

考虑嵌入移动孔洞的多相材料布局优化¹⁾

王选^{*,†} 胡平^{*,2)} 龙凯^{**}

^{*}(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

[†](合肥工业大学土木与水利工程学院, 合肥 230009)

^{**}(华北电力大学新能源电力系统国家重点实验室, 北京 102206)

摘要 工程结构设计问题中经常需要预先嵌入一个或多个固定形状的孔洞以满足某些功能性或者制造性设计要求. 为了有效求解这种带有嵌入可移动孔洞的多相材料连续体结构布局优化问题, 通常需要同时优化这些嵌入孔洞的位置和方向及多相材料结构的拓扑构型, 以改善结构的整体性能. 为此, 本文采用参数化的水平集函数描述嵌入孔洞的几何形状, 并将定义多相材料结构拓扑的材料密度以及描述嵌入孔洞的位置和方向的几何参数视为所考虑优化问题的设计变量. 为了避免由于孔洞移动造成的重新划分网格的繁琐及改善计算效率, 使用平滑化的 Heaviside 函数将所有嵌入孔洞映射为固定网格上的密度场. 同时, 提出了一种在有限元水平上调用的类 SIMP 材料插值格式, 用于优化问题的材料参数化, 进而实现多相材料结构拓扑构型和嵌入孔洞位置和方向的同步优化. 这种材料插值格式便于几何变量的解析灵敏度分析, 使得当前的优化问题可以用基于梯度的优化算法求解. 优化算例证明所提方法可以有效地处理带有多个嵌入孔洞的多相材料结构布局优化问题.

关键词 布局优化, 移动孔洞, 多相材料, SIMP 方法, 拓扑优化

中图分类号: O342 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-18-327

MULTIPHASE MATERIAL LAYOUT OPTIMIZATION CONSIDERING EMBEDDING MOVABLE HOLES¹⁾

Wang Xuan^{*,†} Hu Ping^{*,2)} Long Kai^{**}

^{*}(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

[†](College of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

^{**}(State Key Laboratory for Alternate Electrical Power System with Renewable Energy Sources, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

Abstract In structural engineering design, it is often necessary to embed one or more fixed-shaped holes to meet certain functional or manufacturing design requirements. To effectively solve the multi-phase material layout optimization problem of continuum structure with embedded movable holes, it is usually necessary to simultaneously optimize the position and orientation of these embedded holes and the topology configuration of the multi-phase material structure to improve the overall performance of the structure. To this end, parameterized level set functions are used to describe the geometry of the embedded holes. The material densities defining the structural topology of multiphase materials, and the geometric parameters used to describe the position and orientation of the embedded holes, are considered as design variables of the optimization problem considered here. To avoid the cumbersome of re-meshing the grids caused

2018-10-08 收稿, 2019-01-18 录用, 2019-01-18 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (11872017) 和北京市自然科学基金 (2182067) 资助项目.

2) 胡平, 教授, 主要研究方向: 固体力学与车辆工程. E-mail: pinghu@dlut.edu.cn

引用格式: 王选, 胡平, 龙凯. 考虑嵌入移动孔洞的多相材料布局优化. 力学学报, 2019, 51(3): 852-862

Wang Xuan, Hu Ping, Long Kai. Multiphase material layout optimization considering embedding movable holes. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(3): 852-862

by the movement of holes and improve the efficiency of computation, the embedded holes are mapped into a density field on a fixed grid using a smoothed Heaviside function. Meanwhile, a SIMP-like material interpolation invoked at the finite element level is introduced for material parameterization of the optimization problem, and then the simultaneous optimization of the topology configuration of the multi-phase material structure and the position and orientation of the embedded hole can be realized. The material interpolation scheme supports full analytical sensitivity analysis, which allows the current optimization problem to be solved using gradient-based optimization algorithms. Numerical examples illustrate that the proposed method can effectively deal with the layout optimization problem of multiphase material embedded with multiple embedded holes.

Key words layout optimization, movable holes, multi-material, SIMP method, topology optimization

引言

工程结构设计问题经常包含特定的几何限制条件. 一个常见的限制是在设计过程中需要事先在设计域内嵌入固定形状的对象 (组件或孔洞) 以满足某些功能性或者制造性设计要求^[1]. 例如, 在航空航天结构中, 一些功能设备 (通常也用作承载结构), 需要被嵌入到主体结构中以充分利用可用空间. 比较典型的例子还有嵌入可移动压电驱动器的柔性智能结构设计问题^[2], 面向压电智能结构精确变形的协同优化设计问题^[3], 内嵌离散热导体的传热系统布局优化^[4]等. 此外, 在结构设计过程中, 通常还需要保留足够的预留空间以使得其他的组件能够顺利通过结构, 或者准许嵌入预定的对象, 或者单纯出于美学、设备维护的角度考虑预设孔洞. 在这些应用中, 不仅需要在允许的设计区域中寻找这些已知几何形状的预定对象的最佳位置和摆放方向, 还需要设计连接这些嵌入对象的支撑结构以改善结构的整体性能^[5-10].

对于考虑嵌入组件的连续体结构布局优化问题, 研究文献较多, 许多研究者提出了非常有效的求解策略^[11-16], 关于这方面的研究综述可参阅文献^[1,10]. 本文主要考虑嵌入移动孔洞的连续体结构布局优化问题. 在处理固定位置上带有不可设计孔洞的优化问题中, 通常采用被动单元方法 (passive elements approach), 即通过在设计域中定义被动区域 (即具有规定密度的区域) 来包括具有固定形状和位置的孔洞. 在优化的过程中, 被动区域内部的单元将从设计变量集合中排除, 但包含在结构响应的计算中. 这种被动单元方法很容易实施, 但是存在一定限制, 如孔洞的位置强烈影响优化结构的刚度, 在过程中过早进行的设计选择通常基于经验而非优化, 存在选择次优配置的风险, 而这些配置以后无法更改.

因此, 对于嵌入可变位置的移动孔洞的优化问题来说, 这种被动单元方法并不合适.

目前处理这种带有可移动孔洞的布局优化问题的文献相对较少. Kang 和 Wang^[17] 提出了一种新颖的处理嵌入可移动孔洞的拓扑优化方法, 该方法结合了水平集方法对规定几何形状孔洞的精确几何描述的能力, 以及基于节点变量的材料密度方法的高效率. 与上述“嵌入问题”一样, 每个嵌入孔洞的位置和旋转角度由 3 个设计变量 (2D) 确定, 即表征孔洞上某个参考点平移运动的两个变量, 和旋转运动的一个变量. 此外, 为了避免嵌入孔洞之间以及每个孔洞与设计域边界之间的重叠, 他们提出了一种基于材料体积的单个的显式积分约束, 这种非重叠约束是准确且可微分的, 有利于设计灵敏度分析. 尽管他们所提方法在处理嵌入可移动孔洞的布局优化问题十分有效, 但是通过水平集方法来驱动孔洞的移动、半解析灵敏度计算策略计算量较大.

