, 载荷移动速度达到界面介质 2 临界速度 74% 时渡越辐射能的绝对值大小已经超过了本征场应变能. 对于高速铁路列车而言, 这一结论表明当列车行驶速度接近基础临界速度时, 基础刚度差异引起的系统动力响应可能会超过列车载荷本身激发的系统动力响应.

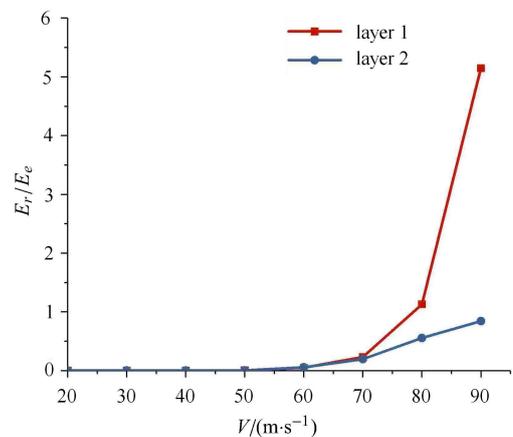
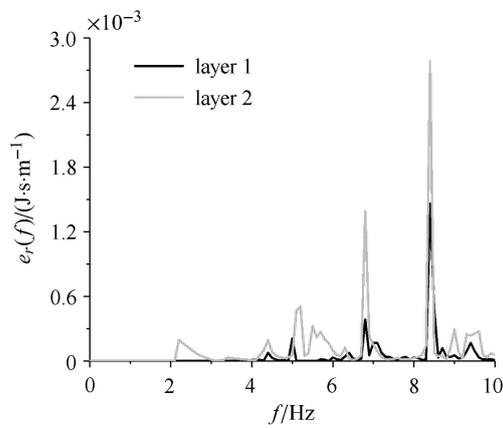


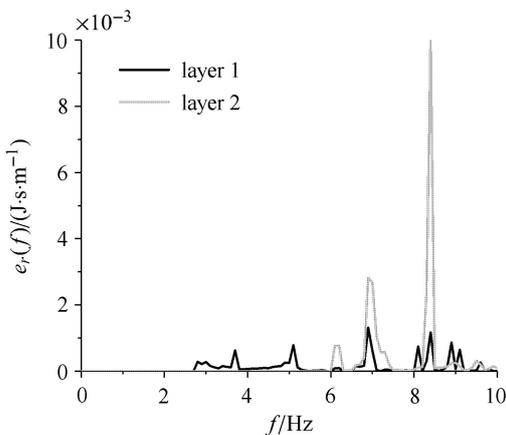
图 7 渡越辐射能与本征场应变能比值随载荷移动速度变化规律
Fig. 7 Transition radiation energy normalized by the eigenfield energy versus velocity V

2.3 界面倾斜角度对渡越辐射能的影响

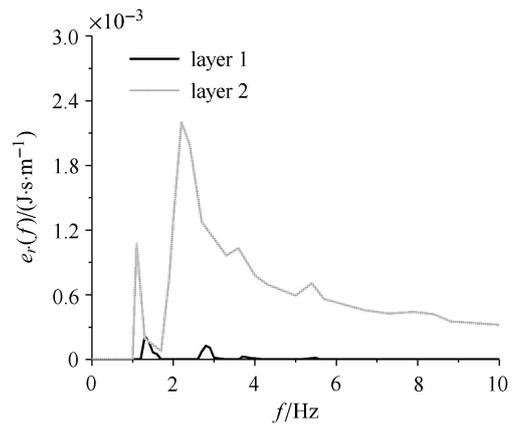
图 8 中为不同界面倾角 θ (界面与介质 2 刚性基础夹角) 情况下两侧介质中的渡越辐射能谱密度分布, 由于篇幅限制仅给出界面倾斜角度为 45° , 60° , 90° , 120° 情况下的计算结果. 对于界面倾角为锐角的情况, 介质 2 中的渡越辐射能谱密度最大值均大于介质 1 中的最大值, 且介质 2 中渡越辐射能谱密度均集中于 2~3 个峰值点. 对于界面倾角为钝角的情况, 介质 1 中的渡越辐射能谱密度最大值均大于介质 2 中最大值, 两侧介质中渡越辐射能谱密度均集中于频率较大的范围内. 图 8(c) 为界面为垂直情况下两侧介质中的渡越辐射能谱密度, 界面垂直情况下, 两侧介质的刚度差异成为影响介质中自由场谱密度分布的支配性影响因素, 因此刚度较小的介



