

复合柔性结构全局模态函数提取与 状态空间模型构建¹⁾

魏 进* 曹登庆^{†,2)} 于 涛*

* (烟台大学机电汽车工程学院, 山东烟台 264005)

[†] (哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001)

摘要 随着航空航天等领域中实际工程结构的大型化和柔性化, 结构的非线性振动和主动振动控制问题越来越凸显. 分析和处理此类结构出现的复杂振动问题的关键在于建立系统的非线性动力学模型与状态空间模型. 对于由柔性部件、刚体、连接部件构成的复合柔性结构, 由于各部件之间的振动耦合效应, 单个柔性部件在悬臂、简支和自由等静定边界下的模态与结构的真实模态有较大差异. 为此, 本文提出复合柔性结构全局模态的解析提取方法, 通过全局模态离散得到系统非线性动力学模型, 从而构建状态空间模型. 该方法采用笛卡尔坐标描述系统的运动, 建立系统的运动方程; 结合描述柔性部件的偏微分方程、刚体的常微分运动方程、连接界面处力、力矩、位移和转角的匹配条件以及系统的边界条件, 利用分离变量法给出统一形式的频率方程, 获取系统的固有频率和解析函数表征的全局模态. 这里提出的全局模态提取方法不仅便于复合柔性结构固有频率和全局模态的参数化分析, 而且为建立复合柔性结构低维非线性动力学模型和状态空间模型提供了有效的途径, 对于推进这类结构的非线性动力学分析与主动振动控制研究具有重要意义.

关键词 柔性结构, 全局模态, 解析方法, 非线性动力学, 振动控制

中图分类号: TB122 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-18-356

EXTRACTION OF GLOBAL MODE FUNCTIONS AND CONSTRUCTION OF STATE SPACE MODEL FOR A COMPOSITE FLEXIBLE STRUCTURE¹⁾

Wei Jin* Cao Dengqing^{†,2)} Yu Tao*

**(School of Electromechanical and Automotive Engineering, Yantai University, Yantai 264005, Shandong, China)*

[†](School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract With the scale enlarging and flexibility of the actual engineering structures utilized in aerospace and other fields, the issues on the study of nonlinear vibration and active vibration control of the structure become more and more important. The key process of dealing with the vibration and control for such a kind of structure is to establish the nonlinear dynamic model and formulate the state space model of the system. For composite flexible structures composed of flexible components, rigid bodies and flexible joints, because of the vibration coupling between each part of the structure, the modes of an individual flexible component with the cantilever, simply supported and free stationary boundary are different from the real mode of the structure. In this paper, an analytic extraction method of global modes of composite flexible

2018-10-28 收稿, 2019-02-01 录用, 2019-02-01 网络版发表.

1) 国家自然科学基金重点项目资助 (11732005).

2) 曹登庆, 教授, 主要研究方向: 结构动力学与振动控制. E-mail: dqcao@hit.edu.cn

引用格式: 魏进, 曹登庆, 于涛. 复合柔性结构全局模态函数提取与状态空间模型构建. 力学学报, 2019, 51(2): 341-353

Wei Jin, Cao Dengqing, Yu Tao. Extraction of global mode functions and construction of state space model for a composite flexible structure. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(2): 341-353

structures is presented, and the nonlinear dynamic model and the state-space model of the system can be obtained by the global mode discretization. Adopting the Cartesian coordinates to describe the motion of the system, establishing the motion equations of the system, and combining with the partial differential equation of the flexible part, the ordinary differential motion equation of the rigid body, the matching condition of force, moment, slope of the deflection curve and displacement at the interface, and the boundary condition of the system, the frequency equation of uniform form is given by using the separating variable method. Consequently, the natural frequencies and the global mode representation of the analytic function of the system are obtained. The global mode extraction method presented here not only facilitates the parametric analysis of the natural frequencies and global modes of composite flexible structures, but also provides an effective way to establish the low dimensional nonlinear dynamic model and the state space model of the composite flexible structure, which is of great significance for the study of nonlinear dynamic responses and the design of active vibration control of this kind of structures.

Key words flexible structures, global modes, analytic method, nonlinear dynamics, vibration control

引 言

复合柔性结构是由多个柔性部件(包括细长杆、薄板、薄壳等)、刚体以某种方式相联接而构成的多体系统.在航空航天^[1]、机械^[2]、土木^[3]等工程领域中,诸如带太阳能帆板的空间飞行器、带外挂(飞机发动机)的飞机机翼、带细长叶片的大型旋转机械、大跨度斜拉桥等都可以归结为复合柔性结构.随着空间科学与技术的不断进步与发展,柔性部件的大型化和柔性化不可避免,整个柔性结构的动力学建模与振动响应分析、结构振动控制等问题变得愈加复杂且难以处理^[4].

对于复合柔性结构,构成部件多为具有无限自由度的柔性体,描述其运动的动力学方程为偏微分方程.无论是对系统的动力学特性进行分析,还是基于其动力学模型的状态空间进行控制器设计,都要建立具有有限自由度的动力学模型.实际工程应用中,通常采用有限元法对复杂结构进行离散化处理,只有在结构相对简单(包括单一的索、杆、梁、板、壳等)时才采用解析方法建模.

有限元法可以离散具有复杂形状的复合柔性结构,在单元数量足够多的情况下,有限元模型所得到的结果可以达到较高的精度.因此,许多学者^[5-9]采用有限元法,建立系统的有限元模型,进行动力学特性的分析和研究.例如,Al-Bedoor等^[7]建立了含有柔性关节的柔性机械臂的有限元模型,并开展了柔性关节的扭转变形对于系统动力学的影响研究.采用有限元商业软件(如Ansys、Abaqus、Nastran等)建模,也是分析复合柔性结构固有特性的有效途径^[10-13].例如,代颖等^[12]采用软件Ansys建立了车

用电机的有限元模型,分析了各结构部件对电机固有特性的影响.然而,有限元模型为了保证其精度,需要较多的单元数,导致系统的离散动力学模型出现维数过高的弊端,这为系统的控制器设计或非线性动态响应分析带来了困难;并且由有限元商业软件得到的系统全局模态是以数值形式给出的,对于存在非线性环节的复合结构,很难建立解析形式的非线性动力学模型.

相比于有限元离散方法,采用解析形式的模态函数导出复合柔性结构的模态方程,利用Galerkin截断可以有效地降低系统的维数^[14],从而明显地提高求解系统动力学模型的计算效率.因此,解析方法在多刚柔体系统动力学中得到了广泛的应用,尤其是在柔性航天器^[15-18]的动力学建模与控制器设计.解析方法的关键在于将柔性部件的位移表示为部件模态与模态坐标的线性组合,所建立的动力学模型的准确性依赖于所选模态的精确性和数量,也即所选模态越能准确地描述柔性部件的真实变形,其需要的模态数量就越少,同时所推导出的动力学模型的准确性也越高.Pan和Liu^[19]通过钟摆和曲柄连杆机构的数例仿真结果,表明了边界为两端自由、简支或悬臂的振型函数适合于柔性多体系统的建模,能得到较好的结果.但是,采用两端固支或具有超静定边界的振型函数可能导致系统动力学方程的计算结果出现较为严重的误差.Schwertassek等^[20]通过结合柔性附件的静变形和特征函数,构造出合适的振型函数用于描述柔性体的变形,从而提高系统动力学模型的准确性和收敛性.

对于由多个柔性部件组成的复合结构,各柔性

部件之间的弹性振动耦合效应不可忽略. 系统中单一柔性部件在悬臂、简支和自由等静定边界下的模态与其在整体结构中的真实模态有较大差异. 采用柔性部件的假设模态建模, 可能会导致其动力学模型精度下降, 甚至出现较大误差. 为此, 针对由中心刚体和柔性附件组成的航天器, Hablani^[21] 指出, 如果选取相同数量的模态, 全局模态所得到的动力学模型比假设模态得到的模型具有更高的精度. 这是因为全局模态包含了系统中刚体的运动和全部柔性部件弹性振动的模态, 选取少量的全局模态就能较好地描述系统的运动. 针对空间柔性机械臂系统, 魏进等^[22] 分别采用假设模态和全局模态建立了系统的动力学模型, 并对两种模型进行了对比研究. 将有限元结果作为参考值, 对比分析的结果表明全局模态方法所得结果的精度远高于假设模态方法给出的结果.