Clausen 等^[18] 提出一种有效处理具有灵活空隙区域的拓扑优化方法. 与在设计领域内严格指定空隙区域的被动单元方法不同的是, 所建议的方法允许这些区域被灵活地重新定形和重新定位, 其中使用惯性矩来控制孔洞的变形程度, 使用孔洞区域的质心控制平移运动的自由度. 与文献^[17] 中的方法的主要区别在于空白定义, 允许孔洞空间的完全灵活性. 空隙区域不是使用水平集函数描述, 而是通过第二个离散设计变量场引入. 尽管该方法可应用于带有可移动孔洞的布局优化问题, 但是该方法在处理带有多个移动孔洞的问题中还存在困难, 考虑嵌入 n 个移动孔洞则需要引入 n 个离散的设计变量场, 而且还缺少有效避免多个移动孔洞之间的重叠的策略. 另外, 文献^[17-18] 均只涉及单相均质材料的优化问题. 在实际工程应用中, 结构通常由多种非

均匀材料组成, 以满足不同的设计要求, 如文献 [19] 指出多相材料组合有利于减轻结构重量.

为了克服以上方法的局限性, 本文提出一种有效处理嵌入多个移动孔洞的多相材料布局优化问题的求解方法. Xia 等 [7] 使用参数化水平集函数和 R 函数描述嵌入组件的几何形状, 这样确保在整个优化过程中都在固定的 Eulerian 网格下优化, 有利于提高计算效率. 本文受文献 [7] 启示, 也使用参数化水平集函数描述嵌入孔洞的几何形状. 将定义多相材料结构拓扑的材料密度以及用于描述嵌入孔洞的位置和方向的几何参数被看作优化问题的设计变量. 为了将这两个看似不同的变量形式结合到一个统一的计算框架中, 首先使用平滑化的 Heaviside 函数将所有嵌入孔洞映射到固定网格上的密度场, 然后将文献 [17] 中的材料插值格式推广到考虑嵌入孔洞的多相材料布局优化问题当中, 用于优化问题的材料参数化. 多个数值算例验证了本文方法的有效性.

1 考虑嵌入孔洞的拓扑优化列式

1.1 嵌入孔洞的拓扑描述

受文献 [7, 17] 启示, 使用水平集函数来描述嵌入孔洞的形状和拓扑, 表达式为

$$\left. \begin{aligned} \phi(x) > 0, & \text{ if } \mathbf{x} \in (D/\Omega) \\ \phi(x) = 0, & \text{ if } \mathbf{x} \in (\partial\Omega \cap D) \\ \phi(x) < 0, & \text{ if } \mathbf{x} \in (\Omega/\partial\Omega) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, D 代表给定的设计域, Ω 和 $\partial\Omega$ 分别为嵌入孔洞所占据的子区域及其边界. 式 (1) 表明, 如果点 \mathbf{x} 位于嵌入孔洞的里面, 则其对应的水平集函数值小于零.

对于常规形状的孔洞 (如圆, 椭圆, 超椭圆等), 其对应的水平集函数可表示

$$\phi(\mathbf{x}, x_0, y_0, \theta) = \phi(\bar{x}, \bar{y}) \quad (2)$$

其中

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

这里 (\bar{x}, \bar{y}) 为嵌入孔洞上的局部坐标. θ 为嵌入孔洞相对于水平方向的旋转角. x_0 和 y_0 为孔洞上特殊参考点的横纵坐标. 为了便于说明, 式 (4) 给出一个圆角方形孔洞的水平集函数

$$\phi_1 = \left(\frac{\bar{x}}{a}\right)^4 + \left(\frac{\bar{y}}{b}\right)^4 - 1 \quad (4)$$

其中, a 和 b 分别表示圆角方形孔洞的半长轴和半短轴长度.

对于形状不能由式 (2) 描述的复杂形状孔洞, 可以像文献 [7,9,20] 一样, 借助于 R 函数理论来描述其拓扑. 为了简单起见, 本文只考虑了圆形和圆角方形孔洞作为嵌入对象.

为了避免由于孔洞移动导致重新划分网格的繁琐, 使用平滑化的 Heaviside 函数将嵌入孔洞映射为固定分析网格上的密度场 [21]

$$\eta_e = \prod_{k=1}^{N_k} \frac{1}{1 + \exp(-\beta\phi_k)} \quad (5)$$

其中, ϕ_k 为第 k 个嵌入孔洞所对应的水平集函数, N_k 为嵌入孔洞的个数. 参数 β 控制着密度变化的斜率, 较大的 β 给出较窄的中间密度带宽. 数值实验表明参数 β 随着迭代步数逐渐增大, 优化效果表现更好, 与文献 [21] 一样, 本文所有算例均设置 β 从 2 逐渐增大到 4.

图 1 显示了中心在原点处的单个圆角方形孔洞在式 (5) 映射下的单元 e 的密度分布, 其中 $\beta = 8$, 这里圆角方形孔洞的半长轴和半短轴长度分别为 6 和 4. 从图 1 可知, 当单元 e 位于圆角方形孔洞内部, 其对应的单元密度 $\eta_e = 0$, 当单元 e 位于孔洞外部, 其对应的单元密度 $\eta_e = 1$.