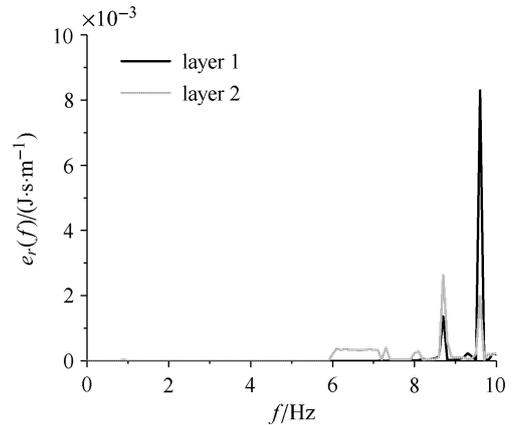
(a) 界面倾角为 45°
(a) Interface inclination angle at 45°



(b) 界面倾角为 60°
(b) Interface inclination angle at 60°



(c) 界面倾角为 90°
(c) Interface inclination angle at 90°



(d) 界面倾角为 120°
(d) Interface inclination angle at 120°

图 8 渡越辐射能谱密度随界面倾斜角度变化规律

Fig. 8 Spectral density of transition radiation with different interface inclination angles

质 (介质 2) 中渡越辐射能显著大于刚度较大介质 (介质 1).

渡越辐射能谱密度谱密度最大值随界面倾斜角度的变化规律并不是单调的. 界面倾角为锐角情况下, 介质 2 中应变能谱密度峰值显著大于介质 1. 界面倾角由 45° 增大到 60° , 介质 1 中渡越辐射能谱密度峰值从 $1.460 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{s} / \text{m}$ 减小至 $1.320 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{s} / \text{m}$, 介质 2 中渡越辐射能谱密度峰值从 $2.780 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{s} / \text{m}$ 增大至 $1.006 \times 10^{-2} \text{ J} \cdot \text{s} / \text{m}$. 界面倾角为钝角情况下, 介质 1 中应变能谱密度峰值显著大于介质 2. 将渡越辐射能谱密度分布对频率积分可得到介质中向无限远处传播的渡越辐射能, 界面倾角为锐角情况下, 两侧介质中渡越辐射能均随

界面倾斜角度单调增大,且介质2中渡越辐射能始终大于介质1中渡越辐射能.

图9中为界面倾角为锐角情况下渡越辐射能对总能量场贡献随界面倾斜角度的变化规律.随着界面倾斜角度的增大,两侧介质中渡越辐射能对总能量场做出的贡献均单调非线性增大.界面倾角为锐角情况下,界面倾斜角度的增大对两侧介质中渡越辐射能贡献相对大小关系没有显著影响.界面为垂直情况下,两侧介质中渡越辐射能对总能量场做出的贡献的相对关系主要受到两侧介质刚度相对大小的影响.垂直界面情况下两侧介质中渡越辐射能的差异远大于倾斜界面情况,其中刚度较小介质(介质2)中渡越辐射能对总能量场做出的贡献大于倾斜界面情况,刚度较大介质中渡越辐射能对总能量场做出的贡献小于倾斜界面情况.界面倾角由锐角变为钝角,介质1中渡越辐射能贡献大于介质2.对于高速铁路路桥过渡段设计而言,这一结果表明过渡段界面的倾斜有利于减小基础刚度差异所导致的系统动力响应.

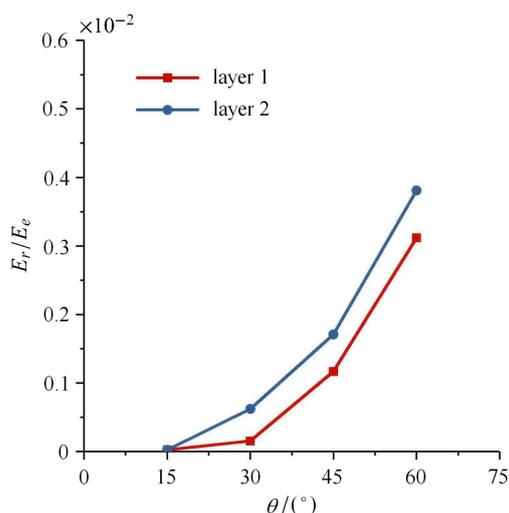


图9 渡越辐射能与本征场应变能比值随界面倾斜角度变化规律

Fig. 9 Transition radiation energy normalized by the eigenfield energy versus interface inclination angle

