固体力学

含孔隙变厚度 \mathbf{FG} 圆板的湿热力学响应¹

戴婷戴宏亮2) 李军剑贺其

(湖南大学机械与运载工程学院,长沙410082)

摘要 功能梯度材料 (functionally graded materials, FGM) 是组份含量按特定方向连续变化的非均匀复合材料, 可有效解决传统复合材料组份之间结合能力弱和不同组份性能难以协调等问题,达到诸如缓和应力集中和优 化应力分布等效果,使整体材料在保持细观结构完整性的同时充分发挥各组份材料的性能优势.由于制备技 术等原因或出于特殊功能的需要,微孔或孔隙是各类型 FGM 中的常见缺陷.从细观结构上看,多孔 FGM 中 的孔隙包含了单一组份内的材料孔隙和组份微粒间的结构间隙,这些孔隙将对 FGM 的力学性能,尤其是在 湿热环境下的力学行为产生影响.本文考虑 FGM 中的两类细观孔隙 (材料孔隙和结构孔隙),提出了令各类 孔隙依赖于各自组份变化,再线性叠加得到的整体孔隙计算式.考虑组份材料和孔隙填充物 (液相水和水蒸 气)性质的温度相关性,建立了湿热相关 FGM 材料模型.针对厚度沿径向变化的旋转圆板结构,应用该 FGM 材料模型,推导了圆板的非线性稳态湿热控制方程及考虑湿热弹性本构的位移控制方程,采用微分求积法 (differential quadrature method, DQM),获得了圆板的湿热场、位移场和应力分布.在数值算例中,利用退化模 型的解析解对本文的数值计算方法进行了验证,继而通过改变各关键参数,讨论了两类孔隙率、梯度指数和 圆板厚度变化对含孔隙 FGM 变厚度旋转圆板湿热力学响应的影响规律.

关键词 湿热环境,孔隙率,功能梯度,变厚度,圆板,微分求积法

中图分类号: O343.7 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-18-280

HYGROTHERMAL MECHANICAL BEHAVIOR OF A FG CIRCULAR PLATE WITH VARIABLE THICKNESS ¹⁾

Dai Ting Dai Hongliang²⁾ Li Junjian He Qi

(College of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract Functionally graded materials (FGMs) are composed of two or more discrete constituent phases with continuous and smoothly varying components. Due to the distinctive merit comparing with usual composite materials that they can reduce the stress concentration and optimize the stress distribution to make good use of each component, utilizing of FGMs helps to resolve some problems in composite materials such as low bond strength and inharmonious of properties effectively. Because of the preparation technology or for the need of special structures, micropores or pores are commonly found in various types of FGM and play an important role in the influence factors on mechanical properties of FGMs. In addition, the application conditions of FGMs are usually complex or extreme with multiple physical fields, and the mechanical responses of various FGMs under coupling multi-fields will be more complex. On micro scale, the pores in porous FGM include material pores of each components and structural gaps between different particles. These pores will

1) 湖南省自然科学基金项目 (2017JJ2044) 和长沙市科技局项目 (Kq1701030) 资助.

2) 戴宏亮,教授,主要研究方向:智能材料与结构力学. E-mail: hldai520@sina.com

引用格式: 戴婷, 戴宏亮, 李军剑, 贺其. 含孔隙变厚度 FG 圆板的湿热力学响应. 力学学报, 2019, 51(2): 512-523

Dai Ting, Dai Hongliang, Li Junjian, He Qi. Hygrothermal mechanical behavior of a FG circular plate with variable thickness. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(2): 512-523

²⁰¹⁸⁻¹⁰⁻²² 收稿, 2018-12-20 录用, 2018-12-20 网络版发表.

affect the properties of FGM, especially under hygrothermal environments. In this paper, two kinds of micro pores (material pores and structural gaps) in FGM are both considered. An expression to characterize porosity of the whole FGM is proposed, where the porosity of each component is related to its volume fraction and the global porosity is a linear superposition. Considering temperature dependency of the component properties as well as the material properties of pore fillers (liquid water or vapor), a prediction model of the porous FGM is established. Focusing on a rotating circular plate with its thickness varying along the radial direction, and applying the current porous FGM model, governing equations of the nonlinear steady-state temperature and moisture fields as well as displacement field are derived. Solving the governing equations by the differential quadrature method (DQM), distributions of temperature, moisture, displacement and stress of the FG circular plate are obtained. In the numerical examples, analytic solution of a simplified mechanical model is carried out to verify the numerical calculation process of the current study. By changing the key parameters, influences of each porosity, gradient index and thickness change rule on the hygrothermal mechanical responses of the porous FG circular plate with variable thickness are discussed in detail.

Key words hygrothermal environment, porosity, FGM, variable thickness, circular plate, DQM

引 言

功能梯度材料 (functionally graded material, FGM) 作为组份和性质连续变化的复合材料,常被设计用 于具多物理场或环境条件变化剧烈的结构.含孔隙 FGM 的性能,不仅与组份材料及其变化规律相关, 还受到孔隙率的影响,尤其是在会引起孔隙填充物 变化的湿热环境中.因此,建立有效的力学模型进 行含孔隙 FGM 性质预测,并据此研究湿热环境下 多孔功能梯度 (functionally graded, FG) 结构的力学 响应,对 FGM 的设计和工程推广应用具有重要的 意义.