鉴于采用全局模态进行离散具有优越性, 已有一些学者通过全局模态离散, 得到复合柔性结构的动力学离散模型. 针对索-梁组合结构, Gattulli 等^[23-24]、赵跃宇等^[25-26] 和王志攀等^[27-28] 利用边界条件和连接点的匹配条件, 获取系统的固有频率和全局模态, 通过全局模态进行离散, 建立了系统的动力学离散模型. Hablani 等^[29-31] 采用系统的全局模态, 建立了柔性航天器的动力学模型, 并在此基础上对其动力学特性分析以及控制作了比较全面的研究. 曲广吉^[32] 和繆炳祺等^[33-34] 通过求解系统的特征值问题或模态综合等方法, 得到系统的全局模态, 离散柔性部件的位移, 由此基于伪坐标的拉格朗日方程导出了柔性航天器的动力学方程.

由此可见, 建立系统低维高精度动力学模型的关键在于如何获取系统的全局模态. 近年来, 曹登庆等针对微机电系统中的静电梳^[35]、大跨度斜拉桥^[36]、带非线性铰链的多梁结构^[37]、带柔性附件的航天器^[38] 等细长柔性组合结构, 建立了系统的动力学模型, 获取了系统的全局模态. 在此基础上, 开展了密频与重频分析以及模态跃迁、系统动态响应分析等一系列研究. 这些工作对于如何获取系统的全局模态, 据此推导出系统的低维高精度动力学模型具有一定的借鉴和指导意义.

基于作者近期的工作^[35-38], 本文研究多个刚体和柔体组成的复合柔性结构, 建立了提取这类结构的解析形式的全局模态函数的一般方法. 采用解析形式的模态函数导出复合柔性结构的模态方程, 利

用 Galerkin 截断可以有效地降低系统的维数, 得到系统的低维高精度非线性动力学模型. 基于该模型可以方便地构建系统的低维状态空间模型, 有利于主动振动控制器的设计.

1 复合柔性结构全局模态解析提取方法

1.1 定义坐标系

采用笛卡尔坐标描述系统的运动, 一般以系统中每一个物体为单元, 在刚体、柔性部件和连接部件上建立坐标系, 其上每个部件的位形都相对于一个公共参考系进行定义, 其位形坐标统一为笛卡尔坐标. 如图 1 所示, 在系统中第 i 个物体和第 j 个物体的质心上分别建立各自的坐标系为 o_ixyz 和 o_jxyz , 坐标系 $OXYZ$ 为公共参考系. 这样, 物体上任意一点 P_i 和 P_j 的位置矢量分别为 γ_i 和 γ_j .

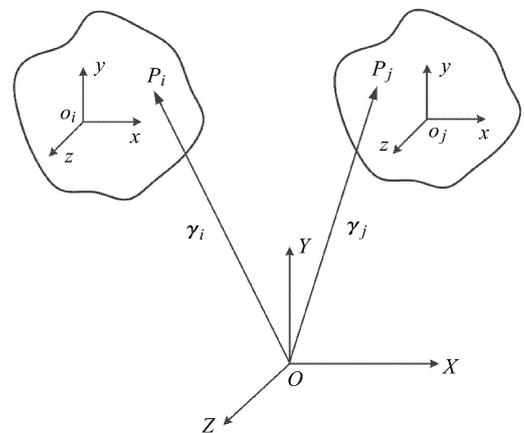


图 1 基于笛卡尔坐标的运动描述

Fig. 1 Motion description based on Descartes coordinates

1.2 系统的运动方程

对于由多个刚体和柔体组成的复合柔性结构中的刚体, 采用牛顿-欧拉法建立动力学方程. 在系统的 g 个刚体中取刚体 A_i ($i = 1, 2, \dots, g$) 为研究对象, 它不仅受到系统构件相互之间的作用力和力矩, 也可能受到外部的作用力和力矩.

如图 2 所示, 只考虑系统的平面运动, 在刚体 A_i 的质心上建立坐标系, 并命名为 o_i^*xy . 在连接点 $S_{i,i-1}$ 处, 相邻物体作用在刚体 A_i 的力 $f_{x,int}^{i,i-1}$ 和 $f_{y,int}^{i,i-1}$ 分别沿坐标系 o_i^*xy 的 x 方向和 y 方向, 力矩为 $M_{int}^{i,i-1}$. 在连接点 $S_{i+1,i}$ 处, 相邻物体作用在刚体 A_i 的力 $f_{x,int}^{i+1,i}$ 和 $f_{y,int}^{i+1,i}$ 分别沿坐标系 o_i^*xy 的 x 方向和 y 方向, 力矩为 $M_{int}^{i+1,i}$. 刚体 A_i 受到的外部作用力 $f_{x,ext}^i$ 和 $f_{y,ext}^i$ 分别沿坐标系 o_i^*xy 的 x 方向和 y 方向, 外部力矩为

M_{ext}^i . 因此, 在连接点 $S_{i,i-1}$ 和 $S_{i+1,i}$ 上, 相邻物体作用在刚体 A_i 的总力矩为

$$M_{i,int} = M_{int}^{i,i-1} + M_{int}^{i+1,i} + \mathbf{d}_{i,i-1} \cdot (f_{x,int}^{i,i-1} \mathbf{i} + f_{y,int}^{i,i-1} \mathbf{j}) + \mathbf{d}_{i+1,i} \cdot (f_{x,int}^{i+1,i} \mathbf{i} + f_{y,int}^{i+1,i} \mathbf{j}) \quad (1)$$

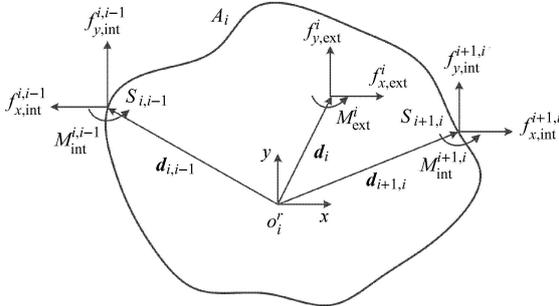


图 2 刚体所承受的作用力和力矩

Fig. 2 Forces and moments acted on the rigid body

其中, $\mathbf{d}_{i,i-1}$ 和 $\mathbf{d}_{i+1,i}$ 分别是连接点 $S_{i,i-1}$ 和 $S_{i+1,i}$ 的作用力到刚体 A_i 的质量中心的矢量, \mathbf{i} 和 \mathbf{j} 分别为沿 x 方向和 y 方向的单位矢量. 刚体 A_i 受到外部作用的总力矩为

$$M_{i,ext} = M_{ext}^i + \mathbf{d}_i \cdot (f_{x,ext}^i \mathbf{i} + f_{y,ext}^i \mathbf{j}) \quad (2)$$

其中, \mathbf{d}_i 为刚体 A_i 受到的外部作用力到其质量中心的矢量.

通过牛顿-欧拉法, 可以写出单个刚体 A_i 的动力学方程

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{x}_i^r + f_{x,int}^{i,i-1} + f_{x,int}^{i+1,i} &= f_{x,ext}^i \\ m_i \ddot{y}_i^r + f_{y,int}^{i,i-1} + f_{y,int}^{i+1,i} &= f_{y,ext}^i \\ J_i \ddot{\theta}_i^r + M_{i,int} &= M_{i,ext} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中, m_i 和 J_i 分别为刚体 A_i 的质量和关于质心 o_i^r 的转动惯量, x_i^r 和 y_i^r 分别为刚体 A_i 沿坐标系 $o_i^r xy$ 的 x 方向和 y 方向的坐标, θ_i^r 为刚体 A_i 的绕质心 o_i^r 转动角位移. 因此, 刚体 A_i 的平动和转动可以用向量 $\boldsymbol{\gamma}_i^r = [x_i^r, y_i^r, \theta_i^r]^T$ 来描述.