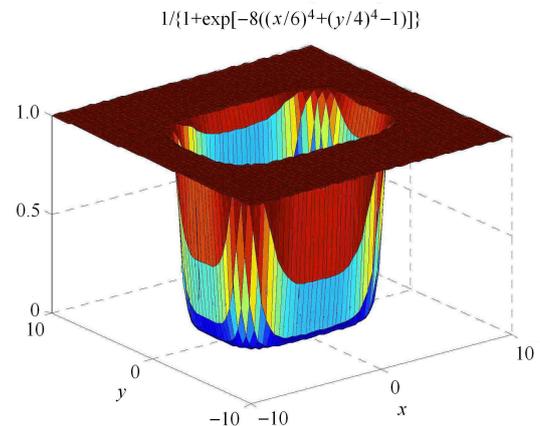


图 1 单个移动孔洞映射下的单元 e 的密度
Fig. 1 Density of element e mapped from a single moving hole

1.2 考虑嵌入孔洞的材料插值格式

与其他优化问题 [22-28] 不同, 在设计考虑多个嵌入孔洞的结构系统时, 需要同步优化嵌入孔洞的位置和方向及每种材料相的拓扑构型, 以使得结构总

体刚度最大化. 受文献 [17] 的启发, 引入一种在有限元网格上调用的类 SIMP 材料插值格式

$$E_e = \rho_e^p \eta_e^q E_0 \quad (6)$$

其中, 单元密度 ρ_e 与传统的 最小柔顺性问题中的密度变量角色一样. p, q 为惩罚参数, 本文所有算例中均取 $p = q = 3$. η_e 是由嵌入孔洞映射得到的密度场, 可通过式 (5) 计算得到. E_0 为实体材料的杨氏模量, E_e 为插值后的杨氏模量. 图 2 显示了 $E_0 = 1$ 时类 SIMP 材料插值格式的示意图. 从式 (6) 和图 2 可知, 当且仅当 ρ_e 和 η_e 均等于 1 时, 插值后的杨氏模量才等于实体材料的杨氏模量, 即 $E_e = E_0$.

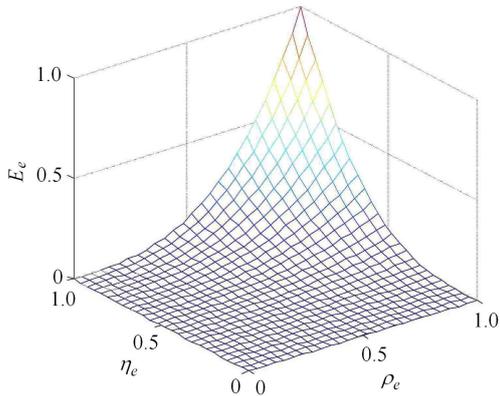


图 2 类 SIMP 材料插值格式示意图

Fig. 2 Schematic illustration of SIMP-like interpolation scheme

对于多相材料结构, 本文将文献 [29] 中材料插值格式拓展至带有嵌入孔洞的结构布局优化问题中. 以两相材料为例, 其插值格式可表示为

$$E_e(\rho_1^e, \rho_2^e) = (\rho_1^e)^{p_1} [E_1 + (\rho_2^e)^{p_2} (E_2 - E_1)] \eta_e^q \quad (7)$$

其中, E_1, E_2 分别为材料 1 和材料 2 的杨氏模量; p_1, p_2, q 为惩罚参数. ρ_1 和 ρ_2 为定义材料相的密度变量. $\rho_1 = 1$ 或 0 表示单元是实体材料或孔洞; $\rho_2 = 1$ 或 0 分别表示单元选用材料 2 或材料 1.

1.3 考虑嵌入孔洞的拓扑优化模型

结构拓扑优化的目的是寻找一个满足某些约束条件的最优的材料分布, 以使结构获得某种最优的结构性能, 如结构的重量最轻或刚度最大化. 本文旨在寻找嵌入孔洞的最优位置和每种材料相的最优布局, 以最大化结构的整体刚度 (即最小化结构的柔顺性). 因此, 考虑嵌入孔洞的两相材料布局优化问题的数学列式可表示如下

$$\left. \begin{aligned} \text{find : } & \rho_1 = \{\rho_1^1, \rho_1^2, \dots, \rho_1^{N_e}\} \\ & \rho_2 = \{\rho_2^1, \rho_2^2, \dots, \rho_2^{N_e}\} \\ & \mathbf{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_{N_m}\} \\ \text{min : } & J = \sum_{e=1}^{N_e} E_e \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e \\ \text{s.t. } & \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ & g_1 = \sum_{e=1}^{N_e} \rho_1^e V_e - f_1 V_0 \leq 0 \\ & g_2 = \sum_{e=1}^{N_e} \rho_1^e \rho_2^e V_e - f_2 V_0 \leq 0 \\ & g_3 = \sum_{e=1}^{N_e} \eta_e V_e - \left(V_0 - \sum_{k=1}^{N_m} V_k \right) \leq 0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_1^e \leq 1 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_2^e \leq 1 \\ & s_{\min} \leq s \leq s_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中, \mathbf{K}, \mathbf{F} 和 \mathbf{U} 分别为全局的刚度阵, 载荷向量和位移向量, \mathbf{u}_e 为单元位移向量, N_e 为用来离散设计域的单元个数, E_e 为由式 (6) 或式 (7) 定义的插值后的杨氏模量. 在上述优化模型的约束中, g_1 为限制材料用量的体积约束, 其中 V_e 和 V_0 分别为单元 e 和整个设计域的体积, f_1 为设计领域中可用实体材料的体积分数比; g_2 为限制刚性材料 (材料 2) 用量的体积约束, f_2 是刚性材料在实体材料中的体积分数比; g_3 为非重叠约束 [17], 用于避免嵌入的孔洞之间, 以及嵌入孔洞与设计域边界之间的重叠. V_k 为第 k 个孔洞的体积.

在优化模型 (8) 中, 有两类设计变量, 一是用来定义材料 1 和材料 2 拓扑构型的单元密度变量 ρ_1 和 ρ_2 , 另外一个是用来定义嵌入孔洞位置和方向的几何设计变量 \mathbf{s} . 几何设计变量 \mathbf{s} 由 N_m 个嵌入孔洞上参考点的横纵坐标, 及嵌入孔洞相当于水平方向的倾斜角组成, 即 $\mathbf{s}_k = \{x_k, y_k, \theta_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, N_m$). s_{\min} 和 s_{\max} 为几何设计变量的下限和上限, 其中 x_k, y_k 坐标变量的上下限根据设计域的几何尺寸确定, $\theta_k \in [-2\pi, 2\pi]$. ρ_{\min} 取很小的正数, 作为密度设计变量的下限以防止刚度矩阵奇异, 这里取 $\rho_{\min} = 10^{-3}$. 对于单相材料设计问题, 可以通过移除第 2 个相对密度向量 ρ_2 来简化优化模型.

2 灵敏度分析

由于采用基于梯度的优化算法来解决上述优化问题,因此这里需要推导目标函数的灵敏度.为简便起见,这里以内嵌移动孔洞的两相材料设计问题为例,即插值后的杨氏模量 E_e 由式 (7) 确定.