国内外对 FG 结构静、动力学行为的分析已很丰 富. 基于高阶剪切变形方法及里兹法, Heydari 等^[1] 研究了 Pasternak 弹性基础上 FG 圆板在均匀径向压 缩作用下的屈曲行为. 通过不同的加载方式, Moita 等^[2]研究了FG板在不同载荷作用下的屈曲行为 和几何非线性行为. 基于一阶剪切理论及有限元分 析,Yu 等^[3]研究了FG 板在温度和机械载荷作用下 的屈曲行为.应用改进的无网格法, Nguyen 等^[4]研 究了 FG 板的非线性静动态力学行为. 借助牛顿-拉 夫逊方法以及里兹法, Ashoori 和 Vanini^[5] 分析了 FG 压电板的非线性弯曲和后屈曲响应. 基于 Kirchhoff-Love 理论的无旋度等几何公式, Yin 等 6 分析了 FG 薄板的自由振动和屈曲行为.考虑尺度效应和剪切 变形, Thai 等 [7] 采用应变梯度理论和等几何法分析 了 FG 微板的力学行为. 基于 von Kármán 几何非线性 理论, 张靖华等^[8]研究了热冲击作用下具缺陷 FG 圆板的动态屈曲及后屈曲问题. 应用一阶剪切理论

及最小势能原理, Dai 等^[9-10]研究了 FG 圆板的非 线性动态行为和低速冲击作用下的动态响应. 基于 经典板壳理论, Lal 和 Ahlawat^[11]得到了 FG 圆板在 流体静力学平面力下的屈曲力学行为及圆板的振动 特性. 应用一阶剪切变形理论, Yousefzadeh 等^[12]考 虑了旋转惯性效应和横向剪切应力, 解决了 FG 圆 板与不可压缩流体接触时的自由振动问题. 使用微 分求积法, Mahinzare 等^[13]分析了旋转双向 FG 压 电圆板的自由振动,得到了 FGM 压电圆板的振动特 性. 考虑热屈曲变形引入的结构几何非线性, 夏巍 和冯浩成^[14]分析了 FG 壁板的气动弹性颤振. 基于 单向耦合的热传导理论, 许新和李世荣^[15]研究了 FG 微梁的热弹性阻尼. 应用有限元法, 高晨形等^[16] 研究了 FGM 梁在大范围转动下的刚柔耦合动力学 问题.

复合材料在湿热环境下的力学响应及含孔隙复 合材料的力学性能也已受到国内外学者的关注.基 于湿热环境下的力学实验,许良等^[17]分析了碳纤 维环氧复合材料的力学性能及提高力学性能的方法. 利用一阶剪切变形理论和模态叠加法,赵天等^[18]研 究了复合材料层合板在湿热环境下受简谐激励作用 的振动和声辐射特性.运用近场动力学及有限元法, 苏伯阳等^[19]研究了复合材料湿热环境下的冲击损 伤特性.吴振和刘子茗^[20]研究了复合材料层合板在 湿热环境下的力学行为,探讨了湿热膨胀系数对湿 热行为的影响.利用实验的方法,王柏臣等^[21]研究 了湿热环境对聚甲基丙烯酸甲酯混杂纳米复合材料 性能的影响.基于 FG 构件动力分析的细观元法,曹 志远和程红梅 [22] 研究了材料的宏观性能与微观结 构之间的关系,尤其是微观孔隙对宏观性能的影响. 根据三维剪切变形理论, Zenkour^[23]研究了多孔 FG 单层板和夹层板的弯曲响应,并且分析了孔隙率对 材料性能的影响.应用修正后的混合法则,Boutahar 等[24]研究了不同孔隙度下各向同性矩形板的力学 性能. 应用有限元法, Kiran 和 Kattimani^[25]分析了多 孔 FG 磁弹性板的自由振动特性和静态特性,具体 分析了孔隙率对自由振动以及静态性能的影响,利 用哈密顿原理和变分法, Rezaei 等^[26]分析了孔隙率 对 FG 矩形板振动特性的影响,利用修正后的幂律计 算公式, Kiran 等^[27]分析了孔隙度对 FG 板自由振 动以及静力性能的影响. Wang 和 Zu^[28] 分析了多孔 FG 板在热环境中的振动. 为快速分析功能梯度材料 结构在复杂载荷作用下的动态响应,郑保敬等[29]提 出了一种模型降阶方法,并且验证了其准确性和适 用性. 基于 Euler-Bernoulli 梁理论和单向耦合的热传 导理论, 许新和李世荣 [15] 分析了功能梯度梁的热弹 性阻尼的变化.

FGM 细观尺度上的孔隙,包括了组份材料本身 带有的材料孔隙和不同微粒之间无法充分接触而形 成的界面结构孔隙.以往的多孔 FGM 模型,仅采用 了整体孔隙表达式,而并未对不同类型的孔隙进行 表征.因此,本文将从细观结构出发,建立各类孔 隙与相应组份含量的关系,并考虑组份和孔隙填充 物性质的湿热相关性,提出多孔 FGM 的材料模型, 并将所建立的材料模型应用于旋转变厚度圆板结构, 分析其在湿热环境下的力学响应.

1 材料模型和几何模型

考虑绕中心轴旋转的空心变厚度圆板,其内外 半径分别为 R_{in} 和 R_{out},内外边缘厚度分别为 H_{in} 和 H_{out}.构成该圆板的 FGM 包含陶瓷和金属组份,并 具有沿环向均匀分布的孔隙.圆板的材料性质参数 P 满足如下关系^[30]

$$P = P_{\rm c}V_{\rm c} + P_{\rm m}V_{\rm m} + P_{\rm p}V_{\rm p} \tag{1}$$

且各组份材料的体积分数满足

$$V_{\rm c} + V_{\rm m} + V_{\rm p} = 1$$
 (2)

其中, P_c 和 P_m 分别表示陶瓷 (ceramic) 和金属 (metal) 组份的材料性质, P_p 表示孔隙 (pore) 或孔隙填充物 的材料性质, V_c , V_m 和 V_p 分别表示三者的体积分

数,并且 Vm 随圆板半径呈如下幂函数变化^[30]

$$V_{\rm m}(r) = \frac{1}{1+\eta_{\rm m}} \left(\frac{r-R_{\rm in}}{R_{\rm out}-R_{\rm in}}\right)^n \tag{3}$$

式中, η_m 为金属组份的孔隙参数, $n(0 \le n \le \infty)$ 为FG 指数. 当n = 0时,材料成分全部为金属;当 $n \to +\infty$ 时,材料成分全部为陶瓷. 圆板几何形状、所用柱 坐标系 (r, θ, z)及多孔 FGM 的代表性体积单元 (RVE) 示意图如图 1 所示