在复合柔性结构中, 柔体具有连续分布的质量和弹性, 且有无限多个自由度, 其动力学方程为偏微分方程. 为了求解系统的固有频率和全局模态, 需要确定系统的边界条件和相邻物体之间的力、力矩、位移和转角的匹配条件. 由图 3 描述的相邻两个柔体 B_i 和 B_{i+1} , 它们通过 $\boldsymbol{\gamma}_i^d$ 向量连接在一起. 在柔体 B_i 和 B_{i+1} 上分别建立浮动坐标系, 并命名为 $o_i^f xy$

和 $o_{i+1}^f xy$. 在连接点 $S_{i,i-1}$ 处, 柔体 B_{i+1} 作用在 B_i 的力和力矩分别为 $f_{i,i-1}$ 和 $M_{i,i-1}$. 同样地, 在连接点 $S_{i+1,i}$ 处, 柔体 B_i 作用在 B_{i+1} 的力和力矩分别为 $f_{i+1,i}$ 和 $M_{i+1,i}$. 在柔体的连接点 $S_{i,i-1}$ 和 $S_{i+1,i}$ 处, 柔体的矢量 $\boldsymbol{\gamma}_i^f$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_{i+1}^f$ 必须满足约束条件

$$\boldsymbol{\gamma}_i^f + \boldsymbol{\gamma}_i^d = \boldsymbol{\gamma}_{i+1}^f \quad (4)$$

如图 3 所示, 当两个柔体 B_i 和 B_{i+1} 为刚性连接时, 连接向量满足

$$\boldsymbol{\gamma}_i^d = \mathbf{0} \quad (5)$$

亦即

$$\boldsymbol{\gamma}_i^f = \boldsymbol{\gamma}_{i+1}^f \quad (6)$$

两个柔体 B_i 和 B_{i+1} 相互之间的力和力矩也应满足关系式

$$\mathbf{f}_{i,i-1} = \mathbf{f}_{i+1,i}, \quad M_{i,i-1} = M_{i+1,i} \quad (7)$$

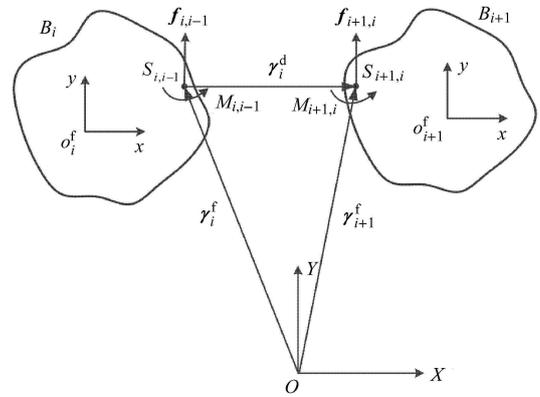


图 3 刚性连接相邻柔体的约束关系

Fig. 3 Constraint relationship of rigid connecting deformable bodies

如图 4 所示, 当两个柔体 B_i 和 B_{i+1} 为弹性连接时, 连接向量 $\boldsymbol{\gamma}_i^d \neq \mathbf{0}$, 且连接向量 $\boldsymbol{\gamma}_i^d$ 为弹性连接结构 C_i 的变形向量. 此时, 弹性连接结构所受到的作用力 f_i 和力矩 M_i 可由自身的弹簧和线性阻尼构成的无质量系统来表达, 即

$$\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} k_{i,1} x_i^d + c_{i,1} \dot{x}_i^d \\ k_{i,2} y_i^d + c_{i,2} \dot{y}_i^d \end{bmatrix}, \quad M_i = k_{i,3} \theta_i^d + c_{i,d} \dot{\theta}_i^d \quad (8)$$

其中, x_i^d, y_i^d 和 θ_i^d 分别为连接结构变形向量 $\boldsymbol{\gamma}_i^d$ 的水平位移, 垂直位移和转动角位移, 其相对应方向的弹簧刚度系数为 $k_{i,1}, k_{i,2}$ 和 $k_{i,3}$, 阻尼系数为 $c_{i,1}, c_{i,2}$ 和 $c_{i,3}$. 连接结构的变形向量 $\boldsymbol{\gamma}_i^d$ 可以表示为 $\boldsymbol{\gamma}_i^d = [x_i^d, y_i^d, \theta_i^d]^T$.

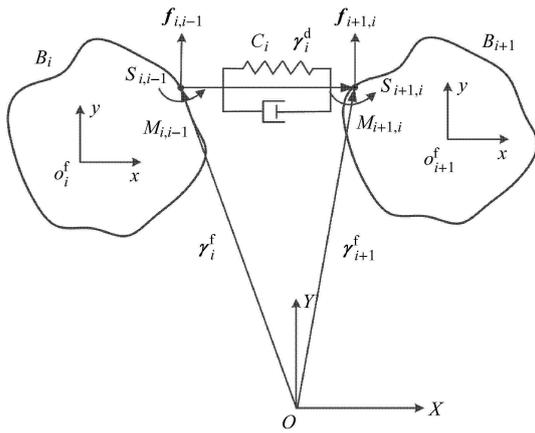


图 4 弹性连接相邻柔体的约束关系

Fig. 4 Constraint relationship of elastic connection deformable bodies

两个柔体在连接点 $S_{i,i-1}$ 和 $S_{i+1,i}$ 的矢量 γ_i^f 和 γ_{i+1}^f 满足的约束条件为

$$\gamma_i^d = \gamma_{i+1}^f - \gamma_i^f \quad (9)$$

两个柔体 B_i 和 B_{i+1} 相互之间的力和力矩也应满足关系式

$$f_{i,i-1} = f_i = f_{i+1,i}, \quad M_{i,i-1} = M_i = M_{i+1,i} \quad (10)$$

为了便于理解，以欧拉-伯努利梁作为典型的柔体，推导复合柔性结构中单个柔体的动力学方程。如图 5 所示，在欧拉梁 B_i 的质心建立坐标系 $o_i^f xy$ ，其点 o_i^f 固结在未变形前的梁 B_i 的中心， B_i 的长度为 $2l$ 。梁 B_i 上任一点的变形向量为 u_i 。由于只考虑梁 B_i 在 y 方向上的运动，变形向量为 $u_i = [0, w_i]$ ， w_i 表示梁 B_i 上任一点在 y 方向上的位移。 B_i 上任一点的位

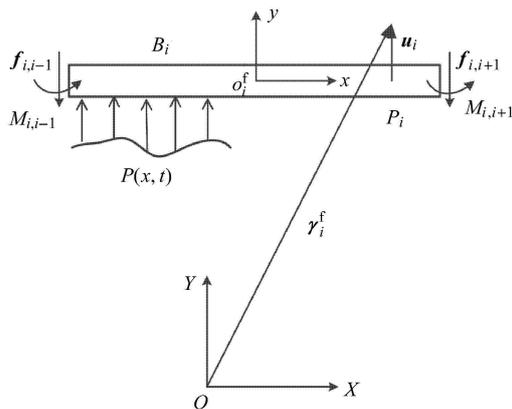


图 5 欧拉-伯努利梁的运动描述

Fig. 5 Motion description of the Euler-Bernoulli beam

置向量为自身的变形向量，可表示为

$$\gamma_i^f = w_i(x, t), \quad x \in [-l, l] \quad (11)$$

根据欧拉-伯努利梁理论，可以得到其运动微分方程为

$$EIw_i'''' + \rho \dot{w}_i = p(x, t) \quad (12)$$

式中， (\cdot) 表示对 x 求导数，梁的弹性模量为 E ，截面惯性矩为 I ，单位长度的质量为 ρ ，梁上各点的运动位移为 w_i ，作用在梁上沿长度方向的分布载荷为 $p(x, t)$ 。

由图 5 所示，在 B_i 的连接点 $S_{i,i-1}$ 和 $S_{i+1,i}$ 的位移分别为 $w_i(-l, t)$ 和 $w_i(l, t)$ 。同样地，在 B_i 的连接点 $S_{i,i-1}$ 和 $S_{i+1,i}$ 的转角分别为 $w_i'(-l, t)$ 和 $w_i'(l, t)$ 。在 B_i 的连接点 $S_{i,i-1}$ 和 $S_{i+1,i}$ 的剪力可表示为

$$f_{i,i-1} = EIw_i'''(-l, t), \quad f_{i+1,i} = EIw_i'''(l, t) \quad (13)$$

在 B_i 的连接点 $S_{i,i-1}$ 和 $S_{i+1,i}$ 的弯矩可表示为

$$M_{i,i-1} = EIw_i''(-l, t), \quad M_{i+1,i} = EIw_i''(l, t) \quad (14)$$

1.3 系统的固有频率和全局模态

对于由多个刚体、柔体和弹性连接结构组成的复合柔性结构，可以简化为 g 个刚体， h 个柔体以及 m 个弹性连接结构。仅考虑系统的平面运动，由 1.2 节给出的系统中各物体的动力学方程，刚体 $A_i (i = 1, 2, \dots, g)$ 的平动和转动用向量 γ_i^r 描述，弹性连接结构 $C_j (j = 1, 2, \dots, h)$ 在平动和转动方向上的变形用向量 γ_j^d 描述，柔体 $B_k (k = 1, 2, \dots, m)$ 上任一点的位移用向量 γ_k^f (即弹性变形向量 u_k) 描述。考虑系统的自由振动，根据系统具有与时间无关的确定振型的特性，可用分离变量法推导系统的特征方程。同时定义系统的各广义坐标以同一频率作谐振动。系统中刚体 A_i ，弹性连接结构 C_j 和柔体 B_k 的广义坐标特解形式为

$$\left. \begin{aligned} \gamma_i^r &= \begin{bmatrix} x_i^r \\ y_i^r \\ \theta_i^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i^r \\ Y_i^r \\ \Theta_i^r \end{bmatrix} \sin(\omega t + \alpha) = A_i^r \sin(\omega t + \alpha) \\ \gamma_j^d &= \begin{bmatrix} x_j^d \\ y_j^d \\ \theta_j^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_j^d \\ Y_j^d \\ \Theta_j^d \end{bmatrix} \sin(\omega t + \alpha) = A_j^d \sin(\omega t + \alpha) \\ \gamma_k^f &= \phi_k \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中， ω 为系统的固有频率。

因为柔体是连续体，其变形是用偏微分方程来描述的，所以柔体 B_k 的振型矢量 ϕ_k ，是与空间位置

有关的函数, 根据柔体的类型不同, 有其不同的形式.