3 界面附近近场应变能密度计算结果

将两介质界面附近范围内的应变能定义为近场能量,该范围内自由场和本征场仍存在叠加,故需要考虑总的位移和应力场.该部分能量计算结果主要用于评估应变能的方向性和自由场在总场中的占比.因此,选取图10中的半圆形闭合面进行

分析,本节计算中闭合面半径 R 均选取为介质层厚度 L 的 $1/4$,即 6.25 m ,其他计算参数与2.1节中相同.本节中计算得到的介质1中近场应变能均为负值,表明能量由闭合面外侧向闭合面内侧流动,这是由于近场能流密度中本征场能流密度占支配比例,而载荷由介质1向介质2移动,本征场能量由介质1向界面处再向介质2方向传递,因此介质1中能流密度指向闭合面内侧,介质2中指向闭合面外侧.

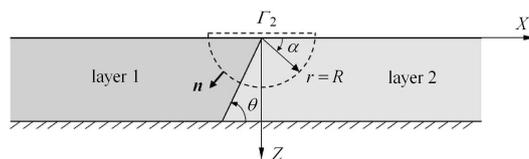
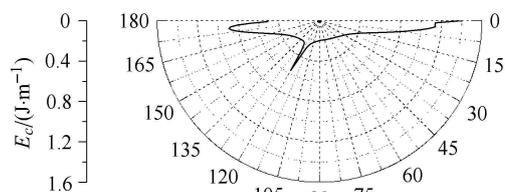


图10 界面附近近场应变能通量计算闭合面

Fig. 10 Enclosing surface for accessing the energy flux close to the interface

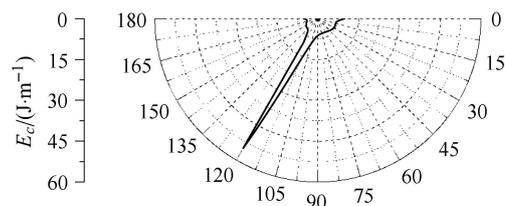
3.1 载荷移动速度对近场应变能密度的影响

载荷移动速度对近场能量密度的方向性具有显著影响.图11中为载荷移动速度分别为20 m/s和90 m/s时的近场能量密度分布.由图可知,载荷移动速度较小时,界面向主要向 x 轴两侧方向传播能



(a) 载荷移动速度为 20 m/s

(a) Load moving velocity at 20 m/s



(b) 载荷移动速度为 90 m/s

(b) Load moving velocity at 90 m/s

图11 近场应变能角密度随载荷移动速度变化规律

Fig. 11 Angular energy density of the near-field with different load moving velocity

量, 载荷移动速度较大时, 沿界面方向传播的能量较大。

近场应变能角密度随载荷移动速度增大单调非线性增大. 与远场能量密度规律相同, 近场应变能角密度在载荷移动速度达到 90 m/s 时也发生了极大增长, 速度为 80 m/s 时的近场应变能角密度最大值仅为速度为 90 m/s 时的 24%。

相较于远场渡越辐射能, 近场应变能角密度在极坐标上的分布随影响因素的变化规律相对不显著, 这是因为在界面附近范围内本征场与自由场仍存在叠加, 体现出的近场应变能不能独立的反映自由场的能量辐射规律. 因此, 有必要计算自由场在近场应变能中所占的比例。

随着载荷移动速度的增大, 自由场在近场应变能中的占比逐渐增大. 速度为 20 m/s 时, 自由场做出的贡献主要沿界面方向, 而速度为 90 m/s 时, 虽然自由场贡献最大方向仍为沿界面方向, 但其他方向自由场贡献均有上升. 载荷移动速度为 90 m/s 时, 介质 1 中自由场对近场应变能密度的贡献显著大于介质 2。

3.2 界面倾斜角度对近场应变能密度的影响

界面倾斜角度显著影响了近场应变能密度在角度上的分布规律. 图 12 及图 13 中不同界面倾角的模型均在极坐标系中沿两介质界面方向的角度上出现尖点, 这一结果表明最大近场应变能角密度均发生在介质界面方向上, 即近场应变能中较大一部分能量是沿着两介质界面方向传播的, 在介质界面位置通过两介质之间的能量传播平衡了移动载荷在不同介质中的能量差. 介质 1 中近场应变能密度随介质倾角无明显变化规律, 但介质 2 中存在介质倾角越大, 近场应变能密度越大的规律. 与远场渡越辐射能规律不同, 近场应变能角密度最大值并不随介质

