

论力学系统的自由度¹⁾胡海岩²⁾

(北京理工大学宇航学院, 飞行器动力学与控制教育部重点实验室, 北京 100081)

摘要 力学系统的自由度定义源自描述系统位形的独立坐标数. 在分析力学发展过程中, 人们通过对非完整约束的研究, 将其拓展为独立的坐标变分数. 本文指出, 对于含非完整约束的力学系统, 该定义存在不妥之处, 给出的自由度会过度限制系统的力学行为. 文中研究力学系统在状态空间中的可达流形, 指出可达流形维数与描述系统动力学的一阶常微分方程组的最少未知函数个数一致, 例如 Gibbs-Appell 方程与广义速度方程联立的未知函数个数, 进而将可达流形维数的一半定义为系统自由度. 通过含黏弹性支承的振动系统、在倾斜平面上运动的冰橇等案例, 讨论了单个非完整约束导致的半自由度概念, 指出其力学意义和与相邻整数自由度的关系. 此外, 文中还给出两个非完整约束导致系统减少一个自由度的案例, 讨论了系统的切丛和余切丛维数.

关键词 自由度, 半自由度, 非完整约束, 可达状态流形, 切丛, Gibbs-Appell 方程, 黏弹性

中图分类号: O313 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-18-219

ON THE DEGREES OF FREEDOM OF A MECHANICAL SYSTEM¹⁾Hu Haiyan²⁾

(MOE Lab of Dynamics and Control of Flight Vehicles, School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract The definition of degrees of freedom of a mechanical system originated from the number of independent coordinates to describe the system configuration. The definition turned to be the number of independent variations of generalized coordinates after the studies on non-holonomic constraints in the development of analytic mechanics. The paper points out that the above definition of degrees of freedom has some flaws for the mechanical system with non-holonomic constraints and may impose excessive limits on the system dynamics. The paper, hence, studies the accessible state manifold of a mechanical system with non-holonomic constraints in the state space and shows that the dimensions of the accessible state manifold is equal to the number of minimal unknown variables to describe the system dynamics, governed by a set of ordinary differential equations of the first order, such as the Gibbs-Appell equations together with the relation of generalized velocities and pseudo-velocities. Then, the paper defines the degrees of freedom of a mechanical system as a half of the dimensions of the accessible state manifold. Afterwards, the paper demonstrates how to understand the concept of a half degree of freedom of a mechanical system with a single non-holonomic constraint via two case studies, that is, the vibration system having a viscoelastic mounting and the sleigh system moving on an inclined plane, presenting the relation between a half degree of freedom and the two neighboring integer degrees of freedom. Furthermore, the paper gives two examples of mechanical systems, each of which has two non-holonomic constraints and results in the reduction

2018-07-05 收稿, 2018-08-29 录用, 2018-08-29 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11832005).

2) 胡海岩, 教授, 主要研究方向: 结构动力学与控制. E-mail: haiyan.hu@bit.edu.cn

引用格式: 胡海岩. 论力学系统的自由度. 力学学报, 2018, 50(5): 1135-1144

Hu Haiyan. On the degrees of freedom of a mechanical system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(5): 1135-1144

of a single degree of freedom, and addresses the dimensions of tangent and cotangent bundles of the two systems.

Key words degrees of freedom, half degree of freedom, non-holonomic constraint, accessible state manifold, tangent bundle, Gibbs-Appell equation, viscoelasticity

引 言

力学系统的自由度是一个基本概念, 具有悠久历史. 在理论力学/经典动力学中, 人们针对由质点、刚体组成的系统, 将其自由度定义为: 确定系统位形所需的独立坐标数^[1], 或系统位形空间的维数^[2]. 该定义具有直观的力学意义, 在实践中得以广泛应用. 例如, 国际机构学与机器科学联合会 (IFTOMM) 采用类似定义, 将机构和运动链的自由度定义为确定其位形所需的独立参数个数^[3].

从本质上看, 上述系统自由度定义仅关注系统位形, 属于系统运动学范畴, 并未涉及系统动力学. 对于以研究动力学为主的分析力学, 其经典著作拓展上述概念, 将系统自由度定义为系统的独立坐标等时变分数 (或独立虚位移数)^[4-6]. 如果系统不含约束, 或仅含完整约束, 则独立的坐标数与独立的坐标等时变分数一致, 分析力学给出的系统自由度与理论力学/经典动力学的结果相同; 若系统含有非完整约束, 则这类微分约束导致部分坐标的等时变彼此相关, 即独立的坐标等时变分数会减少, 分析力学给出的系统自由度将少于独立的坐标数.

本文将通过理论分析和几个案例说明, 在研究非完整约束系统动力学时, 分析力学所定义的系统自由度存在某些不妥, 高估了速度约束的作用. 文中分别在位形空间和状态空间中分析约束对系统运动可达性的影响, 进而提出新的自由度定义, 并通过若干案例说明其合理性.

1 现有的系统自由度概念

在三维空间中建立固定坐标系, 考察由 N 个自由刚体组成的系统. 根据刚体编号, 将各刚体质心位移按坐标顺序组成列阵 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$, 将各刚体绕质心转动的 Euler 角按进动角、章动角、自转角顺序组成列阵 $\boldsymbol{\theta} \in \Pi_N S^1 \otimes \tilde{S}^1 \otimes S^1$. 其中 Π_N 是 N 重直和, $S^1 \equiv [0, 2\pi)$, $\tilde{S}^1 \equiv [0, \pi)$; $S^1 \otimes \tilde{S}^1 \otimes S^1$ 是 $SO(3)$ 群的参数化表示^[2]. 因此, 该刚体系统的运动可表示为

$$\mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3N} \otimes \Pi_N S^1 \otimes \tilde{S}^1 \otimes S^1 \equiv \mathbb{R}^{6N} \quad (1)$$

类似地, 可讨论上述自由刚体系统在其他维数空间中运动的坐标列阵和维数, 结果见表 1.

表 1 N 个自由刚体系统在不同维数空间中的坐标列阵

Table 1 Coordinate column of a system of N free rigid bodies in a space of different dimensions

Dimension	Displacement	Rotation angle	General form
$m = 1$	$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$	$\boldsymbol{\theta} \equiv \mathbf{0}$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$
$m = 2$	$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$	$\boldsymbol{\theta} \in \Pi_N S^1$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{3N}$
$m = 3$	$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$	$\boldsymbol{\theta} \in \Pi_N S^1 \otimes \tilde{S}^1 \otimes S^1$	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{6N}$

对于由 N 个自由质点组成的系统, 可作为上述刚体系统的退化情况, 略去转角坐标列阵 $\boldsymbol{\theta}$, 选择 $\mathbf{y} \equiv \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{mN}$ 描述其在 $m = 1, 2, 3$ 维空间中的运动.