如图 5 所示, 当欧拉梁 B_k 在 y 方向上有位移时, 其描述变形的偏微分方程如式 (12) 所示, 那么描述欧拉梁 B_k 任一点的位置向量 γ_k^f 为自身的位移 $w_k(x, t)$, 其特解表示为

$$\gamma_k^f = w_k(x, t) = \varphi_k(x) \sin(\omega t + \alpha) \quad (16)$$

将式 (16) 代入方程 (12) 的自由振动形式, 可得

$$EI\varphi_k''''(x) - \omega^2\rho\varphi_k(x) = 0 \quad (17)$$

式 (17) 的通解形式可写为

$$\varphi_k(x) = A_k \cos(\beta x) + B_k \sin(\beta x) + C_k \cosh(\beta x) + D_k \sinh(\beta x), \quad x \in [-l, l] \quad (18)$$

其中, $\beta = \left(\frac{\rho\omega^2}{EI}\right)^{1/4}$. 令

$$\psi_k = [A_k, B_k, C_k, D_k]^T \quad (19)$$

将式 (18) 代入梁 B_k 在连接点 $S_{i,i-1}$ 和 $S_{i,i+1}$ 的位移、转角、剪力和弯矩的匹配条件, 将式 (15) 表示刚体运动和连接结构变形的广义坐标特解分别代入刚体的动力学方程 (3) 和弹性连接结构的匹配条件 (10) 可得

$$\mathbf{H}(\omega)\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (20)$$

为了求解系统的固有频率, 需保证方程 (20) 有非零解, 即矩阵 $\mathbf{H}(\omega)$ 的行列式必须等于零. 通过行列式等于零可以解出系统的固有频率, 进而确定 \mathbf{A} 中各项系数. 将关于描述柔体弹性变形的振型函数系数 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ 代入到各自的振型中, 可以得到系统的全局模态.

1.4 系统动力学模型

与多自由度系统的振型叠加法类似, 系统的各个物体的位移响应可以用 N 个模态叠加的形式近似表示. 系统中各个物体的第 s 阶模态振型可表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_{i,s}^r &= [X_{i,s}^r, Y_{i,s}^r, \Theta_{i,s}^r], \quad \mathbf{A}_{j,s}^d = [X_{j,s}^d, Y_{j,s}^d, \Theta_{j,s}^d] \\ \psi_s &= [A_{1,s}^r, \dots, A_{g,s}^r, A_{1,s}^d, \dots, A_{h,s}^d, \phi_{1,s}, \dots, \phi_{m,s}] \\ s &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中, $\mathbf{A}_{i,s}^r$ 和 $\mathbf{A}_{j,s}^d$ 分别为刚体 A_i , 弹性连接结构 C_j 的第 s 阶模态振型, $\phi_{k,s}$ 为柔体 B_k 的第 s 阶模态振型, ψ_s 为系统第 s 阶全局模态振型.

系统中各个物体的位移可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1^r &= \sum_{s=1}^N \mathbf{A}_{1,s}^r q_s(t), \quad \gamma_2^r = \sum_{s=1}^N \mathbf{A}_{2,s}^r q_s(t), \dots, \\ \gamma_g^r &= \sum_{s=1}^N \mathbf{A}_{g,s}^r q_s(t) \\ \gamma_1^d &= \sum_{s=1}^N \mathbf{A}_{1,s}^d q_s(t), \quad \gamma_2^d = \sum_{s=1}^N \mathbf{A}_{2,s}^d q_s(t), \dots, \\ \gamma_h^d &= \sum_{s=1}^N \mathbf{A}_{h,s}^d q_s(t) \\ \mathbf{u}_1 &= \sum_{s=1}^N \phi_{1,s} q_s(t), \quad \mathbf{u}_2 = \sum_{s=1}^N \phi_{2,s} q_s(t), \dots, \\ \mathbf{u}_m &= \sum_{s=1}^N \phi_{m,s} q_s(t) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

将上式代入刚体的运动微分方程 (3), 弹性连接结构的变形表达式 (8), 描述柔体弹性变形的偏微分方程 (例如式 (12)), 然后将刚体的运动微分方程, 描述柔体弹性变形的偏微分方程分别乘以自身的第 n 阶模态, 再将描述柔体弹性变形的偏微分方程进行空间积分, 并利用系统全局模态的正交性关系, 可以得到系统的模态方程为

$$\mathbf{M}_n \ddot{q}_n(t) + \mathbf{K}_n q_n(t) = \mathbf{F}_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (23)$$

式中, \mathbf{M}_n 为第 n 阶模态质量, \mathbf{K}_n 为第 n 阶模态刚度, $\mathbf{F}_n(t)$ 为系统外激励.

2 应用算例

将图 6 所示的铰链连接双梁结构作为应用算例, 图中的结构由两个欧拉-伯努利梁通过铰链连接而成, 右端梁的自由端与刚体刚性连接. 在该应用实例中, 由于支撑平台移动, 系统受到外部激励 $w_s(t)$. 假定各个梁有着相同的截面和材料特性. 同样地, 各个铰链也是有着相同的几何参数和材料特性. 梁的长度为 $2l$, 宽度为 b , 厚度为 h_1 , 单位长度的质量为 ρ , 弹性模量为 E , 截面惯性矩为 I . 分别在第 i 个梁上下表面粘贴一对压电片作为作动器, 压电片的长度为 L , 厚度为 h_2 , 宽度与梁相同, 压电致动器在厚度方向 (即图 6 所示 y 方向) 分别施加输入电压为 $U_i(t)$ 而产生的作动力矩 $\hat{M}_i(x, t)$. θ_i 为描述第 i 个铰链的扭转变形的角位移. m_r 和 J_r 分别为端部刚体的质量和关于质心 o_r 的转动惯量. d 为连接点 S_3 到

刚体质心 o_r 的距离. 令 $o_i^f xy$ 为第 i 个梁的坐标系, 其坐标原点为梁的中心. 令 $o_r xy$ 为端部刚体的坐标系, 其坐标原点为刚体的质心.

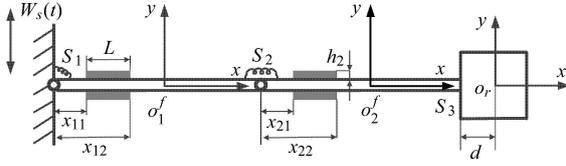


图 6 铰链连接的压电双梁结构

Fig. 6 Piezoelectric multi-beam structure connected with joints

2.1 系统的运动方程

压电作动器在输入电压的作用下对第 i 个梁产生的力矩为^[39]

$$\hat{M}_i(x, t) = CU_i(t) [H(x - x_{i1}) - H(x - x_{i2})], \quad i = 1, 2 \quad (24)$$

式中, $C = bpE(h_1 + h_2)$, $x_{i2} = x_{i1} + L$, p 为压电常数, $H(x)$ 为 Heaviside 阶跃函数.