2.1 目标函数对单元密度变量的灵敏度

目标函数关于单元密度变量 ρ_1 和 ρ_2 的设计灵敏度可以通过伴随方法获得

$$\frac{\partial J}{\partial \rho_i^e} = -\frac{\partial E_e}{\partial \rho_i^e} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e, \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

式 (9) 中 $\partial E_e / \partial \rho_i^e$ 项可以通过对式 (7) 中插值后的杨氏模量关于单元密度变量求导得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_e}{\partial \rho_1^e} &= p_1 (\rho_1^e)^{p_1-1} [E_1 + (\rho_2^e)^{p_2} (E_2 - E_1)] \eta_e^q \\ \frac{\partial E_e}{\partial \rho_2^e} &= p_2 (\rho_1^e)^{p_1} (\rho_2^e)^{p_2-1} (E_2 - E_1) \eta_e^q \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

2.2 目标函数对几何变量的灵敏度

设 z_k 代表第 k 个嵌入孔洞的 3 个几何设计变量 $s_k = \{x_k, y_k, \theta_k\}$ 中的一个,则目标函数关于 z_k 的灵敏度可通过链式法则得到

$$\frac{\partial J}{\partial z_k} = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial J}{\partial \eta_e} \frac{\partial \eta_e}{\partial \phi_k} \frac{\partial \phi_k}{\partial z_k} \quad (11)$$

式中, $\partial J / \partial \eta_e$ 可通过伴随法得到

$$\frac{\partial J}{\partial \eta_e} = -\frac{\partial E_e}{\partial \eta_e} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e \quad (12)$$

其中, $\partial E_e / \partial \eta_e$ 项可以通过对式 (7) 中插值后的杨氏模量关于 η_e 求导得到

$$\frac{\partial E_e}{\partial \eta_e} = q (\rho_1^e)^{p_1} [E_1 + (\rho_2^e)^{p_2} (E_2 - E_1)] \eta_e^{q-1} \quad (13)$$

式 (11) 中, $\partial \eta_e / \partial \phi_k$ 可通过式 (5) 推导得到

$$\frac{\partial \eta_e}{\partial \phi_k} = \eta_e \frac{\beta \exp(-\beta \phi_k)}{1 + \exp(-\beta \phi_k)} \quad (14)$$

对于式 (11) 中导数项 $\partial \phi_k / \partial z_k$,为了简化推导过程,假设这里考虑的嵌入孔洞的水平集函数可以由式 (2) 表示,以式 (4) 定义的圆角方形孔洞为例,当 $z_k = x_0$ 时,导数项 $\partial \phi_k / \partial z_k$ 可表示为

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial z_k} = 4 \left(\frac{\bar{x}}{a} \right)^3 \left(\frac{-\cos \theta}{a} \right) + 4 \left(\frac{\bar{y}}{b} \right)^3 \left(\frac{\sin \theta}{b} \right) \quad (15)$$

当 $z_k = y_0$ 时,导数项 $\partial \phi_k / \partial z_k$ 可表示为

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial z_k} = 4 \left(\frac{\bar{x}}{a} \right)^3 \left(\frac{-\sin \theta}{a} \right) + 4 \left(\frac{\bar{y}}{b} \right)^3 \left(\frac{-\cos \theta}{b} \right) \quad (16)$$

当 $z_k = \theta$ 时,导数项 $\partial \phi_k / \partial z_k$ 可表示为

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial z_k} = 4 \left(\frac{\bar{x}}{a} \right)^3 \frac{-\sin \theta \cdot (x - x_0) + \cos \theta \cdot (y - y_0)}{a} + 4 \left(\frac{\bar{y}}{b} \right)^3 \frac{-\cos \theta \cdot (x - x_0) - \sin \theta \cdot (y - y_0)}{b} \quad (17)$$

关于体积约束 g_1 , g_2 和非重叠约束 g_3 对设计变量的灵敏度可直接求导获得,这里省略其细节推导.

3 数值处理

众所周知,由于有限元网格离散的影响,基于单元密度的拓扑优化方法经常遭受棋盘格和网格依赖性数值不稳定性问题.为了获得清晰的黑白设计、避免网格依赖性问题,这里使用 Sigmund^[30] 提出的灵敏度过滤技术来修改式 (9) 中的灵敏度

$$\frac{\partial J}{\partial \rho_i} = \frac{\sum_{j=1}^{N_i} w(\mathbf{x}_j) \rho_j \frac{\partial J}{\partial \rho_j}}{\rho_i \sum_{j=1}^{N_i} w(\mathbf{x}_j)} \quad (18)$$

其中,权重函数 $w(\mathbf{x}_j)$ 定义为

$$w(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} r_{\min} - r_{i,j}, & \text{if } r_{i,j} < r_{\min} \\ 0, & \text{if } r_{i,j} \geq r_{\min} \end{cases} \quad (19)$$

式中, $r_{i,j}$ 为单元 i 和单元 j 之间的距离, N_i 是以单元 i 为中心、半径为 r_{\min} 的圆形邻域内的单元个数.

上述优化问题可以用不同的优化算法来求解,如系列二次规划算法 (SQP)^[31],移动渐近线算法 (MMA)^[32] 等.本文采用 MMA 算法求解上述优化问题.对于单相材料设计,当满足以下收敛条件时,优化过程停止迭代

$$\frac{\|\boldsymbol{\rho}_k - \boldsymbol{\rho}_{k-1}\|_2}{\|\boldsymbol{\rho}_k\|_2} \leq \varepsilon \quad (20)$$

式中, k 为当前的迭代步数, ε 为容许的收敛误差.

由于过滤引起的平均效应会导致结构边界存在一些以灰度呈现的中间密度,对此可以采用文献 [33-34] 描述的两阶段优化策略来抑制,即在第一阶段采用式 (18) 定义的灵敏度过滤技术,目的在于消除棋盘格现象和网格依赖性问题.第二阶段不采用过滤技术直至优化收敛,得到清晰的拓扑优化构型.两个阶段的收敛精度分别设定为 0.25% 和 0.1%.

4 数值算例与讨论

本节通过多个算例阐释本文方法的有效性, 包括单相材料设计和多相材料设计算例. 不失一般性, 本文只考虑二维优化问题. 除非特殊声明, 所有算例中变量和几何参数均使用无量纲参数. 对于单相材料优化问题, 弹性模量和泊松比分别设置为 1 和 0.3. 对于多相材料优化问题, 材料 1 和 2 的弹性模量分别设置为 $E_1 = 1$ 和 $E_2 = 3$, 两种材料的泊松比均设为 0.3. 为了便于计算, 所有角度坐标均以弧度表示. 所有的孔洞只准许在设计域内移动或旋转.