因此, 本文统一用 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 来描述上述无约束系统的运动, 并称 $\mathbb{R}^n$ 为系统位形空间. 对于质点系统, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{mN}$ 对应表 1 中第二列的位形空间; 对于刚体系统, $\mathbb{R}^n$ 对应表 1 中第四列的位形空间. 此时, 坐标列阵 $\mathbf{y}$ 有 n 个独立分量, 其等时变分 $\delta\mathbf{y}$ 也有 n 个独立分量, 故系统自由度为 n , 与 $\mathbb{R}^n$ 的维数一致.

现对上述系统施加 r 个完整约束和 s 个非完整约束, 将其记为 $S_{r,s}^n$. 按此记号, 无约束系统可表示为 $S_{0,0}^n$, 仅含 r 个完整约束的系统可表示为 $S_{r,0}^n$, 而仅含 s 个非完整约束的系统可表示为 $S_{0,s}^n$.

为了讨论方便, 设上述 r 个完整约束是定常双面约束, 且彼此线性无关, 其约束方程为

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^r \quad (2)$$

此时, 坐标列阵 $\mathbf{y}$ 的独立分量数降为 $n - r$, 等时变分 $\delta\mathbf{y}$ 中的独立分量数也如此. 因此, 将系统 $S_{r,0}^n$ 的自由度定义为 $D(S_{r,0}^n) = n - r$ ^[4-6].

同理, 设上述 s 个非完整约束是定常双面线性约束, 且彼此线性无关, 其约束方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{a}_0(\mathbf{y}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A} : \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R}^{s \times n}, \quad \mathbf{a}_0 : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^s \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

为了讨论方便, 约定这 s 个非完整约束的线性组合不产生可积约束, 即它们是纯非完整约束^[7]; 而且

则 $\delta \mathbf{y}$ 的独立分量数降为 $n-r-s$. 根据分析力学的定义^[4-6], 系统 $S_{r,s}^n$ 的自由度为 $D(S_{r,s}^n) = n-r-s$. 由于非完整约束方程 (3) 不可积, 此时仍需要用 $n-r$ 个独立坐标来描述系统 $S_{r,s}^n$ 的位形^[4-7]. 虽然曾有多位学者讨论与此相关的自由度问题^[10-11], 但在概念和本质上并未超出上述定义.

值得指出的是, 非完整约束 (3) 仅仅导致坐标列阵等时变分 $\delta \mathbf{y}$ 的部分分量线性相关, 但并不改变坐标列阵 $\mathbf{y}$ 的分量相关性, 这正是约束的“非完整性”. 因此, 完整约束和非完整约束对系统运动的影响是不同的, 对系统运动的自由程度影响也不同. 以下从几何力学角度来分析系统自由度问题, 但尽可能采用直观说明, 而不是数学证明.

2.1 可达位形流形

设系统 $S_{r,0}^n$ 满足 r 个完整约束方程 (2), 其在位形空间 $\mathcal{R}^n$ 中的运动被限制在方程 (2) 所确定的超曲面 Φ^{n-r} 或其某个叶上, 无法达到整个位形空间 $\mathcal{R}^n$. 由于这 r 个完整约束线性无关, 可用初等方法证明超曲面 Φ^{n-r} 的维数是 $n-r$ ^[7]. 根据微分几何^[12-14], 对于光滑超曲面 Φ^{n-r} , 可视其为 $\mathcal{R}^n$ 中的微分流形, 记作 $Q \equiv \Phi^{n-r}$. 本文将 Q 定义为系统 $S_{r,0}^n$ 的可达位形流形, 其维数为 $\dim(Q) = n-r$.

对于方程 (3) 所描述的非完整线性约束, 其线性组合的不可积性质表明, 它无法在位形空间 $\mathfrak{R}^n$ 中形成超曲面来限制系统运动, 故系统 $S_{r,s}^n$ 的运动可抵达流形 Q 上的任意点, 但其速度受到方程 (3) 的限制, 即系统运动的等时变分 $\delta \mathbf{y}$ 受到约束. 因此, 在含 r 个完整约束 (2) 的系统 $S_{r,0}^n$ 上再施加 s 个非完整约束 (3), 得到的系统 $S_{r,s}^n$ 具有与 $S_{r,0}^n$ 相同的可达位形流形 Q .

2.2 可达状态流形

根据 Newton 的决定性原理, 系统的动力学演化过程不仅取决于其初始位形, 还取决于其初始速度, 即该过程的本质是系统状态演化. 非完整约束对系统速度施加限制, 影响到系统状态演化, 故应在系统状态空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 中考察其作用.

根据微分几何, 可在 $n-r$ 维微分流形 Q 上建立局部坐标系, 将 Q 中的任意点 q 表示为 $n-r$ 维广义坐标列阵 $\mathbf{q} \in Q$, 进而计算生成点 q 的 $n-r$ 维切空间 TQ_q . 在微分几何中, 将微分流形 Q 中所有点 q 的切空间 TQ_q 之并集定义为 Q 的切丛, 记作

$$TQ \equiv \bigcup_{q \in Q} TQ_q \quad (5)$$

它是系统状态空间 $\mathfrak{R}^{2n}$ 中的微分流形, 其维数为 $\dim(TQ) = 2(n-r)^{[12-14]}$. 本文将该切丛 TQ 定义为系统 S_{r0}^n 的可达状态流形.

为阐述上述概念的几何意义,在状态空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 中考察超曲面 Φ^{n-r} ,它自动扩张为超曲面 Φ^{2n-r} .因方程 (2) 与速度列阵 $\dot{\mathbf{y}}$ 无关,故 Φ^{2n-r} 是沿 $\dot{\mathbf{y}}$ 方向保持形状不变的超柱面.将方程 (2) 对时间求导数,得到

$$\boldsymbol{\varphi}_v^T(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \quad (6)$$

其中 $\varphi_{y^T}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{r \times n}$ 是列阵 $\varphi(y)$ 关于行阵 y^T 的 Jacobi 矩阵. 式 (6) 关于 $\dot{y}$ 线性变化, 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的直纹超曲面 ψ^{2n-r} , 因此必与超柱面相交. 故 $S_{r,0}^n$ 的运动状态被限制在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中两个超曲面 ϕ^{2n-r} 和 ψ^{2n-r} 的交集上, 它就是切丛 TQ , 其维数为 $2n-2r$.