由欧拉-伯努利梁理论, 图 6 所示的第 i 个梁的运动微分方程为

$$\rho \ddot{w}_i + \xi_a \dot{w}_i + EI w_i'''' + \eta I w_i'''' = \rho \ddot{w}_s(t) + \hat{M}_i''(x, t) \quad (25)$$

其中, w_i 为第 i 个梁的垂向位移, $w_s(t)$ 为支撑平台的运动位移. ξ_a 和 η 分别为梁的外阻尼和内阻尼系数, 并且假定它们分别与其质量和刚度成比例关系, 可以表示为

$$\xi_a = a\rho, \quad \eta = bE \quad (26)$$

将式 (24) 代入方程 (25) 可得

$$\rho \ddot{w}_i + \xi_a \dot{w}_i + EI w_i'''' + \eta I w_i'''' = \rho \ddot{w}_s(t) + CU_i(t) [H(x - x_{i1}) - H(x - x_{i2})]'' \quad (27)$$

又因 $H(x)$ 的广义导数为 $H'(x) = \delta(x)$, $H''(x) = \delta'(x)$, 由此可得

$$\rho \ddot{w}_i + \xi_a \dot{w}_i + EI w_i'''' + \eta I w_i'''' = \rho \ddot{w}_s(t) + CU_i(t) [\delta'(x - x_{i1}) - \delta'(x - x_{i2})] \quad (28)$$

如图 7 所示, 铰链作为弹性连接结构, 可以简化为由非线性弹簧和线性阻尼构成的无质量的单自由度系统. 基于参数识别方法, 铰链传递的扭矩可由其状态来描述^[40]. 此时, 第 i 个铰链传递扭矩的非线性表达式如下

$$M_i^T = c\dot{\theta}_i + k_L\theta_i + k_N\theta_i^3 + \mu \text{sign}\dot{\theta}_i \quad (29)$$

式中, c, k_L, k_N 和 μ 分别为铰链的线性阻尼系数, 线性刚度系数, 三次非线性刚度系数和摩擦力矩系数.

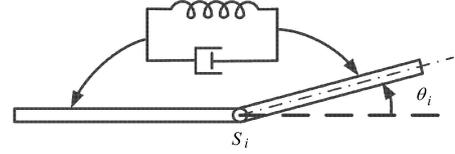
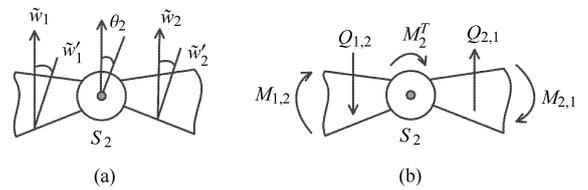


图 7 铰链模型

Fig. 7 The model of the joint

由图 8(a) 所示的铰链 S_2 的几何条件, 相对应的位移和转角可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w}_1 &= w_1(l, t), \quad \tilde{w}_2 = w_2(-l, t) \\ \tilde{w}'_1 &= w'_1(l, t), \quad \tilde{w}'_2 = w'_2(-l, t) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

图 8 铰链 S_2 的 (a) 几何条件 (b) 自然条件Fig. 8 (a) Geometric and (b) natural matching conditions at the joint S_2

如图 8(b) 所示, $Q_{1,2}$ 和 $Q_{2,1}$ 分别为铰链 S_2 两边的剪力, $M_{1,2}$ 和 $M_{2,1}$ 分别为铰链 S_2 两边的弯矩, 它们可以表示为

$$\left. \begin{aligned} Q_{1,2} &= EI w_1'''(l, t), \quad Q_{2,1} = EI w_2'''(-l, t) \\ M_2^T &= M_{1,2} = EI w_1''(l, t), \quad M_2^T = M_{2,1} = EI w_2''(-l, t) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

由图 8 所示的铰链匹配关系, 根据柔体之间满足的位移和转角的匹配条件 (9), 力和力矩的匹配条件 (10), 由式 (30) 和式 (31), 可以得到铰链 S_2 的匹配条件为

$$\left. \begin{aligned} w_1(l, t) &= w_2(-l, t) \\ w'_1(l, t) + \theta_2 &= w'_2(-l, t) \\ EI w_1'''(l, t) &= EI w_2'''(-l, t) \\ EI w_1''(l, t) &= M_2^T = EI w_2''(-l, t) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

如图 9(b) 所示, 端部刚体左边受到连接处 S_3 的力 $Q_{2,3}$ 和力矩 $M_{2,3}$, 它们可以表示为

$$Q_{2,3} = EI w_2'''(l, t), \quad M_{2,3} = EI w_2''(l, t) \quad (33)$$

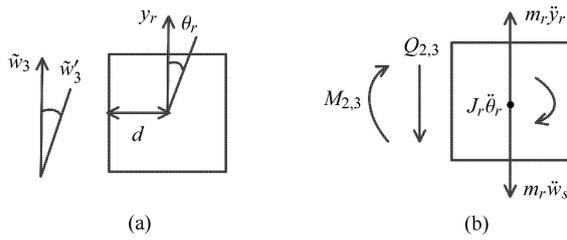


图 9 刚体的 (a) 几何条件 (b) 自然条件

Fig.9 (a) Geometric and (b) natural matching conditions on the rigid body

由式 (33), 根据牛顿 - 欧拉法得到的刚体动力学方程 (3), 基于图 9(b) 所示的力和力矩的平衡关系, 可以得到端部刚体平移和转动的运动方程为

$$m_r \ddot{y}_r + \xi_b \dot{y}_r - EI w_2'''(l, t) = m_r \ddot{w}_s \quad (34)$$

$$J_r \ddot{\theta}_r + \xi_c \dot{\theta}_r + EI w_2''(l, t) - d EI w_2'''(l, t) = 0 \quad (35)$$

式中, ξ_b 和 ξ_c 分别为中心刚体在 y 方向上平移和绕质心 o_r 转动的外阻尼系数, 它们分别表示为

$$\xi_b = a m_r, \quad \xi_c = a J_r \quad (36)$$

如图 9(a) 所示, 端部刚体所对应的位移和转角可以表示为

$$\tilde{w}_3 = w_2(l, t), \quad \tilde{w}_3' = w_2'(l, t) \quad (37)$$

由式 (37), 通过它们之间的位移和转角的匹配关系, 可以得到端部刚体的几何匹配条件

$$y_r = w_2(l, t) - d \theta_r, \quad \theta_r = w_2'(l, t) \quad (38)$$

在铰链 S_1 , 系统的边界条件为

$$w_1(-l, t) = 0, \quad w_1'(-l, t) = \theta_1, \quad EI w_1''(-l, t) = M_1^T \quad (39)$$

2.2 系统的固有频率和全局模式

采用分离变量法, 求解系统特征值问题. 将系统的位移表示为

$$\left. \begin{aligned} w_i(x, t) &= \varphi_i(x) \sin(\omega t + \alpha) \\ \theta_i &= \Theta_i \sin(\omega t + \alpha) \\ y_r &= Y_r \sin(\omega t + \alpha) \\ \theta_r &= \Theta_r \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

式中, ω 为系统的固有频率. 将式 (40) 代入梁的无阻尼自由振动方程 (25) 可得

$$EI \varphi_i''''(x) - \omega^2 \rho \varphi_i(x) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (41)$$

同样地, 将式 (40) 代入系统中铰链 S_2 的匹配条件 (32) 的线性表达式, 得到

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(l) &= \varphi_2(-l) \\ \varphi_1'(l) + \Theta_2 &= \varphi_2'(-l) \\ EI \varphi_1'''(l) &= EI \varphi_2'''(-l) \\ EI \varphi_1''(l) &= k_L \Theta_2 = EI \varphi_2''(-l) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

将式 (40) 代入端部刚体平移和转动的无阻尼自由振动方程, 得到

$$m_r \omega^2 Y_r + EI \varphi_2'''(l) = 0 \quad (43)$$

$$J_r \omega^2 \Theta_r - EI \varphi_2''(l) + d EI \varphi_2'''(l) = 0 \quad (44)$$

将式 (40) 代入端部刚体的几何匹配条件 (38), 得到

$$Y_r = \varphi_2(l) - d \Theta_r, \quad \Theta_r = \varphi_2'(l) \quad (45)$$

将式 (40) 代入铰链 S_1 的边界条件, 得到

$$\varphi_1(-l) = 0, \quad \varphi_1'(-l) = \Theta_1, \quad EI \varphi_1''(-l) = k_L \Theta_1 \quad (46)$$

方程 (41) 的通解可以写为

$$\varphi_i(x) = A_i \cos(\beta x) + B_i \sin(\beta x) + C_i \cosh(\beta x) + D_i \sinh(\beta x), \quad x \in [-l, l] \quad (47)$$

其中 $\beta = \left(\frac{\rho \omega^2}{EI} \right)^{1/4}$. 令

$$\left. \begin{aligned} \psi_i &= [A_i \ B_i \ C_i \ D_i] \\ A_r &= [Y_r \ \Theta_r] \\ A_d &= [\Theta_1 \ \Theta_2] \\ A &= [A_r \ A_d \ \psi_1 \ \psi_2]^T \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

将式 (47) 代入铰链 S_2 的匹配条件 (42), 刚体平移和转动的无阻尼自由振动方程 (43) 和 (44), 端部刚体的几何匹配条件 (45) 和铰链 S_1 的边界条件 (46), 可以得到

$$\mathbf{H}(\omega) \mathbf{A} = 0 \quad (49)$$

其中, $\mathbf{H}(\omega) \in \mathbf{R}^{12 \times 12}$. 为了求解系统的固有频率, 需保证方程 (49) 具有非零解, 即矩阵 $\mathbf{H}(\omega)$ 的行列式必须等于零. 通过行列式等于零可以解出系统的固

有频率, 进而确定 A 中各项系数. 将这些系数代入式 (47), 可以得到系统的全局模态.