4.1 悬臂梁: 非重叠约束有效性验证

第一个悬臂梁优化算例验证非重叠约束的有效性. 几何区域和边界条件如图 3 所示, 其中还包括两个半径为 10 的圆形孔洞. 设计域左边固支, 右边中点处受单位集中载荷 $F = 1$ 作用. 由于本算例中考虑的嵌入孔洞是圆形的, 因此只有圆心的坐标被视为设计变量. 两个圆形孔洞的中心最初位置为 (30.00, 30.00) 和 (90.00, 30.00). 设计域用 120×60 平面应力单元来离散. 材料准许的体积分数设定为 0.4.

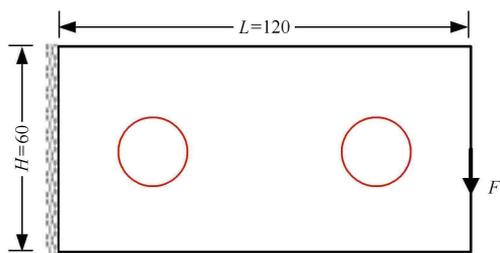


图 3 悬臂梁的设计域和边界条件
Fig. 3 Design domain and boundary condition of cantilever beam problem

图 4 和图 5 分别显示了不考虑非重叠约束和考虑非重叠约束下的拓扑优化结果, 分别标记为 Case 1 和 Case 2. 由图 4 可知, 在不考虑非重叠约束的测试算例 (Case 1) 中, 两个圆孔的中心最终位于 (0.15, 29.66) 和 (95.99, 30.05) 处, 很明显第一个孔洞 (即左侧的孔洞) 与预定义的设计域边界重叠了. 由图 5 可知, 在考虑非重叠约束的测试算例 (Case 2) 中, 第一个孔洞完全被设计领域边界所限制. 两个圆形孔洞的中心最终分别位于 (10.02, 30.05) 和 (95.99, 30.52). 这证明了非重叠约束可以有效地避免嵌入孔洞和设计域边界之间的重叠.

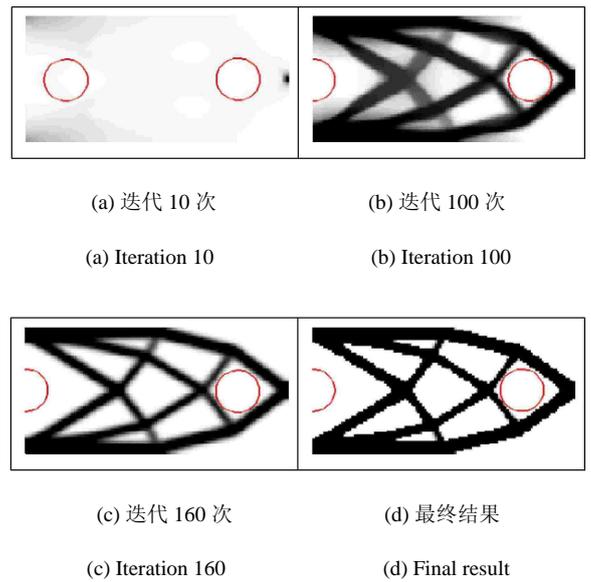


图 4 不考虑非重叠约束的悬臂梁优化结果
Fig. 4 Optimization results of cantilever beam without considering the non-overlap constraint

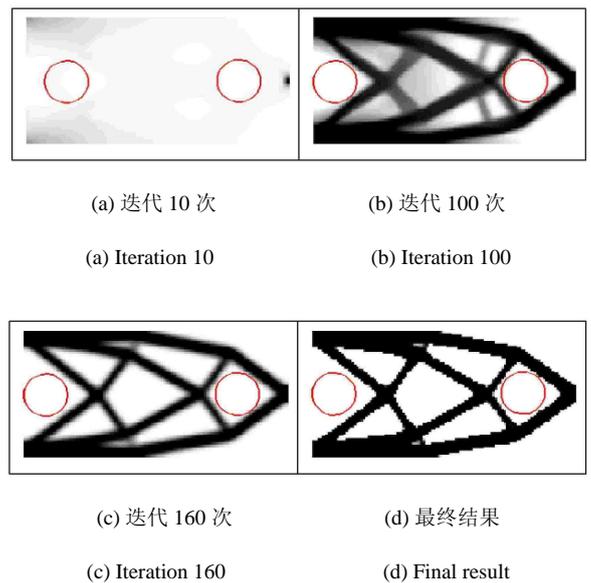


图 5 考虑非重叠约束的悬臂梁优化结果
Fig. 5 Optimization results of cantilever beam with considering the non-overlap constraint

图 6 给出了考虑非重叠约束下目标函数和体积分数的迭代历史. 从图 6 可知, 本文方法优化迭代过程实现了稳定的收敛. 目标函数值从开始到第 62 个迭代步是不断增加的, 这是由于体积分数的减小导致的. 当体积分数达到预定的阈值, 目标函数值开始稳步下降, 最终收敛到 75.57 的最优值.

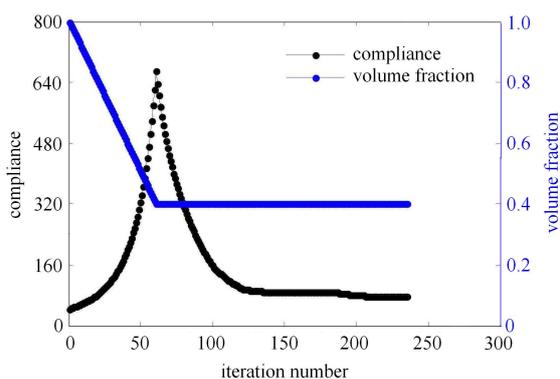


图 6 目标函数和体积分数的收敛历史

Fig. 6 Convergence histories of the objective function and volume fraction

4.2 MBB 梁: 讨论孔洞位置、大小、方向的影响

第二个 MBB 梁优化算例讨论嵌入孔洞的位置、大小、方向对拓扑构型的影响. 几何区域和边界条件如图 7(a) 所示, 结构在顶部中心位置处受单位集中载荷 $F = 1$ 作用. 充分利用对称性, 考虑一半的设计域, 如图 7(b) 所示. 图 7(b) 显示的一半的设计域由 180×60 平面应力单元来离散. 材料准许的体积分数设定为 0.4. 此算例中考虑将一个圆形孔洞和两个圆角方形孔洞嵌入到设计域中.