现以位形空间 $\mathbf{R}^2$ 中的单个完整约束方程 $\phi^{2-1} \equiv y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0$ 为例, 它给出 $\mathbf{R}^2$ 中的一维位形可达流形 Q . 在状态空间 $\mathbf{R}^4$ 中, 将超柱面 ϕ^{4-1} 向任意超平面 $\dot{y}_2 = \text{const.}$ 投影, 总得到图 1 所示蓝色圆柱面. 由式 (6) 得到 $\psi^{4-1} \equiv 2(y_1\dot{y}_1 + y_2\dot{y}_2) = 0$, 对于给定的 $\dot{y}_2 \neq 0$, ψ^{4-1} 可改写为双曲抛物面 $y_2 = -y_1\dot{y}_1/\dot{y}_2$. 图 1 给出 $\dot{y}_2 = \pm 1$ 时的两个绿色双曲抛物面. 若 $\dot{y}_2$ 取不同的值, 则得到双曲抛物面簇, 它们与圆柱面的交线就是切丛 TQ . 在微分几何中, 若 Q 为 $\mathbf{R}^2$ 中的

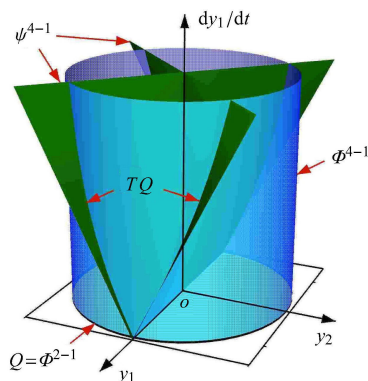


图 1 状态空间中的位形可达流形及其切丛示意
Fig.1 Accessible configuration manifold and its tangent bundle
in a state space

单位圆, 其切丛 TQ 的平凡情况就是图 1 所示 $\mathbb{R}^3$ 中的圆柱面; 而非平凡情况则是在 $\mathbb{R}^3$ 中扭曲的 Möbius 带, 因其具有不可定向性, 本文未予考虑.

为了考察非完整约束系统 $S_{r,s}^n$ 的可达状态, 在系统 $S_{r,0}^n$ 的切丛 TQ 中建立局部坐标系, 定义系统广义状态列阵 $[\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T]^T \in TQ$; 将系统 $S_{0,0}^n$ 的坐标列阵表示为 $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{q})$, 其中 $\tilde{\mathbf{y}}: Q \mapsto \mathbb{R}^n$. 将该坐标变换代入方程 (2) 和方程 (3), 分别得到

$$\varphi(\mathbf{y}) = \varphi(\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{q})) \equiv \tilde{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{q}))\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{q}^T}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_0(\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{q})) &\equiv \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{a}}_0(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{A}}: Q &\mapsto \mathbb{R}^{s \times (n-r)}, \quad \tilde{\mathbf{a}}_0: Q \mapsto \mathbb{R}^s \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

对于任意广义坐标列阵 $\mathbf{q} \in Q$, 方程 (7) 均自然满足, 故系统 $S_{r,s}^n$ 在切丛 TQ 中的运动状态仅受到来自非完整约束方程 (8) 的限制, 导致广义速度列阵 $\dot{\mathbf{q}}$ 的独立分量降低为 $n-r-s$. 因此, 系统 $S_{r,s}^n$ 的可达状态流形可记作切丛 TQ 中的子流形 Ω , 其维数为 $\dim(\Omega) = 2n - 2r - s$.

注解 1: 对于系统 $S_{r,s}^n$, 基于 Gibbs-Appell 方程和非完整约束方程, 可得到描述系统状态演化的一阶常微分方程组^[5-7], 待求解的是 $n-r-s$ 维准速度列阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $n-r$ 维位移列阵 $\mathbf{q}$, 即该方程组共含 $2n-2r-s$ 个未知函数. 这相当于从纯粹分析的途径证明, 系统 $S_{r,s}^n$ 的可达状态流形维数为 $2n - 2r - s$.

注解 2: 虽然约束方程 (2) 和方程 (3) 分别定义在整个位形空间 $\mathbb{R}^n$ 和整个状态空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 中, 但上述分析本质上是在可达位形流形 Q 和切丛 TQ 上分片完成. 若约束方程 (2) 和方程 (3) 的定义是局部的, 则更是如此.

注解 3: 对于非定常约束动力学系统, 只要在状态时间空间中进行分析, 其可达状态流形的维数也有类似结论.

2.3 系统自由度的新定义

自由度概念始于描述系统运动学的坐标数量, 因此其原始定义只与系统位形空间有关, 并与系统可达位形流形的维数相一致. 当人们转入状态空间去研究系统动力学时, 自然认为系统的可达状态维数是系统自由度的两倍.

对于完整约束系统 $S_{r,0}^n$, 其可达状态流形 TQ 的维数总是两倍于可达位形流形 Q 的维数. 但对于非完整约束系统 $S_{r,s}^n$, 系统可达状态流形 Ω 的维数是 $2n-2r-s$, 并不是分析力学中所定义的自由度 $n-r-s$

的两倍. 本文后继分析将表明, 分析力学所定义的自由度会过度限制系统运动的自由程度.

因此, 本文将系统自由度定义为: 系统可达状态流形维数的一半. 对于无约束系统 $S_{0,0}^n$ 和完整约束系统 $S_{r,0}^n$, 本定义与现有定义的结果完全一致; 对于非完整约束系统 $S_{r,s}^n$, 本定义给出的系统自由度为 $\tilde{D}(S_{r,s}^n) \equiv \dim(\Omega)/2 = n-r-s/2$, 大于分析力学著作中定义的自由度 $D(S_{r,s}^n) = n-r-s$.

3 奇数非完整约束导致的半自由度

根据上述系统自由度的新定义, 当系统具有奇数个非完整约束时, 将出现半个自由度. 本节通过含单个非完整约束系统的两个案例, 来阐述半个自由的力学意义.

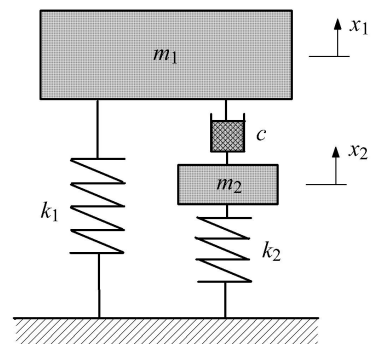
3.1 线性振动系统的演变

图 2(a) 中的线性振动系统包含刚性质量块 m_1 和 m_2 , 不计惯性的线性黏性阻尼器 c , 不计惯性的线性弹簧 k_1 和 k_2 , 它们均只能沿铅垂方向运动或变形. 因此, 记该系统为 $S_{0,0}^2$, 其自由度 $D(S_{0,0}^2) = 2$. 系统的运动微分方程为

$$\left. \begin{aligned} m_1\ddot{x}_1(t) + c[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] + k_1x_1(t) &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2(t) + c[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] + k_2x_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中参数 $m_1 > 0, m_2 \geq 0, k_1 > 0, k_2 > 0, c > 0$.