2.3 系统全局模态的正交性

在一定的边界条件下, 系统对应于任意两个不同的固有频率 ω_j 和 ω_k 的模态函数分别为 $\phi_j(x)$ 和 $\phi_k(x)$, 即

$$\phi_j(x) = [Y_r^j \ \Theta_r^j \ \Theta_1^j \ \Theta_2^j \ \varphi_1^j \ \varphi_2^j]^T, \quad j = 1, 2, \dots \quad (50)$$

根据方程 (41), (43) 和 (44), 可以有

$$EI\varphi_1^{j''''}(x) = \omega_j^2 \rho \varphi_1^j(x) \quad (51)$$

$$-EI\varphi_2^{j''''}(l, t) = m_r \omega_j^2 Y_r^j \quad (52)$$

$$EI\varphi_2^{j''}(l, t) dEI\varphi_2^{j''''}(l, t) = J_r \omega_j^2 \Theta_r^j \quad (53)$$

方程 (51) 两边分别乘以 $\varphi_1^k(x)$, 加上所有方程, 得到

$$\int_{-l}^l EI\varphi_1^{j''''}(x)\varphi_1^k(x)dx + \int_{-l}^l EI\varphi_2^{j''''}(x)\varphi_2^k(x)dx = \omega_j^2 \left[\int_{-l}^l \rho \varphi_1^j(x)\varphi_1^k(x)dx + \int_{-l}^l \rho \varphi_2^j(x)\varphi_2^k(x)dx \right] \quad (54)$$

方程 (52) 和 (53) 两边分别乘以 Y_r^k 和 Θ_r^k , 再加上所有方程, 可以得到

$$-EI\varphi_2^{j''''}(l)Y_r^k + [EI\varphi_2^{j''}(l) dEI\varphi_2^{j''''}(l)]\Theta_r^k = \omega_j^2 [m_r Y_r^j Y_r^k + J_r \Theta_r^j \Theta_r^k] \quad (55)$$

对方程 (54) 部分积分, 再加上方程 (55), 在系统的边界条件和匹配条件下, 可以得到

$$\int_{-l}^l EI\varphi_1^{j''''}(x)\varphi_1^k(x)dx + \int_{-l}^l EI\varphi_2^{j''''}(x)\varphi_2^k(x)dx + \omega_j^2 [m_r Y_r^j Y_r^k + J_r \Theta_r^j \Theta_r^k] = \int_{-l}^l EI\varphi_1^{j''}(x)\varphi_1^{k''}(x)dx + \int_{-l}^l EI\varphi_2^{j''}(x)\varphi_2^{k''}(x)dx + k_L [\Theta_1^j \Theta_1^k + \Theta_2^j \Theta_2^k] \quad (56)$$

方程 (56) 代入方程 (54) 的左边, 可以得到

$$\omega_j^2 \left[\int_{-l}^l \rho \varphi_1^j(x)\varphi_1^k(x)dx + \int_{-l}^l \rho \varphi_2^j(x)\varphi_2^k(x)dx \right] + \omega_j^2 [m_r Y_r^j Y_r^k + J_r \Theta_r^j \Theta_r^k] = \int_{-l}^l EI\varphi_1^{j''}(x)\varphi_1^{k''}(x)dx + \int_{-l}^l EI\varphi_2^{j''}(x)\varphi_2^{k''}(x)dx + k_L [\Theta_1^j \Theta_1^k + \Theta_2^j \Theta_2^k] \quad (57)$$

交换方程 (57) 的下标, 可以得到

$$\omega_k^2 \left[\int_{-l}^l \rho \varphi_1^j(x)\varphi_1^k(x)dx + \int_{-l}^l \rho \varphi_2^j(x)\varphi_2^k(x)dx \right] + \omega_k^2 [m_r Y_r^j Y_r^k + J_r \Theta_r^j \Theta_r^k] = \int_{-l}^l EI\varphi_1^{j''}(x)\varphi_1^{k''}(x)dx + \int_{-l}^l EI\varphi_2^{j''}(x)\varphi_2^{k''}(x)dx + k_L [\Theta_1^j \Theta_1^k + \Theta_2^j \Theta_2^k] \quad (58)$$

方程 (58) 与方程 (57) 相减有

$$(\omega_j^2 - \omega_k^2) \left[\int_{-l}^l \rho \varphi_1^j(x)\varphi_1^k(x)dx + \int_{-l}^l \rho \varphi_2^j(x)\varphi_2^k(x)dx \right] + (\omega_j^2 - \omega_k^2) [m_r Y_r^j Y_r^k + J_r \Theta_r^j \Theta_r^k] = 0 \quad (59)$$

由方程 (59), 可记下列积分为

$$\int_{-l}^l \rho [\varphi_1^k(x)]^2 dx + \int_{-l}^l \rho [\varphi_2^k(x)]^2 dx + m_r [Y_r^k]^2 + J_r [\Theta_r^k]^2 = M_k \quad (60)$$

式中, M_k 为系统第 k 阶模态质量. 由方程 (60) 和方程 (57), 可记下列积分为

$$\int_{-l}^l EI [\varphi_1^{k''}(x)]^2 dx + \int_{-l}^l EI [\varphi_2^{k''}(x)]^2 dx + k_L [(\Theta_1^k)^2 + (\Theta_2^k)^2] = K_k \quad (61)$$

式中, K_k 为系统第 k 阶模态刚度.

2.4 系统的状态空间模型

系统的位移可由全局模态乘以模态坐标的形式表示为

$$\left. \begin{aligned} w_i(x, t) &= \sum_{j=1}^n \varphi_i^j(x)q_j(t), \quad \theta_i = \sum_{j=1}^n \Theta_i^j q_j(t) \\ y_r &= \sum_{j=1}^n Y_r^j q_j(t), \quad \theta_r = \sum_{j=1}^n \Theta_r^j q_j(t) \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

其中, $q_j(t)$ 为系统的模态坐标.

将式 (62) 分别代入梁的运动微分方程 (25), 铰链传递扭矩的非线性表达式 (29), 端部刚体的运动方程 (34) 和 (35), 可以得到

$$\sum_{j=1}^n \rho \varphi_i^j \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \xi_a \varphi_i^j \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n EI \varphi_i^{j''''} q_j + \sum_{j=1}^n \eta I \varphi_i^{j''''} \dot{q}_j = \rho \ddot{w}_s(t) + CU_i(t) [\delta'(x - x_{i1}) - \delta'(x - x_{i2})] \quad (63)$$

$$M_i^T = \sum_{j=1}^n c\Theta_i^j \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n k_L \Theta_i^j q_j + \sum_{j=1}^n \mu_i \text{sign}(\Theta_i^j \dot{q}_j) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n k_N \Theta_i^j \Theta_i^k \Theta_i^r q_j q_k q_r \quad (64)$$

$$\sum_{j=1}^n m_r Y_r^j \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \xi_b Y_r^j \dot{q}_j - \sum_{j=1}^n EI \phi_2^{j''''}(x) q_j = m_r \ddot{w}_s \quad (65)$$

$$\sum_{j=1}^n J_r \Theta_r^j \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \xi_c \Theta_r^j \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n EI \varphi_2^{j''}(x) q_j - d \sum_{j=1}^n EI \varphi_2^{j''''}(x) q_j = 0 \quad (66)$$

方程 (63) 的两边乘以 ϕ_i^k , 再沿梁的全长积分, 方程 (65) 和 (66) 两边分别乘以 Y_r^k 和 Θ_r^k , 再加上所有方程, 在系统的匹配条件和边界条件下, 利用系统全局模态的正交性, 可以得到

$$\ddot{q}_k + 2\alpha_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \gamma_k \dot{q}_j + e_k \text{sign}(\Theta_i^j \dot{q}_j) + p_k q_j q_r q_s = f_k(t) + \hat{B}_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (67)$$