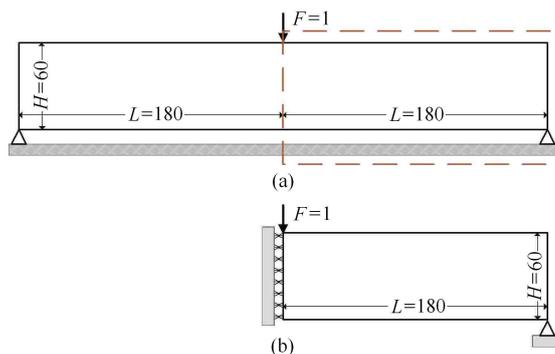


图 7 MBB 梁的设计域和边界条件

Fig. 7 Design domain and boundary condition of MBB beam problem

表 1 显示了 5 种不同初始布局下的拓扑优化结果, 分别标记为 Case 3, Case 4, Case 5, Case 6 和 Case 7. Case 3 和 Case 4 的圆形孔洞半径为 10, 圆角方形孔洞的边长为 20. Case 3 和 Case 4 之间的区别在于嵌入孔洞的初始位置不同. Case 5 和 Case 6 的圆形孔洞半径为 14, 圆角方形孔洞的边长为 28. Case 7 的圆形孔洞半径为 16, 圆角方形孔洞的边长为 32. Case 5 和 Case 6 之间的区别在于嵌入孔洞的初始方向不同. Case 4 和 Case 5 之间的区别在于嵌入孔洞的尺寸不同. Case 6 和 Case 7 之间的区别也在于嵌入孔洞的尺寸不同.

表 1 嵌入孔洞不同初始布局下的优化结果

Table 1 Optimization results for different initial layouts of the embedded holes

Cases	Initial layout	Optimized structure
Case 3		
Case 4		
Case 5		
Case 6		
Case 7		

表 2 中列出了 5 种不同初始布局下 3 个嵌入孔洞的初始位置、优化后的位置及对应的目标函数值. 比较表 1 和 2 中的优化结果, 可以发现, 嵌入孔洞的位置、大小、方向对拓扑构型和目标函数值均有影响. 对比 Case 4 和 Case 5, Case 6 和 Case 7 的目标函数可知, 嵌入孔洞的尺寸越大, 结构的柔顺度值也变大, 对应的结构刚度变小, 也就是说结构性能变差. 因此, 在实际工程优化问题中需要根据需求做合适的选择.

表 2 嵌入孔洞不同初始布局下的优化结果

Table 2 Optimization results for different initial layouts of the embedded holes

Cases	Initial layout	Optimized layout	J
Case 3	(40, 30, 0)	(81.4, 30.1, -0.57)	221.7
	(90, 30)	(127.3, 34.2)	
	(140, 30, 0)	(152.6, 16.2, -1.13)	
Case 4	(20, 30, 0)	(14.6, 27.0, 0.12)	225.6
	(60, 30)	(126.5, 32.9)	
	(100, 30, 0)	(152.2, 16.2, -1.13)	
Case 5	(20, 30, 0)	(19.9, 28.8, 3.3×10^{-8})	229.3
	(60, 30)	(88.8, 32.5)	
	(100, 30, 0)	(143.2, 21.7, 0.5)	
Case 6	(20, 30, $\pi/4$)	(19.4, 29.4, -0.09)	229.5
	(60, 30)	(97.8, 34.3)	
	(100, 30, $\pi/4$)	(145, 21.4, 0.5)	
Case 7	(20, 30, $\pi/4$)	(19.6, 28.2, -0.09)	244.1
	(60, 30)	(86.9, 33.8)	
	(100, 30, $\pi/4$)	(144.9, 231, 2.17)	

4.3 L 型梁: 多相材料布局优化问题

本算例考虑带有 3 个嵌入孔洞的多相材料 L 型梁设计问题. 设计域和边界条件如图 8 所示, 其中还包括 3 个半长轴为 10、半短轴为 8 的圆角方形孔洞.

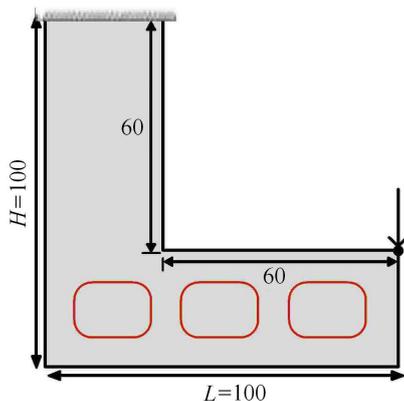
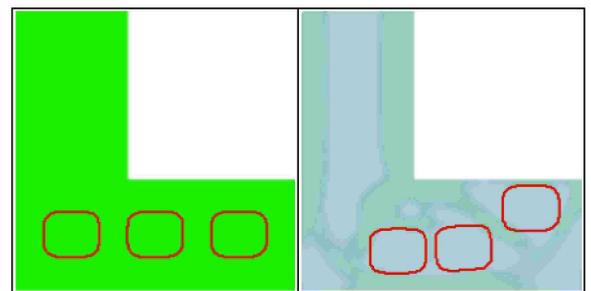


图 8 L 型梁的设计域和边界条件

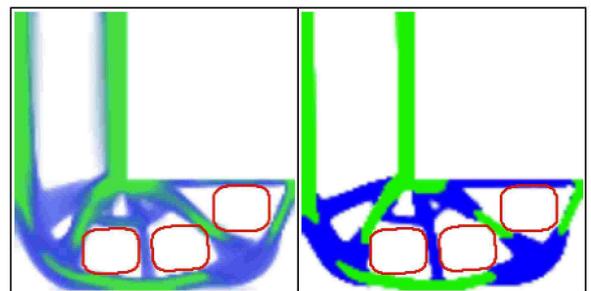
Fig. 8 Design domain and boundary condition of L-shaped beam problem

3 个孔洞中心的初始位置分别为 (20,20), (50,20) 和 (80,20). 结构顶部边界固支, 右边界顶部受单位集中载荷 $F = 1$ 作用. 对于两种固体材料, 体积分数约束均设置为 20%, 即整个设计域的 60% 为空洞. 设计域由 6400 个四边形平面应力单元来离散. 为了简单起见, 我们采用第 3 节介绍的第一阶段收敛策略, 即在 整个多相材料设计过程中始终使用由式 (18) 定义的过滤技术. 两个密度变量 ρ_1 和 ρ_2 的容许收敛误差均设置为 0.1%.