令图 2(a) 中系统的质量 $m_2 \rightarrow 0$, 系统 $S_{0,0}^2$ 变为



(a) 具有两自由度的系统 $S_{0,0}^2$

(a) System $S_{0,0}^2$ of 2 degrees of freedom

图 2 线性振动系统的半自由度缩减

Fig. 2 Reduction of a half degree of freedom of a linear vibration system

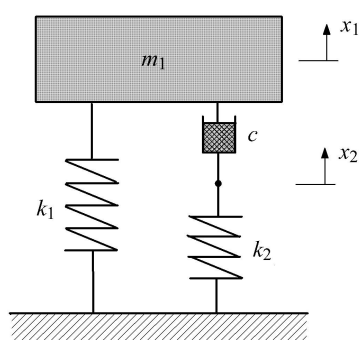
(b) 具有 1.5 自由度的系统 $S_{0,1}^2$ (b) System $S_{0,1}^2$ of 1.5 degrees of freedom

图 2 线性振动系统的半自由度缩减 (续)

Fig. 2 Reduction of a half degree of freedom of a linear vibration system (continued)

图 2(b) 所示系统, 其运动微分方程由式 (9) 简化为

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) + c[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] + k_1 x_1(t) &= 0 \\ c[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] + k_2 x_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

此时, 式 (10) 中的第 2 个方程成为定常的线性速度约束, 而且不可积, 是非完整约束. 由于该系统具有一个非完整约束, 故将其记为 $S_{0,1}^2$.

通过简单运算可消去式 (10) 中的 x_2 和 $\dot{x}_2$, 得到仅含坐标 x_1 的三阶线性常微分方程

$$\begin{aligned} m_1 c \dddot{x}_1(t) + m_1 k_2 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2) c \dot{x}_1(t) + \\ k_1 k_2 x_1(t) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

其特征方程为

$$m_1 c \lambda^3 + m_1 k_2 \lambda^2 + (k_1 + k_2) c \lambda + k_1 k_2 = 0 \quad (12)$$

作者已证明, 方程 (12) 总有一对具有负实部的共轭复根 $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$ ($\gamma > 0$, $\omega > 0$), 以及一个负实根 $\lambda_3 < 0$ ^[15]. 因此, 系统 $S_{0,1}^2$ 受初始扰动后的自由运动可表示为

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \bar{c}_1 \exp(-\gamma t) \cos \omega t + \bar{c}_2 \exp(-\gamma t) \sin \omega t + \\ &\quad \bar{c}_3 \exp(-|\lambda_3| t) \\ x_2(t) &= \frac{1}{c} \int_0^t [m_1 \ddot{q}_1(\tau) + c \dot{q}_1(\tau) + k_1 q_1(\tau)] d\tau, \\ t &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中 $\bar{c}_i, i = 1, 2, 3$ 是积分常数, 即系统运动是两种运动之叠加, 一种是以指数 $\exp(-\gamma t)$ 为包络的衰减振动, 另一种是指数 $\exp(-|\lambda_3| t)$ 形式的衰减运动.

现对系统 $S_{0,1}^2$ 的自由度进行两个方面的讨论.

首先, 方程 (10) 中的非完整约束提供了该系统两个速度等时变分之间的关系, 即 $c(\delta \dot{x}_2 - \delta \dot{x}_1) = 0$. 根据分析力学的观点^[4-6], $D(S_{0,1}^2) = 2 - 0 - 1 = 1$, 即 $S_{0,1}^2$ 为单自由度系统. 然而, 系统 $S_{0,1}^2$ 不同于单自由度系统, 需要用两个独立坐标来描述其运动. 为了确定系统 $S_{0,1}^2$ 受扰后的运动, 不仅需要给定该系统的初始状态 $x_1(0) = x_{10}$ 和 $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}$, 还需要给定 $\ddot{x}_1(0) = \ddot{x}_{10}$, 方可确定式 (13) 给出的运动; 或给定 $x_2(0) = x_{20}$, 方可求解方程 (10). 这说明, 系统 $S_{0,1}^2$ 不同于单自由度系统. 式 (13) 则表明, 系统 $S_{0,1}^2$ 受扰后的自由运动不仅包含单自由度阻尼系统所具有的衰减振动, 还包含一种指数衰减运动. 这是单自由度系统所不具有的动力学行为, 也正是 2.3 节所定义的自由度导致的力学现象.

其次, 系统 $S_{0,1}^2$ 也有别于通常的两自由度系统. 对于图 2(a) 中的两自由度系统 $S_{0,0}^2$, 若最初 m_2 与 m_1 的量级相同, 则系统具有两对复特征值, 系统受扰后的自由运动是两种衰减振动之叠加. 随着 $m_2 \rightarrow 0$, 系统会有一个实特征值 $\lambda_4 < 0$, 且其绝对值非常大; 而系统另外 3 个特征值则分别趋于 $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$ 和 $\lambda_3 < 0$. 此时, 系统受扰后的自由运动变为一种衰减振动、两种衰减速率不同的指数衰减运动之叠加. 因此, 两自由度系统 $S_{0,0}^2$ 的受扰后自由运动有别于 $S_{0,1}^2$. 此外, 确定两自由度系统 $S_{0,0}^2$ 的受扰后自由运动需要给定 $\dot{x}_2(0)$, 而确定系统 $S_{0,1}^2$ 的受扰后自由运动不需要 $\dot{x}_2(0)$. 事实上, 方程 (10) 中的非完整约束方程表明, 一旦给定 $\dot{x}_1(0)$ 和 $x_2(0)$, 则有 $\dot{x}_2(0) = \dot{x}_1(0) - (k_2/c)x_2(0)$.

上述分析表明, 系统 $S_{0,1}^2$ 的动力学行为介于单自由度系统和两自由度系统之间. 因此, 将该系统的自由度定义为 $\tilde{D}(S_{0,1}^2) = 2 - 0 - 1/2 = 1.5$ 是恰当的. 这半个自由度源自非完整约束导致的自由度缩减, 因为它要求阻尼器 c 两端相对速度引起的阻尼力与弹簧 k_2 提供弹性力始终保持一致. 在系统动力学行为上, 这样的 1.5 自由度系统具有比单自由度系统更为丰富的动力学行为, 即在衰减振动上叠加了指数衰减运动; 但该系统的动力学行为又比两自由度系统要简单, 不含两种衰减振动.

注解 1: 在历史上, 对 1.5 自由度系统的研究可追溯到 20 世纪 80 年代苏联数学家 Ziglin 对一类 Hamilton 系统的可积性分析^[16], 这类数学研究一直

延续到今天. 但本文的 1.5 自由度系统来自力学研究, 具有力学意义. 在图 2(b) 中, 质量 m_1 下方的阻尼器 c 和弹簧 k_2 串联后再与弹簧 k_1 并联, 构成黏弹性力学中的标准线性模型, 可描述许多黏弹性构件的力学行为^[17]. 20 世纪 90 年代初, 作者曾提出用这样的 1.5 自由度振动系统来描述结构阻尼系统, 消除非频变结构阻尼导致的系统时域响应非因果性^[15]. 近年来, Min 等学者则用 1.5 自由度振动系统模型研究了振动控制问题^[18].