式中, α_k 为梁的模态阻尼, γ_k 为铰链的阻尼, e_k 为铰链的摩擦扭矩, 方程 (67) 中各相关系数为

$$\alpha_k = (a/\omega_k + b\omega_k)/2, \quad \gamma_k = \frac{c}{M_k} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n \Theta_i^j \Theta_i^k$$

$$e_k = \frac{\mu}{M_k} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n \Theta_i^k$$

$$p_k = \frac{k_N}{M_k} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \Theta_i^j \Theta_i^r \Theta_i^s \Theta_i^k$$

$$f_k(t) = \frac{\ddot{w}_s(t)}{M_k} \sum_{i=1}^2 \left[\int_{-l}^l \rho \varphi_i^k dx + m_r Y_r^k \right]$$

$$\hat{B}_k(t) = \frac{C}{M_k} \sum_{i=1}^2 U_i(t) [\varphi_i'(x_{i2}) - \varphi_i'(x_{i1})]$$

引入状态向量

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{q}^T(t) \quad \dot{\mathbf{q}}^T(t)]^T = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad \dots \quad q_n(t) \quad \dot{q}_1(t) \quad \dot{q}_2(t) \quad \dots \quad \dot{q}_n(t)]^T \quad (68)$$

则系统的状态方程可表示为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \quad (69)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{\Omega}^2 & -2\mathbf{A} - \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{0}_{1 \times n} \quad B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_n]$$

$$\mathbf{\Omega} = \text{diag} [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_n]$$

$$\mathbf{A} = \text{diag} [\alpha_1 \omega_1 \quad \alpha_2 \omega_2 \quad \dots \quad \alpha_n \omega_n]$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1j} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \dots & \gamma_{kj} \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$\gamma_{kj} = \sum_{i=1}^2 \Theta_i^j \Theta_i^k$$

$$B_k = f_k(t) + \hat{B}_k(t) - e_k \text{sign}(\Theta_i^j \dot{q}_j) - p_k q_j q_r q_s$$

式 (67) 为系统的非线性动力学方程组, 其方程组的线性部分相互独立, 非线性部分相互耦合, 这样就使得方程组适用于解析方法来研究系统产生的非线性振动. 同时, 基于该方法构建的低维状态空间模型 (69), 可以方便地进行振动控制器设计.

2.5 模态提取方法的有效性验证

为了验证本文提出的全局模态提取方法, 这里以有限元方法得出的结果作为参考值, 将本文方法给出的固有频率与采用有限元方法计算出的结果进行对比, 以验证本文方法的有效性和正确性. 铰链连接的双梁结构的几何尺寸和材料参数见表 1.

表 1 铰链连接的多梁结构的几何尺寸和材料参数

Table 1 Geometric and material parameters of the multi-beam structure connected with joints

l/m	E/GPa	b/mm	h_1/mm
0.15	210	50	5
$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	$k_L/(\text{Nm}\cdot\text{rad}^{-1})$	m_r/kg	$J_r/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$
1.962 5	1000	0.353 3	1.33×10^{-4}

图 10 和图 11 分别给出了采用商业软件 Ansys 和本文解析方法得到的结构前八阶固有频率和振型. 定义采用两种方法得到的固有频率的相对误差为

$$e = \frac{|\omega_i - \omega_i^{\text{ANS}}|}{\omega_i^{\text{ANS}}} \times 100\%, \quad i = 1, 2, \dots \quad (71)$$

式中, ω_i 和 ω_i^{ANS} 分别为由解析方法和 Ansys 得到的

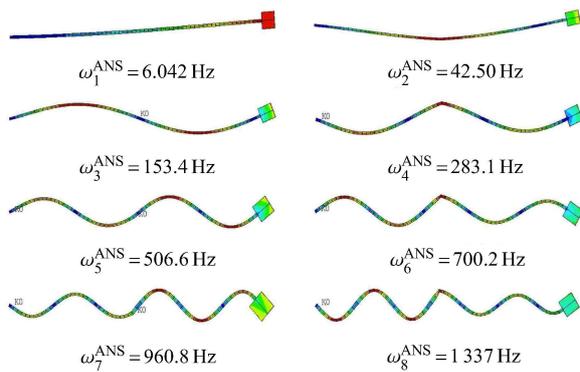


图 10 ANSYS 得到的结构前八阶固有频率和振型

Fig. 10 The first eight natural frequencies and mode shapes of the structure from Ansys

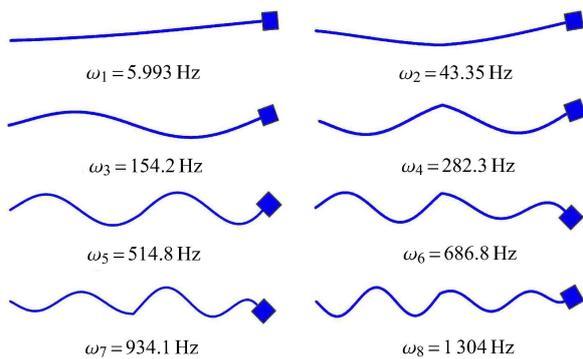


图 11 解析方法得到的结构前八阶固有频率和振型

Fig. 11 The first eight natural frequencies and mode shapes of the structure from the analytic method

结构第 i 阶固有频率.

通过对图 10 和图 11 进行对比,可以看出由本文方法求解的固有频率与采用 Ansys 计算得到的固有频率吻合较好.在前八阶固有频率中,两种方法所得到结果的最大相对误差为 $e = 2.7\%$,表明本文提出的方法是有效的和正确的.

3 结论

针对复合柔性结构,提出了获取系统全局模态的一般性解析方法.采用笛卡尔坐标描述系统的运动,给出了建立系统模态方程的策略和步骤.通过描述柔性部件弹性变形的偏微分方程、描述刚体的运动微分方程以及描述连接界面力、力矩、位移和转角的匹配条件以及系统的边界条件,利用分离变量法给出了统一形式的频率方程,据此获取系统的固有频率和反映结构动力学特征的全局模态.该方法具有以下优点:

(1) 所求解的系统全局模态是反映系统中各个部件弹性振动的真实模态.在此基础上,方便于分析参数对系统全局模态的影响,从而更深入地揭示系统中各个部件之间的振动耦合关系.

(2) 由于所求解的全局模态为系统的真实模态,相比采用单个柔性部件的假设模态得到的动力学模型,基于全局模态方法得到的动力学模型,其精度更高、自由度更少.

(3) 在考虑非线性因素的情况下,基于全局模态方法得到的系统非线性振动方程,其方程的线性部分相互独立,非线性部分相互耦合.这可以为采用解析方法求解复合柔性结构的非线性动态响应提供有效的低阶动力学模型.

(4) 基于解析形式的全局模态函数可以方便地构建系统的低维状态空间模型,有利于主动振动控制器的设计.

参 考 文 献

- 1 张军徽, 崔洋洋, 佟安. 条带式太阳帆的结构动力学分析. 力学学报, 2019, 51(1): 237-244 (Zhang Junhui, Cui Yangyang, Tong An. Structural dynamic and stability analysis of a stripped solar sail. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(1): 237-244 (in Chinese))
- 2 胡璐, 闫寒, 张文明等. 黏性流体环境下 V 型悬臂梁结构流固耦合振动特性研究. 力学学报, 2018, 50(3): 643-653 (Hu Lu, Yan Han, Zhang Wenming et al. Analysis of flexural vibration of V-shaped beams immersed in viscous fluids. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(3): 643-653 (in Chinese))
- 3 陶连金, 刘春晓, 边金等. 大跨度 Y 形柱地铁站结构地震反应研究. 力学学报, 2017, 49(1): 55-64 (Tao Lianjin, Liu Chunxiao, Bian Jin et al. Seismic response of subway station with large span and Y-shaped column. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(1): 55-64 (in Chinese))
- 4 曹登庆, 白坤朝, 丁虎等. 大型柔性航天器动力学与振动控制研究进展. 力学学报, 2019, 51(1): 1-13 (Cao Dengqing, Bai Kuncha, Ding Hu et al. Advances in dynamics and vibration control of large-scale flexible spacecraft. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(1): 1-13 (in Chinese))
- 5 Ibrahimbegović A, Mamouri S, Taylor RL, et al. Finite element method in dynamics of flexible multibody systems: Modeling of holonomic constraints and energy conserving integration schemes. *Multibody System Dynamics*, 2000, 4(2-3): 195-223
- 6 和兴锁, 顾致平, 邓峰岩. 大型空间柔性梁的有限元动力学建模方法研究. 机械科学与技术, 2007, 26(9): 1194-1197 (He Xingsuo, Gu Zhiping, Deng Fengyan. Dynamics modeling of large spatial flexible beam with finite element method. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2007, 26(9): 1194-1197 (in Chinese))
- 7 Al-Bedoor BO, Almusallam AA. Dynamics of flexible-link and