本文分别考虑 FGM 各组份本身带有的孔隙及 不同组份结合时产生的界面和结构间隙,上述各类 孔隙与各组份含量相关,故假设 FG 圆板的孔隙体积 分数满足

$$V_{\rm p}(r) = V_{\rm p}^{\rm c}(r) + V_{\rm p}^{\rm m}(r) + V_{\rm p}^{\rm int}(r) = \frac{\eta_{\rm c}}{1 - \eta_{\rm c}} V_{\rm c}(r) + \frac{\eta_{\rm m}}{1 - \eta_{\rm m}} V_{\rm m}(r) + \eta_{\rm int} V_{\rm c}(r) V_{\rm m}(r) \quad (4)$$

其中, V_p , V_p^c , V_p^m 和 V_p^{int} 分别为 FGM、陶瓷组份、 金属组份和结合界面中孔隙所占体积分数; η_c 为陶 瓷组份的孔隙参数; η_{int} 为界面孔隙参数.显然,当 $V_c(r) = 0 或 V_m(r) = 0 时,为单一材料,无界面孔隙,$ $只有单一材料孔隙; 当 <math>V_c(r) = V_m(r)$ 时,界面孔隙率 达到最大.将 (4) 式代入 (2) 式,可得 $V_c(r)$ 和 $V_p(r)$.



Fig. 1 Material and geometrical model of the FG circular plate with variable thickness

考虑到组份材料和孔隙的部分物性参数受温度 的影响,本文采用如下与温度相关的材料参数表达 式^[23]

$$P(r,T) = P_{\rm c}(T)V_{\rm c}(r) + P_{\rm m}(T)V_{\rm m}(r) + P_{\rm p}(T)V_{\rm p}(r)$$
(5)

 $P_j(T) = P_{0j}(1 + P_{1j}T + P_{2j}T^2 + P_{3j}T^3)$ (j = c, m, p) (6)

式中, T 表示温度, P_{ij}(i = 0, 1, 2, 3) 为常数.

湿度的变化是材料中水或水蒸气含量的变化, 将对材料的质量和密度产生影响.由于陶瓷和金属 组份吸湿能力弱,故仅考虑孔隙的吸湿.忽略孔隙内 压强的变化,考虑吸湿孔隙中同时存在气相水和液 相水,孔隙的物性参数满足如下关系

$$P_{\rm p}(r, T, S) = S(r)P_{\rm w}(T) + [1 - S(r)]P_{\rm v}(T)$$
(7)

其中, S(r) 表示液相水饱和度 (或称填充率),在 此处为孔隙吸湿后液相水占据孔隙的体积分数,即 $S(r) = V_w(r)/V_p(r)$,显然有 $0 \leq S(r) \leq 1$.

考虑 FG 圆板厚度沿径向变化,采用如下规律

$$h(r) = H_{\rm in} + (H_{\rm out} - H_{\rm in}) \left(\frac{r - R_{\rm in}}{R_{\rm out} - R_{\rm in}}\right)^{\lambda}$$
(8)

其中 λ(λ ≥ 0) 是控制厚度变化规律的几何参数.

2 控制方程及求解

2.1 湿热控制方程及其 DQM 求解

当 FG 圆板仅有沿径向变化的温度和湿度场时, 不计湿热传导过程,采用无源一维稳态温度和湿度 方程如下

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left[rh(r)\kappa(r,T) \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \right] = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[rh(r)D(r,T,S)\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}r}\right] = 0 \tag{10}$$

式中, T = T(r), C = C(r). 仅考虑固体组份的传热, 热传导系数 $\kappa(r,T)$ 满足式 (5), 且 $\kappa_p(T) = 0$; 仅考虑 孔隙传湿,而忽略金属和陶瓷材料的吸湿性时,扩 散系数 $D(r,T,S) = D_p(r,T,S)$ 满足式 (7).

由于吸湿后材料的湿度 C = (m_w + m_v)/m_{dry},则 液相水饱和度和材料湿度之间有如下线性关系

$$C = \frac{(\rho_{\rm w} - \rho_{\rm v})V_{\rm p}}{\rho_{\rm c}V_{\rm c} + \rho_{\rm m}V_{\rm m}}S + \frac{\rho_{\rm v}V_{\rm p}}{\rho_{\rm c}V_{\rm c} + \rho_{\rm m}V_{\rm m}}$$
(11)

注意到,由于忽略了孔隙中的空气,即采用了 $V_p = V_w + V_v$,故仅当 $V_p = 0$ (无孔隙)时有 C = 0.总湿度 中液相水分量 C_w 和水蒸气分量 C_v 分别为

$$C_{\rm w} = \frac{\rho_{\rm w} V_{\rm p}}{\rho_{\rm c} V_{\rm c} + \rho_{\rm m} V_{\rm m}} S, \ C_{\rm v} = C - C_{\rm w}$$
(12)

当 *S* = 0 时,材料中无液相水;当 *S* = 1 时,材料达 到吸水饱和.利用式(11),则湿度方程式(10)可用液 相水填充率 *S* 表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{rh(r)D(r,T,S)\left[\frac{\mathrm{d}\left(f_{\mathrm{S1}}S\right)}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{S2}}}{\mathrm{d}r}\right]\right\} = 0 \qquad (13)$$

其中

戴婷等:含孔隙变厚度 FG 圆板的湿热力学响应

$$S = S(r)$$

$$f_{S1} = \frac{(\rho_w - \rho_v)V_p(r)}{\rho_c V_c(r) + \rho_m V_m(r)}$$

$$f_{S2} = \frac{\rho_v V_p(r)}{\rho_c V_c(r) + \rho_m V_m(r)}$$

不计材料表面与外界的温度和物质交换,给定 FG 圆板内外边界湿热条件如下

$$T(R_{\rm in}) = T_{\rm in}, T(R_{\rm out}) = T_{\rm out}$$
(14)

$$S(R_{\rm in}) = S_{\rm in}, S(R_{\rm out}) = S_{\rm out}$$
(15)