注解 2: 对于图 2(b) 中的系统, 也可设想从质量 m_1 和弹簧 k_1 组成的单自由度系统出发, 附加一个由阻尼器 c 和弹簧 k_2 串联构成的 Maxwell 黏性流体环节而成. Maxwell 黏性流体环节满足式 (10) 中的第二个方程, 即非完整约束方程. 由于该方程是一阶常微分方程, 故该环节仅有 0.5 个自由度. 在黏弹性力学中, 由 Maxwell 黏性流体环节引入的 0.5 个自由度来自黏弹性材料的特性, 通常被视为内变量, 或内自由度. 对于含 Maxwell 黏性流体环节的系统 $S_{0,1}^2$, 若按照分析力学的观点定义其自由度为 $D(S_{0,1}^2) = 1$, 则必须声明: 该系统的受扰运动包含一个衰减振动模态、一个由材料性质 (或半个内自由度) 导致的指数衰减模态, 后者也被称为蠕变模态.

注解 3: 在固体力学中, 还有许多采用内变量描述的问题, 有些可视为对系统速度的非完整约束, 有些则未必. 例如, 若将图 2(b) 中的 Maxwell 黏性流体环节替换为理想塑性环节, 可描述具有记忆特性的非线性隔振系统^[19]; 若替换为著名的 Bouc-Wen 塑性环节^[20], 则可描述更为普遍的非线性弹塑性系统. 对于这两种系统, 其内变量是塑性力, 不具有位移或速度的力学意义.

注解 4: 如果 $0 < m_2 \ll m_1$, 从理论上说可以直接研究两自由度系统 $S_{0,0}^2$, 不采用 1.5 自由度模型 $S_{0,1}^2$. 然而, 此时系统 $S_{0,0}^2$ 的微分方程初值问题具有严重的数值病态. 例如, 当 $m_2/m_1 < 10^{-5}$ 时, 若用 Maple 和 MATLAB 等软件中的 Rung-Kutta 求解器来计算两自由度系统 $S_{0,0}^2$ 的初值问题, 会遭遇失败. 因此, 在实践中有必要将两自由度系统 $S_{0,0}^2$ 简化为 1.5 自由度系统 $S_{0,1}^2$, 避免计算困难.

3.2 倾斜平面上的冰橇运动

考察图 3 中在倾斜平面上运动的冰橇, 将其简化为均质刚性杆; 杆的质量为 m , 长度为 l , 受到重力分量 $mg \sin \alpha$ 作用. 在图示坐标系中, 用杆的质心坐标 (x_1, x_2) 和绕质心的转角 θ 来描述杆在倾斜平面

上的运动. 由于冰面对冰橇的约束, 杆的质心速度 v_c 始终与杆平行, 导致如下线性非完整约束

$$\dot{x}_1 \sin \theta - \dot{x}_2 \cos \theta = 0 \quad (14)$$

因此, 可将上述冰橇系统记为 $S_{0,1}^3$.

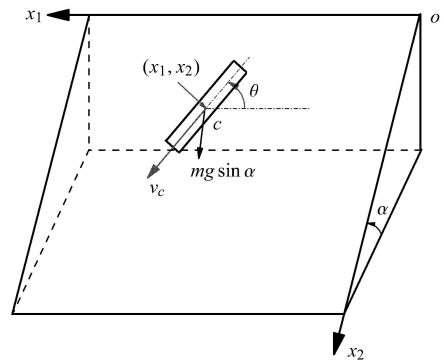


图 3 在倾斜平面上运动的冰橇

Fig. 3 A sleigh moving on an inclined plane

引入准速度 $\sigma_1 \equiv \dot{x}_1 / \cos \theta$, $\sigma_2 \equiv \dot{\theta}$, 建立描述系统 $S_{0,1}^3$ 运动的 Gibbs-Appell 方程^[5], 其初值问题为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= g \sin \alpha \sin \theta, & \sigma_1(0) &= \dot{x}_{10} / \cos \theta_0 \\ \dot{\sigma}_2 &= 0, & \sigma_2(0) &= \omega_0 \\ \dot{x}_1 &= \sigma_1 \cos \theta, & x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2 &= \sigma_1 \sin \theta, & x_2(0) &= x_{20} \\ \dot{\theta} &= \sigma_2, & \theta(0) &= \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中 $\theta_0 \neq \pm\pi/2$ 和 ω_0 是对冰橇行为有重要影响的初始转角和初始角速度. 该一阶微分方程组含有 5 个未知函数, 可按照 $\sigma_2 \rightarrow \theta \rightarrow \sigma_1 \rightarrow (x_1, x_2)$ 的顺序求解, 但需要区别以下两种情况.

(1) 若冰橇的初始角速度 $\omega_0 = 0$, 则转角恒为 θ_0 , 冰橇沿着倾斜平面作如下匀加速直线运动

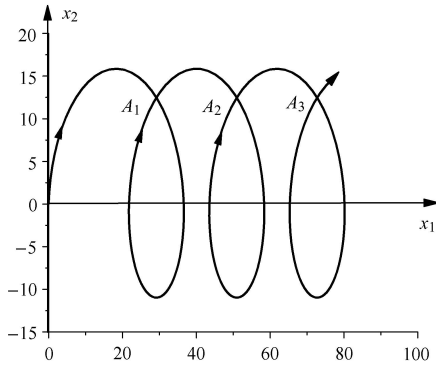
$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{g \sin \alpha}{2} (\sin \theta_0 \cos \theta_0) t^2 + \dot{x}_{10} t + x_{10} \\ x_2 &= \frac{g \sin \alpha}{2} (\sin \theta_0 \sin \theta_0) t^2 + \frac{\dot{x}_{10}}{\cos \theta_0} t + x_{20} \\ \theta &= \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(2) 若冰橇初始角速度 $\omega_0 \neq 0$, 则冰橇运动为

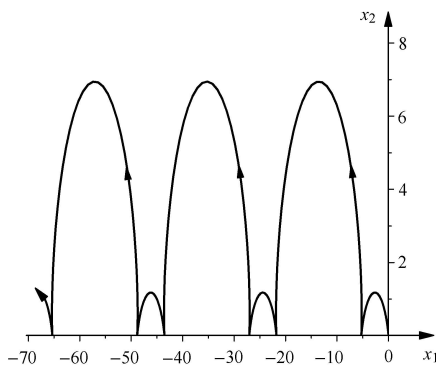
$$\left. \begin{aligned}
 x_1 &= \frac{g \sin \alpha}{2\omega_0^2} [\sin \theta_0 \cos \theta_0 - \sin(\omega_0 t + \theta_0) \cdot \\
 &\quad \cos(\omega_0 t + \theta_0) - \omega_0 t] + \\
 &\quad \left(\frac{\dot{x}_{10}}{\omega_0 \cos \theta_0} + \frac{g \sin \alpha}{\omega_0^2} \cos \theta_0 \right) \cdot \\
 &\quad [\sin(\omega_0 t + \theta_0) - \sin \theta_0] + x_{10} \\
 x_2 &= \frac{g \sin \alpha}{2\omega_0^2} [\cos^2(\omega_0 t + \theta_0) - \cos^2 \theta_0] + \\
 &\quad \left(\frac{\dot{x}_{10}}{\omega_0 \cos \theta_0} + \frac{g \sin \alpha}{\omega_0^2} \cos \theta_0 \right) \cdot \\
 &\quad [\cos \theta_0 - \cos(\omega_0 t + \theta_0)] + x_{20} \\
 \theta &= \omega_0 t + \theta_0
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