图 9 给出了拓扑优化结果, 其中强材料 2 和弱材料 1 分别用绿色和蓝色表示. 图 10 显示了目标函数和体积分数的收敛历史. 从优化结果可以看出, 与单相材料设计一样, 目标函数先随着体积分数的减小而逐渐增大, 当达到目标体积时, 体积分数保持不变, 目标函数又逐渐减小, 最终收敛到 102.13 的最优值. 对于多相材料设计, 这些嵌入孔洞也可以找到合适的位置来保持结构的完整性. 强材料主要分布在设计域的负载端和固定端, 而弱材料主要分布于刚性的材料之间. 另外, 还可以观察到, 在前 160 次迭代中, 3 个圆角方形孔洞的位置变化较大. 相反,



(a) 起始状态 (a) Initial state
(b) 迭代 130 次 (b) Iteration 130



(c) 迭代 200 次 (c) Iteration 200
(d) 最终结果 (d) Final result

图 9 考虑 3 个嵌入孔洞的 L 型梁的优化结果
Fig. 9 Optimization results of L-shaped beam with three embedded holes

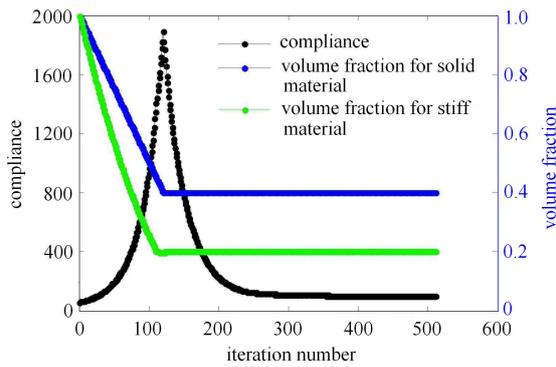


图 10 目标函数和体积分数的收敛历史
Fig. 10 Convergence histories of the objective function and volume fraction

嵌入孔洞的位置在随后的迭代中仅略微改变, 并且最终位于 (34.38,14.00), (59.09,15.00) 和 (81.00,29.33). 3 个嵌入孔洞相对于水平面的旋转角度 (弧度) 分别为 0.028 2, 0.062 8 和 0.0314.

为了比较, 图 11 显示了没有考虑嵌入孔洞情况下 L 型梁的多相材料拓扑优化结果, 对应的目标函数数值为 99.01. 对比图 9 和图 11 的优化结果, 可以看出考虑嵌入孔洞的拓扑构型与不考虑嵌入孔洞的拓扑构型明显不同, 这也说明在连续体结构设计中考虑孔洞的必要性. 对比两种情况下目标函数值可知, 考虑嵌入孔洞的结构虽然满足设计要求, 但是其对应的柔顺度相对变大, 对应的结构刚度变小, 说明考虑嵌入孔洞对结构的力学性能也有影响.

为了进一步说明所提方法的有效性, 将式 (7) 定义的两相材料插值格式进一步推广到内嵌移动孔洞的三相材料拓扑优化问题中, 其表达式为



图 11 未嵌入孔洞的 L 型梁的优化结果
Fig. 11 Optimization results of L-shaped beam without embedded holes

$$E_e = (\rho_1^e)^{p_1} \{ (\rho_2^e)^{p_2} [(\rho_3^e)^{p_3} E_3 + (1 - (\rho_3^e)^{p_3}) E_2] + (1 - (\rho_2^e)^{p_2}) E_1 \} \eta_e^q \quad (21)$$

其中, E_1, E_2 和 E_3 分别为材料 1、材料 2 和材料 3 的杨氏模量. p_1, p_2, p_3, q 为惩罚参数. ρ_1, ρ_2 和 ρ_3 为定义材料相的密度变量. $\rho_1 = 1$ 或 0 表示单元是实体材料或空洞; ρ_2 和 ρ_3 取值 1 或 0 控制着实体结构中不同材料相的选择.

仍然考虑上面内嵌 3 个移动孔洞的 L 型梁优化算例. 设计域与边界条件以及嵌入孔洞的初始布局均与上面算例相同, 不同的是此算例考虑三相材料优化问题. 材料 1、材料 2 和材料 3 的弹性模量分别设置为 $E_1 = 1, E_2 = 3$ 和 $E_2 = 5$, 3 种材料的泊松比均设为 0.3. 对于 3 种固体材料, 体积分数分别设置为 20%, 10% 和 10%, 即保留整个设计域的 60% 为空洞. 为了方便, 此算例设置最大的迭代次数为 400.

图 12 给出了拓扑优化结果, 其中材料 1、材料 2 和材料 3 分别用粉色、蓝色和绿色表示. 目标函数最终收敛到 80.05 的最优值. 3 个嵌入孔洞的中心最终分别位于 (35.03, 14.28), (60.15, 14.00) 和 (82.00, 29.25). 从优化结果可知, 对于内嵌孔洞的三相材料拓扑优化问题, 本文方法也能够得到清晰的拓扑构型, 这进一步说明本文方法的有效性.

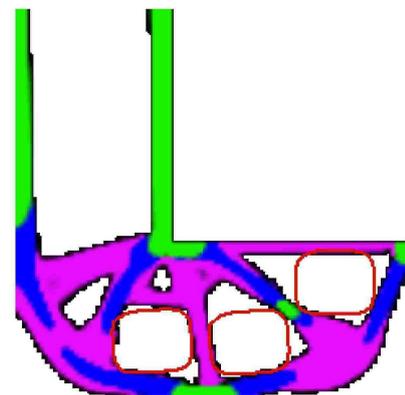


图 12 考虑 3 个嵌入孔洞的 L 型梁的优化结果
Fig. 12 Optimization results of L-shaped beam with three embedded holes

5 结 论

本文提出一种有效求解内嵌多个移动孔洞的多相材料布局优化问题的拓扑优化方法. 在当前的优化问题中, 需要同时确定嵌入孔洞的最佳位置和方向, 以及多相材料的拓扑构型, 以最大化整个结构系

统的刚度. 为此, 使用水平集函数描述嵌入孔洞的几何形状. 将定义多相材料结构拓扑的材料密度以及描述嵌入孔洞的位置和方向的几何参数作为设计变量. 使用平滑化的 Heaviside 函数将嵌入的孔洞投影到固定网格上的密度场, 可以有效地避免重新划分网格的繁琐并改善计算效率. 引入一种在有限元水平上调用的类 SIMP 材料插值格式将这两个看似不同的设计变量形式结合到一个统一的计算框架中, 实现嵌入孔洞位置、方向和多相材料结构拓扑的同步优化. 算例表明所提方法可以有效处理带有多个嵌入孔洞的多相材料布局优化问题.