采用 DQM 对上述湿热传导方程进行求解. DQM 中某个采样点上的微分是由所有采样点上的函数值 求加权和所得,故取少量采样点就可以得到光滑曲 线. r = r_i 处 f(r)的 k 阶导数表达式为^[31-32]

$$\left. \frac{\mathrm{d}^k f(r)}{\mathrm{d}r^k} \right|_{r=r_i} = \sum_{j=1}^q c_{ij}^{(k)} f(r_j) \ (i=1,2,\cdots,q)$$
(16)

式中, q 为沿径向离散采样点总数, c 为权系数, 其 表达式为

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{\prod (r_i)}{(r_i - r_j) \prod (r_j)} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, q; j \neq i)$$

$$c_{ij}^{(k)} = k \left[c_{ii}^{(k-1)} \cdot c_{ij}^{(1)} - \frac{c_{ij}^{(k-1)}}{r_i - r_j} \right] \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, q;$$

$$j \neq i; k = 2, 3, \cdots, q)$$

$$c_{ii}^{(k)} = -\sum_{j=1, j \neq i}^{q} c_{ij}^{(k)} \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, q)$$

$$(17)$$

其中 $\prod (r_i) = \prod_{j=1, j\neq i}^{q} (r_i - r_j).$

为提高计算精度,采用如下非均匀的 Chebyshev-Gauss-Lobatto 采样网格点^[31]沿径向离散

$$r_{i} = \frac{R_{\text{out}} - R_{\text{in}}}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{(i-1)\pi}{q-1}\right) \right] + R_{\text{in}} \ (i = 1, 2, \cdots, q)$$
(18)

基于此,离散后的温度控制方程可写为

$$(r_i h_i \kappa_i) \sum_{j=1}^q c_{ij}^{(2)} T_j + [\kappa_i (rh)'_{r_i} + r_i h_i (\kappa)'_{r_i}] \sum_{j=1}^q c_{ij}^{(1)} T_j = 0$$
(19)

其中 $i = 1, 2, \dots, q$; $h_i = h(r_i)$, $\kappa_i = \kappa(r_i, T_i)$, $T_i = T(r_i)$, ()'_{r_i} = $\frac{d()}{dr} \Big|_{r=r_i}$. 离散以后,式 (14) 表示的温度边界条件为

$$T_1 = T_{\rm in}, T_q = T_{\rm out} \tag{20}$$

式 (19) 和式 (20) 构成一组高阶代数方程,利用牛顿 迭代法可以求解,获得温度场的数值解.

用牛顿迭代法解非线性代数方程 f(x) = 0,是将 f(x)在 x_0 点的某领域内展开成泰勒级数,取其线性部分 (即泰勒展开的前两项),并令其等于 0,以此作为非线性方程的近似方程,即具有迭代关系式 $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$.

将湿度控制方程式 (13) 进行离散,并将温度场数值结果代入,得到

$$[r_{i}h_{i}f_{S1}^{(i)}D_{i}]\sum_{j=1}^{q}c_{ij}^{(2)}S_{j} + \{[(rhf_{S1})'_{r_{i}} + r_{i}h_{i}(f_{S1})'_{r_{i}}]D_{i} + r_{i}h_{i}f_{S1}^{(i)}(D)'_{r_{i}}\}\sum_{j=1}^{q}c_{ij}^{(1)}S_{j} + \{[rh(f_{S1})'_{r_{i}}]D_{i} + r_{i}h_{i}(f_{S1})'_{r_{i}}(D)'_{r_{i}}\}S_{i} + [rh(f_{S2})'_{r_{i}}]D_{i} + r_{i}h_{i}(f_{S2})'_{r_{i}}(D)'_{r_{i}} = 0$$
(21)

其中, $f^{(i)} = f(r_i)$, $C_i = C(r_i)$, $D_i = D(r_i, T_i, S_i)$. 离散 以后, 液相水填充率边界条件为

$$S_1 = S_{\text{in}}, S_q = S_{\text{out}} \tag{22}$$

式 (21) 和式 (22) 构成一组高阶代数方程,利用牛顿 迭代法可以求解.将求得的液相水填充率数值结果 代入式 (11) 和式 (12),即可获得圆板的湿度场及所 含液相水和水蒸气分量.

2.2 位移控制方程及其 DQM 求解

忽略自重,旋转 FG 圆板受径向体力 $f_r(r) = \rho(r)\omega^2 r$.考虑到结构和载荷的对称性,FG 圆板内位移和应力与 θ 无关.于是,圆板的应力平衡方程可写为

 $\frac{\mathrm{d}[h(r)\sigma_r]}{\mathrm{d}r} + \frac{h(r)(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + rh(r)\rho(r)\omega^2 = 0 \qquad (23)$

其中, $\sigma_r = \sigma_r(r)$ 和 $\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta}(r)$ 分别表示径向和环向 应力, 密度 $\rho(r)$ 满足式 (1). 由于湿度扩散是传质过 程, 孔隙的质量密度将与湿度相关.

考虑到平面应力问题,且应变和位移分量只与 径向相关,FG圆板中面的小变形几何方程为

$$\varepsilon_r = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}, \ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$
 (24)

其中, $\varepsilon_r = \varepsilon_r(r)$ 和 $\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta}(r)$ 分别表示径向和环向应变, u = u(r) 表示径向位移.

采用如下湿热弹性本构方程

$$\begin{cases} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11}(r) & Q_{12}(r) \\ Q_{12}(r) & Q_{22}(r) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} + \begin{cases} \varepsilon_r^T \\ \varepsilon_\theta^T \end{bmatrix} + \begin{cases} \varepsilon_r^C \\ \varepsilon_\theta^C \end{bmatrix}$$
 (25)

其中

$$Q_{11}(r) = Q_{11}(r, T) = \frac{E(r, T)}{1 - v(r)^2}$$

$$Q_{12}(r) = Q_{12}(r, T) = \frac{v(r)E(r, T)}{1 - v(r)^2}$$

$$Q_{22}(r) = Q_{11}(r)$$
(26)

E(*r*,*T*) 是弹性模量,满足式 (5) 且 *E*_p = 0; *v*(*r*) 为泊 松比,满足式 (1) 且 *v*_p = 0. 上式中湿热应力分量为

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_r^{\rm T} = \varepsilon_{\theta}^{\rm T} = -\alpha(r)\Delta T(r) \\ \varepsilon_r^{\rm C} = \varepsilon_{\theta}^{\rm C} = -\beta(r)\Delta C(r) \end{array} \right\}$$

$$(27)$$

其中, $\Delta T(r) = T(r) - T_0$, $\Delta C(r) = C(r) - C_0$, T_0 和 C_0 分别为圆板的初始温度和湿度; $\alpha(r) = \alpha(r, T)$ 是热膨 胀系数, $\beta(r) = \beta(r, T)$ 是湿膨胀系数且 $\beta_c = \beta_m = 0$, 则圆板中的湿应变 $\varepsilon_r^C = \varepsilon_{\theta}^C = 0$.