此时, 冰橇质心运动轨迹沿 x_1 方向随时间线性递增 (或递减) 并叠加周期性变化, 沿 x_2 方向随时间周期性变化, 冰橇转动则随时间线性递增 (或递减)。

图 4 给出两种典型的冰橇质心运动轨迹, 显示了系统能量守恒. 当 $\omega_0 < 0$ 时, 冰橇质心运动沿着 $x_1 \geq 0$ 方向发展; 当 $\omega_0 > 0$ 时, 则沿反方向发展。



(a) $\alpha = \pi/4$, $x_{10} = 0$, $x_{20} = 0$, $\dot{x}_{10} = 1$, $\theta_0 = \pi/2.1$, $\omega_0 = -1$



(b) $\alpha = \pi/4$, $x_{10} = 0$, $x_{20} = 0$, $\dot{x}_{10} = 0$, $\theta_0 = 2$, $\omega_0 = 1$

图 4 不同初始条件下的冰橇质运动轨迹

Fig. 4 Sleigh trajectories under different initial conditions

根据分析力学的定义, 上述冰橇的自由度为 $D(S_{0,1}^3) = 3 - 1 = 2$. 若按通常的两自由度系统去理解冰橇的动力学, 可以解释 $\omega_0 = 0$ 时冰橇的直线运动, 但无法解释冰橇的曲线运动, 尤其是图 4(a) 中的冰橇质心运动轨迹相交现象. 在冰橇的这类运动过程中, 其质心可两次抵达点 $A_1, A_2, A_3, \dots$, 但对应的转角 (即轨线切线方向) 却不同。

按照本文 2.3 节的定义, 冰橇的自由度为 $\tilde{D}(S_{0,1}^3) = 3 - 1/2 = 2.5$. 此时, 非完整约束 (14) 并不改变冰橇的可达位形流形, 即冰橇的质心位置和绕质心转角是彼此独立的, 但质心速度方向与转角相关. 此时, 系统 $S_{0,1}^3$ 的运动自由程度介于两自由度系统 $S_{1,0}^3$ 和三自由度系统 $S_{0,0}^3$ 之间。

4 偶数非完整约束导致的自由度缩减

本节主要讨论两个非完整约束各自导致的半自由度缩减是否等价于系统减少一个自由度? 根据本文 2.2 节对系统 $S_{r,s}^n$ 的可达状态流形分析, 当 $s = 2$ 时, 可达状态流形 Q 维数为 $2n - 2r - 2$, 系统自由度为 $\tilde{D}(S_{r,2}^n) = n - r - 1$. 从形式上看, 答案是肯定的; 但若分析其内涵, 则会发现问题的复杂性。

事实上, 力学系统的可达速度流形并不单独存在, 而依赖于可达位形流形. 以完整约束系统 $S_{r+1,0}^n$ 为例, 它具有 $n - r - 1$ 维的可达位形流形 Q 和 $2(n - r - 1)$ 维切丛 TQ , 可达速度流形是 Q 在 TQ 中的补, 其维数为 $n - r - 1$. 此外, 可构造 $2(n - r - 1)$ 维余切丛 T^*Q , 研究系统的 Hamilton 动力学. 对于具有两个非完整约束的系统 $S_{r,2}^n$, 虽然其自由度 $\tilde{D}(S_{r,2}^n) = n - r - 1$ 为整数, 但系统的可达位形流形和可达速度流形的维数不同, 分别是 $n - r$ 和 $n - r - 2$, 系统 $S_{r,2}^n$ 未必具有与系统 $S_{r+1,0}^n$ 等价的动力学行为. 以下通过两个案例来讨论这个问题。

4.1 液压-弹性隔振系统

现考察 Simionatto 等研究车辆发动机隔振问题时建立的液压-弹性隔振系统^[21]. 如图 5 所示, 该系统仅沿铅垂方向运动, 系统的弹性支承由黏弹性力学中的三参数固体模型和标准线性模型并联而成, 系统自由振动满足如下微分方程

$$\left. \begin{aligned}
 m\ddot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + (k_1 + k_4)x_1 - k_1x_2 &= 0 \\
 c_1\dot{x}_2 - k_1x_1 + (k_1 + k_2)x_2 &= 0 \\
 c_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + k_3x_3 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} m &= 20 \text{ kg}, \quad c_1 = 300 \text{ N} \cdot \text{s/m}, \quad c_2 = 100 \text{ N} \cdot \text{s/m} \\ k_1 &= 500 \text{ N/m}, \quad k_2 = 500 \text{ N/m} \\ k_3 &= 1000 \text{ N/m}, \quad k_4 = 5000 \text{ N/m} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

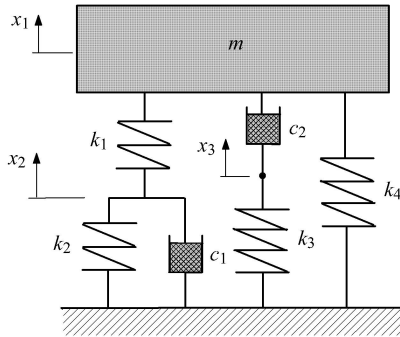


图 5 液压-弹性隔振系统

Fig. 5 A vibration isolation system with a hydro-elastic mounting

方程 (18) 表明, 该系统需要 3 个坐标描述其位形, 但同时含两个线性非完整约束, 应记作 $S_{0,2}^3$. 根据分析力学的定义^[4-6], 该系统的自由度为 $D(S_{0,2}^3) = 3 - 0 - 2 = 1$; 但根据本文 2.3 节的定义, 该系统自由度为 $\tilde{D}(S_{0,2}^3) = 3 - 0 - 2/2 = 2$.

将式 (19) 代入方程 (18), 计算出系统特征值如下

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -0.68972 \mp i17.706 \\ \lambda_3 &= -3.1742, \quad \lambda_4 = -8.7796 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

这表明, 系统 $S_{0,2}^3$ 受扰动后的自由运动包含一种以指数为包络的衰减振动, 两种呈快速衰减的指数运动; 即该系统等价于由一个欠阻尼线性振子和一个过阻尼线性振子组成的两自由度线性振动系统. 这样的动力学行为支持本文 2.3 节的自由度新定义, 不支持分析力学的自由度定义.