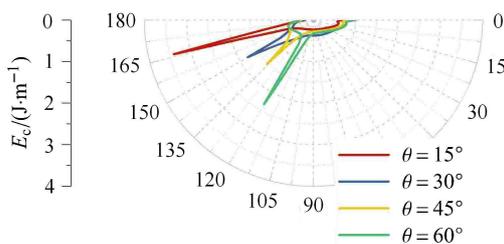


图 12 近场应变能角密度随界面倾斜角度变化规律

Fig. 12 Angular energy density of the near-field with different interface inclination angle

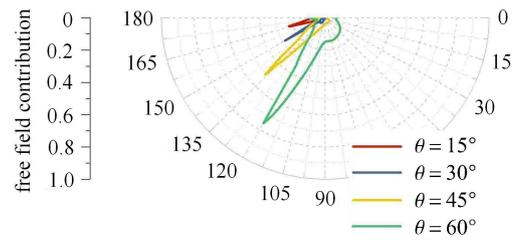


图 13 近场应变能角密度中自由场贡献比例随界面倾斜角度变化规律

Fig. 13 Free field contribution of near-field angular energy density with different interface inclination angle

倾角增大而单调增大, 这可能是对于界面倾角为 15° 和 30° 的情况, 界面距离自由表面距离较近, 本征场在这一范围内做出了较大贡献。

自由场占近场应变能角密度比例在极坐标上的分布规律也与这一解释相符, 图中不同界面倾角情况下仍为沿界面方向自由场占比最大, 但最大值随界面倾角的增大单调增大, 这意味着界面倾角为 15° 情况下沿界面方向出现的能通量峰值主要由本征场贡献。

4 结论

本文提出了倾斜界面耦合弹性层渡越辐射能分析模型, 将介质中的动力响应场分解为本征场和自由场两个部分, 对自由场波动方程采用分离变量法求解, 得到了本征场和自由场位移应力表达式. 通过半解析计算得到了不同影响因素对介质中渡越辐射能流密度的影响规律:

(1) 随着载荷移动速度的增大, 渡越辐射能单调非线性增大, 接近临界速度时 (约为临界速度 74%) 甚至超过本征场应变能. 界面倾角增大, 渡越辐射能单调非线性增大. 界面与刚性基础夹角为锐角侧集中了更多的渡越辐射能。

(2) 随着载荷移动速度增大, 界面附近能通量的方向性发生变化, 沿界面方向传播的能量逐渐增大. 载荷移动速度接近临界速度时界面附近能通量角密度发生极大增长. 随着界面倾斜角度增大, 界面附近能通量并非单调增大, 但自由场占比是单调增大的。

可以认为现行的高速铁路路桥过渡段设置能够在一定程度上起到减小系统动力响应的作用, 但当行车速度接近基础结构临界速度时, 不同结构之间的刚度差异将对系统动力响应起到极大的放大作用. 在高速铁路列车不断提速的背景下, 为保证行车安

全性和乘客舒适性,有必要对过渡段结构设计做出优化。

本文将高速铁路列车简化为一个匀速移动的点载荷,考虑列车实际载荷形式及轨道结构对载荷的分散作用,列车经过过渡段的物理模型可简化为在一定范围内分布的多个点载荷,以一定的时间差经过两种介质之间的界面,多个载荷激发出的渡越辐射场也存在相应的相位差,其叠加所产生的渡越辐射场仍有待进一步研究,计算时需对多个载荷的本征场进行叠加,进而求得在多载荷条件下界面处的自由场激励源。