将式 (24) 和式 (25) 代入式 (23), 获得旋转 FG 圆板的位移控制方程如下

$$f_1 \frac{d^2 u}{dr^2} + f_2 \frac{du}{dr} + f_3 u + f_4 = 0$$
(28)

其中

$$f_{1} = h(r)Q_{11}(r)$$

$$f_{2} = Q_{11}(r)\left[\frac{h(r)}{r} + \frac{dh(r)}{dr}\right] + h(r)\frac{dQ_{11}(r)}{dr}$$

$$f_{3} = \frac{Q_{12}(r)}{r}\frac{dh(r)}{dr} + \frac{h(r)}{r}\frac{dQ_{12}(r)}{dr} - \frac{h(r)}{r^{2}}Q_{11}(r)$$

$$f_{4} = rh(r)\rho(r)\omega^{2} - \frac{d\{[Q_{11}(r) + Q_{12}(r)]h(r)\alpha(r)\Delta T(r)\}}{dr}$$

FG 圆板内边与转轴连接,视为固定端,外边自由,则其边界条件可写为

$$u(R_{\rm in}) = 0, \ \sigma_r(R_{\rm out}) = 0$$
 (29)

将式 (24)~式 (26) 代入式 (29), 可得到用位移描述的 边界条件. 同样采用 DQM 对上述位移控制方程进行求解, 离散后的位移控制方程为

$$f_1^{(i)} \sum_{j=1}^q c_{ij}^{(2)} u_j + f_2^{(i)} \sum_{j=1}^q c_{ij}^{(1)} u_j + f_3^{(i)} u_j + f_4^{(i)} = 0$$
(30)

其中, $i = 1, 2, \dots, q$; $f^{(i)} = f(r_i)$, $u_i = u(r_i)$. 用位移表 达的离散边界条件为

$$u_{1} = 0 \ Q_{11}(r_{q}) \sum_{j=1}^{q} c_{qj}^{(1)} u_{j} + Q_{12}(r_{q}) \frac{u_{q}}{r_{q}} - [Q_{11}(r_{q}) + Q_{12}(r_{q})]\alpha(r_{q})\Delta T(r_{q}) = 0$$
(31)

将获得的位移场数值解代入式 (24) 和式 (25) 即可获 得应力场的数值解.

3 算例和讨论

为验证本文数值计算过程的可靠性和正确性, 首先考虑一忽略湿热效应的等厚度旋转均质圆板, 令该均质圆板由金属材料组成,即取参数 E =201.04 GPa, v = 0.326, $\rho = 8166$ kg/m³ 和 $\omega =$ 1000 r/min. 事实上,该均质等厚度圆板力学模型是 本文变厚度旋转 FGM 圆板的一种特殊简化形式,具 体表现为,梯度指数 n = 0 表示 FGM 圆板仅含金属 组份.该均质等厚度圆板的位移控制方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}[r u(r)]}{\mathrm{d}r} \right\} = -\frac{(1-v^2)\rho\omega^2 r}{E}$$

其中, ρ, ω, E 和 ν 均为常数. 通过两次求积分运算, 可以得到上式的通解

$$u(r) = -\frac{(1-\nu^2)\rho\omega^2}{8E}r^3 + \frac{Y_1}{2}r + \frac{Y_2}{r}$$

其中, Y₁和 Y₂ 是待定常数,应用式 (29)的边界条件可以求得,进而可获得该等厚度均质圆板的位移和 应力场解析解.

然后,在本文的数值求解模型中,取 FG 指数 n = 0,圆板厚度 $h(r) \equiv 1$ 及厚度变化指数 $\lambda = 0$, 各组份孔隙参数 $\eta_c = \eta_m = \eta_{int} \rightarrow 0$,湿热场 $T(r) = C(r) \equiv 0$,转速 $\omega = 1000 \text{ r/min}$,则本文模型退化为与 上述均质等厚度圆板一致,将 DQM 计算结果与解 析结果进行对比.

由图 2 可知,两种结果十分吻合,表明了本文数值计算过程的正确性.



后续的算例中考虑湿热环境下的变厚度旋转 FG 圆板,其部分常量材料参为: $\rho_c = 2370 \text{ kg/m}^3, \nu_c = 0.240; \rho_m = 8166 \text{ kg/m}^3, \nu_m = 0.326; \rho_v = 0.017 \text{ kg/m}^3, \rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3 温度相关材料参数见 表 1.$

表1 FGM 温度相关材料参数^[30,33]

	P_0	P_1	P_2	<i>P</i> ₃
$\kappa_{\rm c}/({\rm W}\cdot({\rm m}\cdot{\rm K})^{-1})$	13.723	-1.032×10^{-3}	5.466×10^{-7}	-7.876×10^{-11}
$\alpha_{ m c}/{ m K}^{-1}$	5.872×10^{-6}	9.095×10^{-4}	0	0
$E_{\rm c}/{\rm GPa}$	348.43	-3.070×10^{-4}	2.160×10^{-7}	-8.946×10^{-11}
$\kappa_{\rm m}/({\rm W}\cdot({\rm m}\cdot{\rm K})^{-1})$	15.379	-1.264×10^{-3}	2.092×10^{-6}	-7.223×10^{-10}
$lpha_{ m m}/{ m K}^{-1}$	1.233×10^{-5}	8.086×10^{-4}	0	0
$E_{\rm m}/{\rm GPa}$	201.04	3.079×10^{-4}	-6.534×10^{-7}	0
$D_{\rm v}/({\rm m}^2\cdot{\rm s}^{-1})$	2.176×10^{-5}	9.619×10^{-3}	-1.091×10^{-4}	1.523×10^{-6}
$D_{\rm w}/({\rm m}^2\cdot{ m s}^{-1})$	1.819×10^{-9}	-1.401×10^{-2}	1.290×10^{-3}	-7.874×10^{-6}

Table 1 Temperature dependent material parameters of FGM^[30,33]

3.1 材料参数对 FG 圆板湿热力学行为的影响

取旋转 FG 圆板的几何参数 $R_{in} = 10 \text{ mm}$, $R_{out} = 100 \text{ mm}$, $H_{in} = 1 \text{ mm}$, $H_{out} = 5 \text{ mm}$, $\lambda = 1$; 圆板转速 $\omega = 1000 \text{ r/min}$.