更具体地看, 根据方程 (18) 中的两个非完整约束, 可将质量 m 的位移 x_1 和速度 $\dot{x}_1$ 表示为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= [c_1 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_2]/k_1 \\ \dot{x}_1 &= (c_2 \dot{x}_3 + k_3 x_3)/c_2 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

将式 (21) 对时间求导后与方程 (18) 联立, 可推导出

仅由位移 x_2 和 x_3 描述的系统运动微分方程

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} c_1 c_2 & 0 \\ 0 & m c_2 k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2(k_1 + k_2) & -c_2 k_1 \\ c_1 c_2(k_1 + k_4) & m k_1 k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} 0 & -k_1 k_3 \\ c_2[(k_1 + k_2)(k_1 + k_4) - k_1^2] & c_2 k_1 k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

这表明系统 $S_{0,2}^3$ 可约化为一个两自由度系统. 但鉴于确定系统位形还需通过代数方程 (21) 获得 x_1 , 故将该系统记为 $S_{1,0}^3$, 而不记作 $S_{0,0}^2$. 将式 (19) 代入方程 (22), 可得到与式 (20) 完全相同的特征值, 即系统 $S_{0,2}^3$ 和系统 $S_{1,0}^3$ 的动力学行为一致. 求解微分方程 (22), 将结果代入代数方程 (21), 即得到位移 x_1 和速度 $\dot{x}_1$. 因此, 系统 $S_{0,2}^3$ 的两个非完整约束方程类似于控制系统的动态输出方程.

注解 1: 上述分析表明, 对于由方程 (18) 所描述的液压-弹性隔振系统 $S_{0,2}^3$, 其两个线性非完整约束确实导致系统减少一个自由度, 使系统的动力学行为等价于具有一个完整约束的系统 $S_{1,0}^3$.

注解 2: 系统 $S_{0,2}^3$ 的可达状态流形维数为 4, 可达位形流形维数为 3, 无法直接建立切丛和余切丛. 但对于由微分方程 (22) 描述的等价完整约束系统 $S_{1,0}^3$, 可用 $[x_2 \ x_3]^T$ 作为 2 维可达位形流形 Q 的坐标列阵, 建立 4 维切丛 TQ 和余切丛 T^*Q ^[12-14], 进而研究等价系统 $S_{1,0}^3$ 的 Hamilton 力学结构.

4.2 刚性圆盘在水平面上的纯滚动

考察图 6 中刚性薄圆盘在粗糙水平面上的纯滚动问题. 建立固定坐标系 $Ox_1x_2x_3$, 原点位于圆盘质心 C 的平动坐标系 $Cz_1z_2z_3$ 和转动坐标系 $C\xi\eta\zeta$. 过圆盘质心 C 作水平面, 记它与圆盘的交线为节线 CN . 该圆盘的运动可由其质心坐标 (x_1, x_2, x_3) 和其相对于平动坐标系 $Cz_1z_2z_3$ 的 Euler 角 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 来描述. 其中 θ_1 是进动角, θ_2 是章动角, θ_3 是自转角,

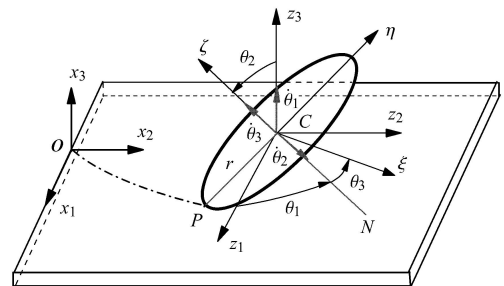


图 6 刚性薄圆盘在粗糙水平面上作纯滚动

Fig. 6 A thin rigid disc rolling on a rough horizontal plane

图中灰色箭头是对应的角速度矢量.

根据刚体运动学, 薄圆盘在粗糙水平面上作纯滚动的约束条件为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 + r(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \cos \theta_2) \cos \theta_1 - r\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 + r(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \cos \theta_2) \sin \theta_1 + r\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 &= 0 \\ \dot{x}_3 - r\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

由于上述第 3 个方程可积分为 $x_3 - r \sin \theta_2 = 0$, 故圆盘具有一个完整约束和两个非完整约束, 可记为系统 $S_{1,2}^6$. 根据分析力学的定义, 该系统的自由度是 $D(S_{1,2}^6) = 6 - 1 - 2 = 3$; 而根据本文 2.3 节的定义, 该系统自由度为 $\tilde{D}(S_{1,2}^6) = 6 - 1 - 2/2 = 4$. 以下考察这两种定义的合理性.

引入准速度 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 并建立 Gibbs-Appell 方程, 得到描述圆盘姿态动力学的一阶微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \sigma_2 / \sin \theta_2, \quad \dot{\theta}_2 = \sigma_1 \\ \dot{\theta}_3 &= \sigma_3 - \sigma_2 \cot \theta_2 \\ \dot{\sigma}_1 &= (\sigma_2^2 \cot \theta_2 - 6\sigma_1 \sigma_2 - 4g \sin \theta_2 / r) / 5 \\ \dot{\sigma}_2 &= 2\sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_2 \cot \theta_2 \\ \dot{\sigma}_3 &= 2\sigma_1 \sigma_2 / 3 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

该一阶微分方程组包含 6 个未知函数, 是封闭的, 表明圆盘姿态动力学与圆盘质心位置和速度无关, 犹如一个三自由度力学系统.

然而, 圆盘运动的位形还包括其质心运动. 从方程 (24) 求得各 Euler 角和相应的角速度后代入方程 (23) 并积分, 方可确定圆盘的质心位置 (x_1, x_2, x_3) . 这表明, 非完整约束方程 (23) 使圆盘姿态运动与圆盘质心运动之间具有单向耦合, 而这种耦合由微分方程 (23) 描述, 无法归类为由代数方程所描述的系统输出.

式 (23) 中的前两个约束方程表明, 薄圆盘在水平面上纯滚动时, 其质心水平速度 $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ 无法人为给定, 而是圆盘转动角速度 $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3)$ 的线性组合, 并且与圆盘转动的 Euler 角 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 相关. 将方程 (23) 和 (24) 联立可看出, 描述薄圆盘在水平面上的纯滚动需要五个独立坐标, 即圆盘质心运动的水平坐标 (x_1, x_2) 和圆盘绕质心转动的 Euler 角 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

上述结果表明, 若采用分析力学的自由度定义, 则意味着不考虑圆盘质心运动; 故本文的自由度定义更具有合理性.

与 4.1 节中案例所不同的是, 虽然圆盘纯滚动系统的自由度为 $\tilde{D}(S_{1,2}^6) = 4$, 但由于非完整约束方程 (23) 的复杂结构, 无法选择 4 维位形流形来构造系统的切丛和余切丛. 然而, 根据微分方程 (24), 可选择 3 维可达位形流形 Q 来完成上述构造, 进而研究圆盘姿态运动的 Hamilton 力学结构; 然后再获得圆盘质心运动规律. 由于圆盘纯滚动问题属于分析力学中的 Chaplygin 系统, 故具有上述性质^[22].