参 考 文 献

- Ginzburg VL, Frank IM. Radiation of a uniformly moving electron due to its transition from one medium into another. *Journal of Physics*, 1945, 9: 353-362
- Ginzburg VL. Transition radiation and transition scattering. *Physica Scripta*, 1982, T2A: 182-191
- Frank IM. Reviews of topical problems: Transition radiation and optical properties of matter. *Soviet Physics Uspekhi*, 1966, 8(5): 729-742
- Burtyka MV, Yakovenko VM. Transition radiation of surface acoustic waves in piezocrystals. *Solid State Communications*, 1978, 25(8): 591-592
- Vesnitskii AI, Metrikin AV. Transition radiation in mechanics. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 1996, 166(10): 1043-1068
- 盛昌建. 电子注射励石墨烯表面等离子体波产生渡越辐射的研究. [硕士学位论文]. 成都: 电子科技大学, 2018 (Sheng Changjian. Electron-injection stimulated graphene surface plasmon wave to generate the transition radiation. [Master Thesis]. Chengdu: University of electronic science and technology of China, 2018 (in Chinese))
- 边宇. 基于相干渡越辐射的亚皮秒级电子束长测量研究. [博士学位论文]. 上海: 中国科学院大学(中国科学院上海应用物理研究所), 2017 (Bian Yu. Sub-picosecond electron bunch length measurements using coherent transition radiation at SXFEL. [PhD Thesis]. Shanghai: University of Chinese Academy of Science (Shanghai Institute of Applied Physics), 2017 (in Chinese))
- 边宇, 张文艳, 刘波等. 基于相干渡越辐射的束团长度测量研究. 核技术, 2017, 40(1): 10-15 (Bian Yu, Zhang Wenyan, Liu Bo, et al. Measurement study of electron bunch length based on the coherent transition radiation. *Nuclear Techniques*, 2017, 40(1): 10-15 (in Chinese))
- 王毅, 李勤, 代志勇. 光学渡越辐射电子束发散角二维拟合数值分析. 强激光与粒子束, 2017, 29(8): 136-140 (Wang Yi, Li Qin, Dai Zhiyong. Numerical analysis of two-dimensional fitting of the electron beam divergence angle in optical transition radiation. *High Power Laser and Particle Beams*, 2017, 29(8): 136-140 (in Chinese))
- 李泉凤, 张云凯, 杜泰斌. 低能段的光学渡越辐射. 清华大学学报(自然科学版), 1999(10): 69-73 (Li Quanfeng, Zhang Yunkai, Du Taibin. Optical transition radiation in low energy region. *Journal of Tsinghua University(Science and Technology)*, 1999(10): 69-73 (in Chinese))
- 杨国君, 刘承俊, 林郁正等. 利用光学渡越辐射进行强流束诊断. 强激光与粒子束, 2004(9): 1215-1218 (Yang Guojun, Liu Chengjun, Lin Yuzheng, et al. Research of optical transition radiation on intense electron-beam diagnostics. *High Power Laser and Particle Beams*, 2004(9): 1215-1218 (in Chinese))
- 杨国君, 张卓, 陈思富等. 渡越辐射在强流电子束诊断中的应用. 高能物理与核物理, 2005(3): 305-311 (Yang Guojun, Zhang Zhou, Chen Sifu. Research of transition radiation on intense electron beam diagnostics. *High Energy Physics and Nuclear Physics*, 2005(3): 305-311 (in Chinese))
- Vesnitskii AI, Metrikin AV. Transition radiation in one-dimensional elastic systems. *Journal of Applied Mechanics & Technical Physics*, 1992, 33(2): 202-207
- von Dalen KN, Metrikine A V. Transition radiation of elastic waves at the interface of two elastic half-planes. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 310(3): 702-717
- von Dalen KN, Tsouvalas A, Metrikine AV, et al. Transition radiation excited by a surface load that moves over the interface of two elastic layers. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, 73-74: 99-112
- 律文田, 王永和. 秦沈客运专线路桥过渡段路基应力测试分析. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(3): 500-504 (Lu wentian, Wang yonghe. Dynamic stress analysis of subgrade-bridge transition section of qinshen railway. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, 23(3): 500-504 (in Chinese))
- 陈虎. 高速铁路无砟轨道路堤地基差异沉降传递规律及过渡段动力学试验研究. [博士学位论文]. 成都: 西南交通大学, 2013 (Chen Hu. Study on transfer behavior of embankment foundation differential settlement and bridge/approach location dynamic experiment of high-speed railway. [PhD Thesis]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2013 (in Chinese))
- 马伟斌, 韩自力, 朱忠林. 高速铁路路桥过渡段振动特性试验研究. 岩土工程学报, 2009, 31(1): 124-128 (Ma Weibin, Han Zili, Zhu Zhonglin. Vibration characteristics of high speed railway's bridge-subgrade transition section. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, 31(1): 124-128 (in Chinese))
- 屈畅姿. 高速铁路相邻过渡段路基响应及长期动力稳定性研究. [博士学位论文]. 长沙: 中南大学, 2013 (Qu Changzi. Dynamic response and long-term dynamic stability of closely spaced transition sections subgrade for high-speed railway. [PhD Thesis]. Changsha: Zhongnan University, 2013 (in Chinese))
- Coelho B, Hölscher P, Priest J, et al. An assessment of transition zone performance. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 2011, 225(2): 129-139
- Connolly DP, Kouroussis G, Woodward PK, et al. Field testing and analysis of high speed rail vibrations. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2014, 67: 102-118
- Mottahed J, Zakeri JA, Mohammadzadeh S. A field investigation on the effects of using USPs in transition zone from ballasted track to bridges. *International Journal of Civil Engineering*, 2019, 17(9A):