常温干燥条件下,材料参数对圆板弹性模量的 影响如图 3 所示.图 3(a) 给出了不同 FG 指数 n 下 无孔隙 ($\eta_c = \eta_m = \eta_{int} = 0$) 圆板的弹性模量.可知, 当 n = 1 时, FG 圆板材料属性沿径向线性变化;当 0 < n < 1 时, n 值越小,材料整体性质越向金属靠 拢;当n > 1 时, n 值越大,材料整体性质越向陶瓷 靠拢.取 FG 指数 n = 1,图 3(b) 给出了常温干燥条 件下不同孔隙参数对圆板弹性模量的影响.易知,孔 隙的存在使材料的弹性模量整体降低,且孔隙率越 大,降低幅度越大.进一步分析发现,组份孔隙率 η_c 和 η_m 的变化并不影响弹性模量曲线的基本形状,其



影响程度由各组份含量决定;而界面孔隙率 η_{int} 使 弹性模量曲线下凹,影响程度由 V_c·V_m 决定,且影 响幅度最大处发生在沿圆板径向的中部.

取孔隙参数 $\eta_c = \eta_m = \eta_{int} = 10\%$,温度边界条 件 $T_{in} = 373$ K 和 $T_{out} = 273$ K,湿度边界条件 $S_{in} = 0$ 和 $S_{out} = 0.5$, FG 指数 n 对变厚度含孔隙 FG 圆板 湿热力学响应的影响如图 4 所示.从式 (9) 可知, n对温度场的影响来源于其对热传导系数 κ 的影响, 由表可知本文选取的两种组份材料 κ 值相近,故 n对温度场整体影响较小.因此图 4(a) 给出了 n = 1时的温度场,及 n 取其他值时的温度与 n = 1 温度 的差值,简记为 $T_{(n)} - T_{(n=1)}$,以清晰表达 n 对温度 场的影响.由图可见, n 对温度场的影响主要出现 在靠近边界温度较高的一侧,并大致呈现随着 n 增 大,同一半径处温度增大的趋势.同样地,由于 n对湿度场整体影响较小,图 4(b) 给出了 n = 1 时的 湿度场和湿度场差值 $C_{(n)} - C_{(n=1)}$.因本文不考虑组份



responses of the FG circular plate





材料的吸湿性, n 对湿度的影响来源于其对孔隙体 积分数 V_p 的影响. 由图可知, 影响较大处出现在靠 近边界湿度较高的一侧, 并且 $n = 1 \sim 3$ 时整体湿度 值最大, 0 < n < 1 时整体湿度随 n 减小而降低, n > 3时整体湿度随 n 增大而降低. 图 4(c) 和图 4(d) 给出 了取不同 n 值时圆板的径向位移和径向应力, 发现 在同一半径处, 径向位移随 n 值的增大而减小, 结 合图 3(a) 可知这是由于 n 值的增大使圆板整体刚度 增加; $|\sigma_r|$ 的峰值在 0 < n < 1 时随 n 的增大而减小, 在 n > 1 时随 n 的增大而增大, 结合图 3(a) 可知, 组 份均匀变化将有利于缓和 FG 圆板内的应力.

取 FG 指数 n = 1, 温度边界条件 $T_{in} = 373$ K 和 $T_{out} = 273$ K, 湿度边界条件 $S_{in} = 0$ 和 $S_{out} = 0.5$, 孔隙参数对变厚度 FG 圆板湿热力学响应的影响如 图 5 所示. 由于孔隙参数对温度场整体影响较小, 图 5(a) 给出了 $\eta_c = \eta_m = \eta_{int} = 0$ 时的温度场及温度 差 $T_{(\eta)} - T_{(\eta=0)}$, 其中 $T_{(\eta=0)}$ 表示 $\eta_c = \eta_m = \eta_{int} = 0$

时的温度场. 由图易知, 各孔隙参数对温度场影响 最大处出现在靠近边界温度较高一侧;且在同一 半径处,圆板温度随 η_c 的增大而略微减小,随 η_m 或 η_{int} 的增大而略微增大,而 η_c 和 η_m 对温度的 影响相比于 η_{int} 稍大. 图 5(b) 显示各孔隙参数对湿 度场影响最大处出现在靠近边界湿度较高一侧,但 由于本文考虑的热传导主要产生于陶瓷和金属组 份材料,湿度扩散主要产生于孔隙,故孔隙参数 对湿度场的影响规律与对温度的影响明显不同.由 于设定了圆板内侧陶瓷组份占多,外侧金属组份 占多, 且 $S_{in} = 0$, $S_{out} = 0.5$, 图中 η_m 对湿度场 的影响程度明显大于 η_c 和 η_{int} ,且在同一半径处 湿度随 nm 增大而增大. 至于 nc 和 nmt 对湿度的影 响,图 5(b) 给出了湿度差 C(η) - C(η=10),其中 C(η=10) 表示 $(\eta_c, \eta_m, \eta_{int}) = (10\%, 5\%, 0)$ 或 $(\eta_c, \eta_m, \eta_{int}) =$ (5%,5%,10%)时的湿度场,发现在同一半径处,η_c





Fig. 5 Effect of pore parameters to the hygrothermal mechanical responses of the FG circular plate







和 η_{int} 的增大均会使湿度略微增大.图 5(c) 和图 5(d) 给出了取不同孔隙参数时圆板的径向位移和径向应 力,孔隙参数对位移和应力的影响是其对刚度和对 湿热场影响的综合结果.在同一半径处,径向位移和 |σ_r| 分别随 η_c, η_m 和 η_{int} 的增大而减小,其中 η_c 的 影响最为明显,这是由于本文设定了 FG 圆板陶瓷组 份占多的一侧为固定端.