- flexible-joint manipulator carrying a payload with rotary inertia. *Mechanism & Machine Theory*, 2000, 35(6): 785-820
- 8 刘锦阳, 李彬, 洪嘉振. 作大范围空间运动柔性梁的刚-柔耦合动力学. *力学学报*, 2006, 38(2): 276-282 (Liu Jingyang, Li Bin, Hong Jiazhen. Rigid-flexible coupling dynamics of a flexible beam with three-dimensional large overall motion. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38(2): 276-282 (in Chinese))
- 9 Cai GP, Hong JZ, Yang SX. Dynamic analysis of a flexible hub-beam system with tip mass. *Mechanics Research Communications*, 2005, 32(2): 173-190
- 10 陈萌, 马艳红, 刘书国等. 航空发动机整机有限元模型转子动力学分析. *北京航空航天大学学报*, 2007, 33(9): 1013-1016 (Chen Meng, Ma Yanhong, Liu Shuguo et al. Rotor dynamic analysis of whole aero-engine models based on finite element method. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2007, 33(9): 1013-1016 (in Chinese))
- 11 邱志成, 姜衡. 一种柔性铰链连接的柔性板结构振动模态分析. *空间控制技术与应用*, 2011, 37(5): 1-7 (Qiu Zhicheng, Jiang Heng. Vibration modal analysis of flexible plate structure connected by a flexible hinge. *Aerospace Control and Application*, 2011, 37(5): 1-7 (in Chinese))
- 12 代颖, 崔淑梅, 宋立伟. 车用电机的有限元模态分析. *中国电机工程学报*, 2011, 31(9): 100-104 (Dai Ying, Cui Shumei, Song Liwei. Finite element method modal analysis of driving motor for electric vehicle. *Proceedings of the CSEE*, 2011, 31(9): 100-104 (in Chinese))
- 13 宾光富, 曾求洪, 王钢等. 基于有限元模型的电机零部件与整机结构振动关联特性. *电机与控制学报*, 2016, 20(11): 101-106 (Bin Guangfu, Zeng QiuHong, Wang Gang, et al. Structural vibration correlation feature analysis for parts and whole-machine of motor based on finite element model. *Electric Machines and Control*, 2016, 20(11): 101-106 (in Chinese))
- 14 Silva C. A reduced-order analytical model for the nonlinear dynamics of a class of flexible multi-beam structures. *International Journal of Solids & Structures*, 1998, 35(25): 3299-3315
- 15 Hu Q, Ma G. Adaptive variable structure maneuvering control and vibration reduction of three-axis stabilized flexible spacecraft. *European Journal of Control*, 2006, 12(6): 654-668
- 16 Hu Q. Input shaping and variable structure control for simultaneous precision positioning and vibration reduction of flexible spacecraft with saturation compensation. *Journal of Sound Vibration*, 2008, 318(1): 18-35
- 17 Gennaro SD. Active vibration suppression in flexible spacecraft attitude tracking. *Journal of Guidance Control & Dynamics*, 1998, 21(3): 400-408
- 18 程磊, 王天舒, 李俊峰. 挠性多体卫星姿态动力学与控制. *清华大学学报(自然科学版)*, 2005, 45(11): 1506-1509 (Cheng Lei, Wang Tianshu, Li Junfeng. Attitude dynamics and control of a flexible multi-body satellite. *Journal of Tsinghua University(Science and Technology)*, 2005, 45(11): 1506-1509 (in Chinese))
- 19 Pan KQ, Liu JY. Investigation on the choice of boundary conditions and shape functions for flexible multi-body system. *Acta Mechanica Sinica*, 2012, 28(1): 180-189
- 20 Schwertassek R, Wallrapp O, Shabana AA. Flexible multibody simulation and choice of shape functions. *Nonlinear Dynamics*, 1999, 20(4): 361-380
- 21 Hablani HB. Constrained and unconstrained modes - some modeling aspects of flexible spacecraft. *Journal of Guidance Control Dynamics*, 1982, 5(2): 164-173
- 22 Wei J, Cao D, Liu L, et al. Global mode method for dynamic modeling of a flexible-link flexible-joint manipulator with tip mass. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 48: 787-805
- 23 Gattulli V, Morandini M, Paolone A. A parametric analytical model for non-linear dynamics in cable-stayed beam. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2002, 31(6): 1281-1300
- 24 Gattulli V, Lepidi M. Nonlinear interactions in the planar dynamics of cable-stayed beam. *International Journal of Solids & Structures*, 2003, 40(18): 4729-4748
- 25 Zhao Y, Kang H. In-plane free vibration analysis of cable-arch structure. *Journal of Sound & Vibration*, 2008, 312(3): 363-379
- 26 赵跃宇, 杨相展, 刘伟长等. 索-梁组合结构中拉索的非线性响应. *工程力学*, 2006, 23(11): 153-158 (Zhao Yueyu, Yang Xiangzhan, Liu Weichang, et al. Nonlinear response of cables in cable-stayed beam structure. *Engineering Mechanics*, 2006, 23(11): 153-158 (in Chinese))
- 27 Wang Z, Sun C, Zhao Y, et al. Modeling and nonlinear modal characteristics of the cable-stayed beam. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2014, 47: 58-69
- 28 王志攀, 赵冰, 孙测世等. 索-梁组合结构的建模及面内动力特性分析. *固体力学学报*, 2014, 35(3): 308-312 (Wang Zhiqian, Zhao Yaobing, Sun Ceshi et al. Modeling and in-plane dynamics analysis of the cable-stayed beam. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2014, 35(3): 308-312 (in Chinese))
- 29 Hablani HB. Modal analysis of gyroscopic flexible spacecraft: a continuum approach. *Journal of Guidance Control & Dynamics*, 1982, 5(5): 448-457
- 30 Hablani HB. Hinges-free and hinges-locked modes of a deformable multibody space station-a continuum analysis. *Journal of Guidance Control Dynamics*, 1990, 13(2): 286-296
- 31 Hablani HB. Modal identities for multibody elastic spacecraft. *Journal of Guidance Control & Dynamics*, 1991, 14(14): 294-303
- 32 曲广吉. 复合柔性结构航天器动力学建模研究. *中国工程科学*, 1999, 1(2): 52-56 (Qu Guangji. Dynamics modeling of spacecraft with composite flexible structures. *Engineering Science*, 1999, 1(2): 52-56 (in Chinese))
- 33 缪炳祺, 曲广吉, 夏遼勤等. 关于柔性航天器动力学模型降阶问题. *中国工程科学*, 2001, 3(11): 60-64 (Liao Bingqi, Qu Guangji, Xia Suiqin, et al. On the order reduction of dynamics models of flexible spacecraft. *Engineering Science*, 2001, 3(11): 60-64 (in Chinese))
- 34 缪炳祺, 曲广吉, 夏遼勤. 柔性航天器的模态综合-混合坐标动力学建模. *浙江工业大学学报*, 2002, 30(2): 139-142 (Miao Bingqi, Qu Guangji, Xia Suiqin. Modal synthesis-hybrid coordinate dynamics modeling of flexible spacecrafts. *Journal of Zhejiang University of Technology*, 2002, 30(2): 139-142 (in Chinese))

- 35 Song MT, Cao DQ, Zhu WD. Dynamic analysis of a micro-resonator driven by electrostatic combs. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2011, 16(8): 3425-3442
- 36 Cao DQ, Song MT, Zhu WD, et al. Modeling and analysis of the in-plane vibration of a complex cable-stayed bridge. *Journal of Sound & Vibration*, 2012, 331(26): 5685-5714
- 37 Wei J, Cao D, Huang H, et al. Dynamics of a multi-beam structure connected with nonlinear joints: modelling and simulation. *Archive of Applied Mechanics*, 2018(1): 1-16
- 38 Wei J, Cao D, Wang L, et al. Dynamic modeling and simulation for flexible spacecraft with flexible jointed solar panels. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, 130: 558-570
- 39 杨海峰, 王晓军, 邱志平. 压电柔性结构振动的鲁棒控制. 北京航空航天大学学报, 2009, 35(8): 957-961 (Yang Haifeng, Wang Xiaojun, Qiu Zhiping. Robust vibration control of flexible piezoelectric structure. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2009, 35(8): 957-961 (in Chinese))
- 40 吴爽, 赵寿根, 吴大方等. 太阳翼铰链结构的动力学实验与非线性动力学建模. 宇航学报, 2013, 34(12): 1550-1556 (Wu Shuang, Zhao Shougen, Wu Dafang, et al. Dynamic experiments and nonlinear dynamics modeling of joints in solar array. *Journal of Astronautics*, 2013, 34(12): 1550-1556 (in Chinese))