- 1421-1431
- 23 翟婉明. 车辆-轨道耦合动力学(第四版). 北京: 科学出版社, 2015 (Zhai, Wanming. *Vehicle-Track Coupled Dynamics (Fourth Edition)*. Beijing: Science Press, 2015 (in Chinese))
- 24 罗强. 高速铁路路桥过渡段动力学特性分析及工程试验研究. [博士论文]. 成都: 西南交通大学, 2003 (Luo Qiang. *Dynamic performance analyses and experiment study on bridge/approach embankment of high-speed railway*. [PhD Thesis]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2003 (in Chinese))
- 25 Lei X, Mao L. Dynamic response analyses of vehicle and track coupled system on track transition of conventional high speed railway. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 271: 1133-1146
- 26 Varandas JN, Hölscher P, Silva MAG. Dynamic behavior of railway tracks on transitions zones. *Computers and Structures*, 2011, 89: 1468-1479
- 27 Shan Y, Albers B, Zhou SH, et al. Investigation on the sensitive and insensitive zones of the rail support stiffness for the dynamic response of a vehicle system under low excitation frequencies. *Vehicle System Dynamics*, 2017, 55(1): 23-40
- 28 Sheng X, Jones CJC, Petyt M. Ground vibration generated by a load moving along a railway track. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 228 (1): 129-156
- 29 Wilk ST. Mitigation of differential movements at railroad bridge transition zones. [PhD Thesis]. Illinois: University of Illinois at Urbana-Champaign, 2017
- 30 Shan Y, Albers B, Savidis SA. Influence of different transition zones on the dynamic response of track-subgrade systems. *Computers and Geotechnics*, 2013, 48: 21-28
- 31 Varandas JN, Hölscher P, Silva G. Three-dimensional track-ballast interaction model for the study of a culvert transition. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2016, 89: 116-127
- 32 Hu P, Zhang CS, Wen S, et al. Dynamic responses of high-speed railway transition zone with various subgrade fillings. *Computers and Geotechnics*, 2019, 108: 17-26
- 33 Steenbergen, Michael JMM. Physics of railroad degradation: The role of a varying dynamic stiffness and transition radiation processes. *Computers and Structures*, 2013, 124: 102-111
- 34 律文田, 王永和. 秦沈客运专线路桥过渡段路基动应力测试分析. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(3): 500-504 (Lu wentian, Wang yonghe. *Dynamic stress analysis of subgrade-bridge transition section of qinshen railway*. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, 23(3): 500-504 (in Chinese))
- 35 马文涛. 二维弹性力学问题的光滑无网格伽辽金法. 力学学报, 2018, 50(5): 1115-1124 (Ma Wentao. *A smoothed meshfree Galekin method for 2D elasticity problem*. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(5): 1115-1124 (in Chinese))
- 36 侯淑娟, 梁慧妍, 汪全中等. 基于迭代法的非线性弹性均质化研究. 力学学报, 2018, 50(4): 837-846 (Hou Shujuan, Liang Huiyan, Wang Quanzhong, et al. *Study on nonlinear elastic homogenization with iterative method*. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(4): 837-846 (in Chinese))
- 37 李伟华, 夏佩林, 张奎等. 成层饱和介质平面波斜入射问题的一维化时域方法. 力学学报, 2018, 50(2): 349-361 (Li Weihua, Xia Peilin, Zhang Kui, et al. *One-dimensional time-domain method for free field in layered saturated poroelastic media by plane wave oblique incidence*. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(2): 349-361 (in Chinese))