3.2 FG 圆板厚度参数的影响

取圆板孔隙参数 $\eta_c = \eta_m = \eta_{int} = 10\%$, FG 指 数 n = 1, 温度和湿度边界条件 $T_{in} = 373$ K, $T_{out} = 273$ K, $S_{in} = 0$, $S_{out} = 0.5$, 圆板转速 $\omega = 1000$ r/min. 图 6 为不同厚度参数下圆板厚度沿径向的变化.

由于圆板厚度参数对材料组份和性质无影响, 从而厚度参数的变化不改变其温度和湿度分布,故 图7仅给出了不同厚度参数下圆板的径向位移和径



Fig. 6 Thickness variation of the FG circular plate along its radius



(a) 径向位移(内薄外厚) (a) Radial displacement (thin-inner and thick-outer)





Fig. 7 Effect of thickness parameters to hygrothermal mechanical

responses of the FG circular plate



(c) 程间址移(內孕介海) (c) Radial displacement (thick-inner and thin-outer)







向应力. $\lambda = 0$ (等厚度)时圆板厚度对位移和应力场 无影响; $\lambda \neq 0$ 时,内薄外厚 ($H_{in}/H_{out} = 1/5$)圆板 比内厚外薄 ($H_{in}/H_{out} = 5$)圆板的整体位移和应力更 小;在同一半径处,内薄外厚圆板的位移和应力随 λ 的增大先减小后增大,而内厚外薄圆板的位移和应 力随 λ 的增大先增大后减小,且上述 λ 影响的最大 处均出现在 $\lambda = 1$ 附近.结果表明,对于内边固定外 边自由的 FG 旋转圆板,内薄外厚且厚度线性变化的 几何结构将有利于缓和其形变和应力分布.

4 结 论

本文提出了用组份本身孔隙及结合界面孔隙线 性叠加得到的孔隙体积分数计算式,考虑组份材料 和孔隙填充物(液相水和水蒸气)性质的温度相关性, 及圆板整体湿度扩散系数和密度的湿度相关性,建 立了湿热环境下旋转变厚度 FG 圆板的力学模型.采 用 DQM 对控制方程进行求解,获得了圆板的湿热 力学响应.通过具体算例,得到了如下结论.

(1)FG 指数的变化对圆板湿热场影响较小,而 对径向位移和应力影响明显. 孔隙参数对圆板湿 热力学响应的影响主要来源于组份体积分数的变 化,其对温度场影响较小,对湿度场的影响程度 取决于组份孔隙参数和湿度边界条件的设定;孔隙 参数对位移和应力的影响取决于对整体弹性模量的 影响.

(2) 在稳态湿热场下,内厚外薄的圆板比内薄 外厚的圆板具有更大的整体位移和应力,厚度指数 λ对位移和应力影响最大处出现在 λ = 1 附近.对 于内边固定外边自由的 FG 旋转圆板,内薄外厚 且厚度线性变化的几何结构有利于缓和形变和应力 分布.

参考文献

- Heydari A, Jalali A, Nemati A. Buckling analysis of circular functionally graded plate under uniform radial compression including shear deformation with linear and quadratic thickness variation on the Pasternak elastic foundation. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 41: 494-507
- 2 Moita JS, Araújo AL, Correia VF, et al. Buckling and nonlinear response of functionally graded plates under thermo-mechanical loading. *Composite Structures*, 2018, https://doi.org/10.1016/ j.compstruct.2018.03.082
- 3 Yu TT, Yin SH, Bui TQ, et al. Buckling isogeometric analysis of functionally graded plates under combined thermal and mechanical loads. *Composite Structures*, 2017, 162: 54-69
- 4 Nguyen TN, Thai CH, Nguyen-Xuan H, et al. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded material plates using an improved moving Kriging meshfree method based on a refined plate theory. *Composite Structures*, 2018, 193: 268-280
- 5 Ashoori AR, Sadough Vanini SA. Nonlinear bending, postbuckling and snap-through of circular sizedependent functionally graded piezoelectric plates. *Thin–Walled Structures*, 2017, 111: 19-28
- 6 Yin SH, Yu TT, Bui TQ, et al. Rotation-free isogeometric analysis of functionally graded thin plates considering in-plane material inhomogeneity. *Thin-Walled Structures*, 2017, 119: 385-395
- 7 Thai S, Thai HT, Vo TP, et al. Size-dependant behaviour of func-

tionally graded microplates based on the modified strain gradient elasticity theory and isogeometric analysis. *Computers and Structures*, 2017, 190: 219-241