参 考 文 献

- Zhang W, Xia L, Zhu J, et al. Some recent advances in the integrated layout design of multicomponent systems. *Journal of Mechanical Design*, 2011, 133(10): 104503
- Wang Y, Luo Z, Zhang X, et al. Topological design of compliant smart structures with embedded movable actuators. *Smart Materials and Structures*, 2014, 23(4): 045024
- 吴曼乔, 朱继宏, 杨开科等. 面向压电智能结构精确变形的协同优化设计方法. *力学学报*, 2017, 49(2): 380-389 (Wu Manqiao, Zhu Jihong, Yang Kaik, et al. Integrated layout and topology optimization design of piezoelectric smart structure in accurate shape control. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(2): 380-389 (in Chinese))
- Li Y, Wei P, Ma H. Integrated optimization of heat-transfer systems consisting of discrete thermal conductors and solid material. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2017, 113: 1059-1069
- Qian Z, Ananthasuresh GK. Optimal embedding of rigid objects in the topology design of structures. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2004, 32(2): 165-193
- Zhu J, Zhang W, Beckers P, et al. Simultaneous design of components layout and supporting structures using coupled shape and topology optimization technique. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2008, 36(1): 29-41
- Xia L, Zhu J, Zhang W, et al. An implicit model for the integrated optimization of component layout and structure topology. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, 257: 87-102
- Kang Z, Wang Y, Wang Y. Structural topology optimization with minimum distance control of multiphase embedded components by level set method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, 306: 299-318
- Zhang W, Zhong W, Guo X. Explicit layout control in optimal design of structural systems with multiple embedding components. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, 290: 290-313
- Wang X, Long K, Hoang VN, et al. An explicit optimization model for integrated layout design of planar multi-component systems using moving morphable bars. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 342: 46-70
- Zhu J, Guo W, Zhang W, et al. Integrated layout and topology optimization design of multi-frame and multi-component fuselage structure systems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2017, 56(1): 21-45
- Xia L, Zhu J, Zhang W. A superelement formulation for the efficient layout design of complex multi-component system. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2012, 45(5): 643-655
- Liu P, Kang Z. Integrated topology optimization of multi-component structures considering connecting interface behavior. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 341: 851-887
- 张卫红, 郭文杰, 朱继宏. 部件级多组件结构系统的整体式拓扑布局优化. *航空学报*, 2015, 36(8): 2662-2669 (Zhang Weihong, Guo Wenjie, Zhu Jihong. Integrated layout and topology optimization design of multi-component systems with assembly units. *Acta Aeronauticae Astronautica Sinica*, 2015, 36(8): 2662-2669 (in Chinese))
- Zhu J, Zhang W, Beckers P. Integrated layout design of multi-component system. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, 78(6): 631-651
- 朱继宏, 赵华, 刘涛等. 简谐力激励下多组件结构系统的整体优化设计. *航空学报*, 2018, 39(1): 231-242 (Zhu Jihong, Zhao Hua, Liu Tao, et al. Integrated layout and topology optimization design of multi-component structure system under harmonic force excitation. *Acta Aeronauticae Astronautica Sinica*, 2018, 39(1): 231-242 (in Chinese))
- Kang Z, Wang Y. Integrated topology optimization with embedded movable holes based on combined description by material density and level sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, 255: 1-13
- Clausen A, Aage N, Sigmund O. Topology optimization with flexible void area. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, 50(6): 927-943
- 龙凯, 王选, 韩丹. 基于多相材料的稳态热传导结构轻量化设计. *力学学报*, 2017, 49(2): 359-366 (Long Kai, Wang Xuan, Han Dan. Structural light design for steady heat conduction using multi-material. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(2): 359-366 (in Chinese))
- Chen J, Shapiro V, Suresh K, et al. Shape optimization with topological changes and parametric control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, 71(3): 313-346
- Hoang VN, Jang GW. Topology optimization using moving morphable bars for versatile thickness control. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 317: 153-173
- 牛飞, 王博, 程耿东. 基于拓扑优化技术的集中力扩散结构设计. *力学学报*, 2012, 44(3): 528-536 (Niu Fei, Wang Bo, Cheng Gengdong. Optimum topology design of structural part for concentration force transmission. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, 44(3): 528-536 (in Chinese))
- 郭旭, 赵康. 基于拓扑描述函数的连续体结构拓扑优化方法. *力学学报*, 2004, 36(5): 520-526 (Guo Xu, Zhao Kang. A new topology description function based approach for structural topology optimization. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2004, 36(5): 520-526 (in Chinese))
- 王选, 刘宏亮, 龙凯等. 基于改进的双向渐进结构优化法的应

- 力约束拓扑优化. 力学学报, 2018, 50(2): 385-394 (Wang Xuan, Liu Hongliang, Long Kai, et al. Stress-constrained topology optimization based on improved bi-directional evolutionary optimization method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(2): 385-394 (in Chinese))
- 25 王选, 胡平, 祝雪峰等. 考虑结构自重的基于 NURBS 插值的 3D 拓扑描述函数法. 力学学报, 2016, 48(6): 1437-1445 (Wang Xuan, Hu Ping, Zhu Xuefeng, et al. topology description function approach using NURBS interpolation for 3D structures with self-weight loads. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(6): 1437-1445 (in Chinese))
- 26 Rong JH, Tang ZL, Xie YM, et al. Topological optimization design of structures under random excitations using SQP method. *Engineering Structures*, 2013, 56: 2098-2106
- 27 Xia Q, Wang MY, Shi T. Topology optimization with pressure load through a level set method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, 283: 177-195
- 28 Wei P, Li Z, Li X, et al. An 88-line MATLAB code for the parameterized level set method based topology optimization using radial basis functions. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, 58(2): 831-849
- 29 Gao T, Zhang W. A mass constraint formulation for structural topology optimization with multiphase materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 88(8): 774-796
- 30 Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 21(2): 120-127
- 31 Rojas-Labanda S, Stolpe M. An efficient second-order SQP method for structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, 53(6): 1315-1333
- 32 Svanberg K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(2): 359-373
- 33 Sigmund O, Aage N, Andreassen E. On the (non-) optimality of Michell structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, 54(2): 361-373
- 34 Long K, Wang X, Gu X. Multi-material topology optimization for the transient heat conduction problem using a sequential quadratic programming algorithm. *Engineering Optimization*, 2018, 50(12): 2091-2107