- 8 张靖华, 潘双超, 李世荣. 热冲击下功能梯度圆板的动力屈曲. 应用力学学报, 2015, 32(6): 901-906 (Zhang Jinghua, Pan Shuangchao, Li Shirong. Dynamic buckling of functionally graded circular plate under thermal shock. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2015, 32(6): 901-906(in Chinese))
- 9 Dai HL, Yan X, Yang L. Nonlinear dynamic analysis for FGM circular plates. *Journal of Mechanics*, 2013, 29(2): 287-296
- 10 Dai HL, Guo ZY, Yang L. Nonlinear dynamic response of functionally graded materials circular plates subject to low-velocity impact. *Journal of Composite Materials*, 2012, 47(22): 2797-2807
- 11 Lal R, Ahlawat N. Buckling and vibrations of two-directional functionally graded circular plates subjected to hydrostatic inplane force. *Journal of Vibration and Control*, 2017, 23(13): 2111-2127
- 12 Yousefzadeh SH, Jafari AA, Mohammadzadeh A. Effect of hydrostatic pressure on vibrating functionally graded circular plate coupled with bounded fluid. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, 60: 435-446
- 13 Mahinzare M, Ranjbarpur H, Ghadiri M. Free vibration analysis of a rotary smart two directional functionally graded piezoelectric material in axial symmetry circular nanoplate. *Mechanical Systems* and Signal Processing, 2018, 100: 188-207
- 14 夏巍, 冯浩成. 热过屈曲功能梯度壁板的气动弹性颤振. 力学学 报, 2016, 48(3): 609-614 (Xia Wei, Feng Haocheng. Aeroelastic flutter of post-buckled functionally graded panels. *Chinese Journal* of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, 48(3): 609-614(in Chinese))
- 15 许新,李世荣. 功能梯度材料微粱的热弹性阻尼研究. 力学学报, 2017, 49(2): 308-316 (Xu Xin, Li Shirong. Analysis of thermoelastic damping for functionally graded material micro-beam. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(2): 308-316(in Chinese))
- 16 高晨彤,黎亮,章定国等.考虑剪切效应的旋转 FGM 楔形梁刚 柔耦合动力学建模与仿真.力学学报,2018,50(3):654-666 (Gao Chentong, Li Liang, Zhang Dingguo, et al. Dynamic modeling and simulation of rotating FGM tapered beams with shear effect. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(3): 654-666 (in Chinese))
- 17 许良, 赵昺, 马少华等. 湿热环境下复合材料板拉--压性能. 材料 工程, 2018, 46(3): 124-130 (Xu Liang, Zhao Bing, Ma Shaohua, et al. Tensile and compress property of composite laminate in hygrothermal environment. *Journal of Materials Engineering*, 2018, 46(3): 124-130 (in Chinese))
- 18 赵天,杨智春,田玮等. 湿热环境下复合材料层合板振动与声辐射特性分析. 航空学报, 2017, 38(10): 221038(1-10) (Zhao Tian, Yang Zhichun, Tian Wei, et al. Vibration and acoustic radiation characteristics analysis of composite laminated plate in hygrothermal environment. Acta Aeronutica et Astronautica Sinica, 2017, 38(10): 221038(1-10) (in Chinese))

- 19 苏伯阳,李书欣,刘立胜等.湿热环境下复合材料冲击损伤的 近场动力学模拟.科学技术与工程,2018,18(1):201-206 (Su Boyang, Li Shuxin, Liu Lisheng, et al. Peridynamic simulation of impact damage of composite material under hygrothermal environment. *Science Technology and Engineering*, 2018, 18(1):201-206(in Chinese))
- 20 吴振, 刘子茗. 湿热力载荷下复合材料层合板力学行为. 工程 力学, 2016, 33(11): 11-19 (Wu Zhen, Liu Ziming. Mechanical behaviors of laminated composite plate subject to hygro-thermomechanical loading. *Engineering Mechanics*, 2016, 33(11): 11-19(in Chinese))
- 21 王柏臣, 刘永娜, 李伟等. 湿热环境对 PMMA 混杂纳米复合材料 性能的影响. 装备环境工程, 2018, 15(2): 36-40 (Wang Baichen, Liu Yongna, Li Wei, et al. Effects of hygrothermal environment on properties of PMMA hybrid nanocomposites. *Equipment Environmental Engineering*, 2018, 15(2): 36-40(in Chinese))
- 22 曹志远,程红梅. 空隙、杂质及组分突变对功能梯度构件 动力特性的影响. 复合材料学报, 2007, 24(5): 136-141 (Cao Zhiyuan, Cheng Hongmei. Influence of gap, impurities and component mutation on dynamic character of functionally graded structures. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2007, 24(5): 136-141(in Chinese))
- 23 Zenkour AM. A quasi-3D refined theory for functionally graded single-layered and sandwich plates with porosities. *Composite Structures*, 2018, 201: 38-48
- 24 Boutahar L, Bikri KE, Benamar R. A homogenization procedure for geometrically non-linear free vibration analysis of functionally graded annular plates with porosities, resting on elastic foundations. *Ain Shams Engineering Journal*, 2016, 7: 313-333
- 25 Kiran MC, Kattimani SC. Assessment of porosity influence on vibration and static behaviour of functionally graded magnetoelectro-elastic plate: A finite element study. *European Journal of Mechanics/A Solids*, 2018, 71: 258-277
- 26 Rezaei AS, Saidi AR, Abrishamdari M, et al. Natural frequencies of functionally graded plates with porosities via a simple four variable plate theory: An analytical approach. *Thin-Walled Structures*, 2017, 120: 366-377
- 27 Kiran MC, Kattimani SC, Vinyas M. Porosity influence on structural behaviour of skew functionally graded magneto-electroelastic plate. *Composite Structures*, 2018, 191: 36-77
- 28 Wang YQ, Zu JW. Vibration behaviors of functionally graded rectangular plates with porosities and moving in thermal environment. *Aerospace Science and Technology*, 2017, 69: 550-562
- 29 郑保敬,梁钰,高效伟等. 功能梯度材料动力学问题的 POD 模型 降阶分析. 力学学报, 2018, 50(4): 787-797 (Zheng Baojing, Liang Yu, Gao Xiaowei, et al. Analysis for dynamic response of functionally graded materials using POD based reduced order model. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(4): 787-797(in Chinese))
- 30 Damircheli M, Azadi M. Temperature and thickness effects on thermal and mechanical stresses of rotating FG-disks. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2011, 25(3): 827
- 31 Fung T. Solving initial value problems by differential quadrature method-part 1: First-order equations. *International Journal for Nu*-

merical Methods in Engineering, 2001, 50(6): 1411-1427

32 叶天贵, 靳国永, 刘志刚. 多层复合壳体三维振动分析的谱 – 微 分求积混合法. 力学学报, 2018, 50(4): 847-852 (Ye Tiangui, Jin Guoyong, Liu Zhigang. A spectral-differential quadrature method for 3-D vibration analysis of multilayered shells. *Chinese Journal* of Theoretical and Applied Mechanics, 2018, 50(4): 847-852(in Chinese))

33 Reddy J, Chin C. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of thermal Stresses*, 1998, 21(6): 593-626