4.3 案例结果的推广

首先, 推广 4.1 节的结果. 对于系统 $S_{r,2}^n$, 在其 $2(n-r)$ 维切丛 TQ 中考察两个非完整约束方程. 根据式 (8), 不妨将其分量形式表示为

$$\sum_{j=1}^{n-r-1} \tilde{a}_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_{n-r-1}) \dot{q}_j + a_{in-r} q_{n-r} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (25)$$

其中常数 $a_{1n-r} a_{2n-r} \neq 0$. 类似于对 4.1 节中案例的分析可证明: 该系统的自由度为 $\tilde{D}(S_{r,2}^n) = n - r - 1$, 且该系统等价于系统 $S_{r+1,0}^n$, 可构造 $2(n-r-1)$ 维切丛和余切丛, 进而研究系统 $S_{r+1,0}^n$ 的 Hamilton 力学结构; 而广义坐标 q_{n-r} 和广义速度 $\dot{q}_{n-r}$ 则表现为系统 $S_{r+1,0}^n$ 的动态输出. 若系统 $S_{r,s}^n$ 具有更多偶数个类似结构的非完整约束, 还可进一步推广上述结论.

其次, 推广 4.2 节的结果. 将系统 $S_{r,s}^n$ 的 $n-r$ 维可达位形流形 Q 中的局部坐标列阵表示为

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_\alpha^T \mathbf{q}_\beta^T]^T \quad (26)$$

其中 $\mathbf{q}_\alpha$ 和 $\mathbf{q}_\beta$ 分别是 $n-r-s$ 维和 s 维列阵, 并且使得 $n-r-s$ 维准速度列阵满足

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\mathbf{q}_\alpha) \dot{\mathbf{q}}_\alpha \quad (27)$$

其中 $\mathbf{C}(\mathbf{q}_\alpha)$ 可逆. 若该系统动力学方程可解耦为两组一阶微分方程. 第一组微分方程是 $n-r-s$ 个 Gibbs-Appell 方程和 $n-r-s$ 个由式 (27) 导出的广义速度方程, 其列阵形式为

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}_\alpha) \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}, \quad \dot{\mathbf{q}}_\alpha = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{q}_\alpha) \boldsymbol{\sigma} \quad (28)$$

其中 $\mathbf{B}(\mathbf{q}_\alpha) \dot{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \partial G / \partial \dot{\boldsymbol{\sigma}}$, G 是系统的 Gibbs 函数, $\mathbf{f}$ 是对应于 $\boldsymbol{\sigma}$ 的 $n-r-s$ 维广义力列阵. 第二组微分方程则是 s 个由式 (8) 改写所得的非完整约束方程, 其列阵形式为

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\beta) [\dot{\mathbf{q}}_\alpha^T \dot{\mathbf{q}}_\beta^T]^T + \tilde{\mathbf{a}}_0(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\beta) = 0 \quad (29)$$

因此, 可对系统 $S_{r,s}^n$ 选择 $n-r-s$ 维可达位形流形 $\tilde{Q}$, 构造 $2(n-r-s)$ 维的切丛 $T\tilde{Q}$ 和余切丛 $T^*\tilde{Q}$. 方

程 (28) 的解给出系统 $S_{r,s}^n$ 在 $T\tilde{Q}$ 和 $T^*\tilde{Q}$ 中的动力学. 将方程 (28) 的解代入方程 (29) 积分, 则得到系统 $S_{r,s}^n$ 在 $2n - 2r - s$ 维可达状态流形 Ω 上的动力学.

值得指出, 上述推广的思路类似于分析力学中对 Chaplygin 系统的研究. 即若系统动力学方程与非完整约束方程之间有部分状态变量解耦, 可获得某种经过约化的完整约束系统动力学方程; 进而可建立其切丛和余切丛, 研究约化后的完整约束系统的 Hamilton 力学结构.

5 结 论

系统自由度概念源于描述系统位形所需的独立坐标数, 本质上属于运动学范畴. 在分析力学中, 当系统具有 r 个完整约束时, 系统自由度从无约束时的 n 降为 $n - r$; 若系统还有 s 个非完整约束, 则独立的坐标等时变分会减少 s 个, 故将系统自由度修正为 $n - r - s$. 但这种修正未区分两种约束对系统位形和速度的影响差异, 对非完整约束的影响给出了过高估计.

本文从动力学角度研究系统自由度概念, 分析两种约束对系统可达状态流形的不同影响, 给出可达状态流形的维数, 并将系统自由度定义为可达状态流形维数的一半, 即 $n - r - s/2$, 可消除分析力学定义导致的矛盾. 对奇数个非完整约束产生的半自由度, 通过案例给出其力学意义, 分析了半自由度与相邻整数自由度的关系. 对偶数个非完整约束产生的整数自由度缩减, 分析了本文自由度定义的合理性, 指出对缩减自由度系统建立切丛和余切丛的可能性. 虽然本文仅研究定常双面约束系统, 但主要结论可推广到含非定常双面约束的动力学系统.

致谢 感谢匈牙利布达佩斯技术与经济大学 (Budapest University of Technology and Economics) Gabor Stepan 教授的讨论, 感谢南京航空航天大学王怀磊副教授、辽宁大学郭永新教授、北京理工大学梅凤翔教授在本文撰写过程中给予的建议.

参 考 文 献

- Hibbeler RC. Engineering Mechanics: Statics, 10th Edition. New Jersey: Prentice Hall, 2004: 555
- Arnold VI. Mathematical Methods of Classical Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1978: 75-135
- Ionescu TG. Terminology for the mechanism and machine science, Chapter 3: Dynamics. *Mechanism and Machine Theory*, 2003, 38(7-10): 787-812
- Greenwood DT. Advanced Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2003: 34-37
- 汪家詠. 分析力学. 北京: 高等教育出版社, 1982: 146-149 (Wang Jiahe. Analytic Mechanics. Beijing: Higher Education Publisher, 1982: 146-149 (in Chinese))
- 梅凤翔. 高等分析力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1991: 25-28 (Mei Fengxiang. Advanced Analytic Mechanics. Beijing: Press of Beijing Institute of Technology, 1991: 25-28 (in Chinese))
- 陈滨. 分析动力学, 第二版. 北京: 北京大学出版社, 2012: 37-44 (Chen Bin. Analytic Dynamics, 2nd Edition. Beijing: Peking University Press, 2012: 37-44 (in Chinese))
- 陈滨. 关于经典非完整力学的一个争议. 力学学报, 1991, 23(3): 379-384 (Chen Bin. A contention to the classic nonholonomic dynamics. *Acta Mechnica Sinica*, 1991, 23(3): 379-384 (in Chinese))
- Guo YX, Mei FX. Integrability for Pfaffian constrained systems: A connection theory. *Acta Mechnica Sinica*, 1998, 14(1): 85-91
- 傅宇. 分析力学中自由度的确定. 天中学刊, 1988, 13(5): 71-73 (Fu Yu. Determination of degrees of freedom in analytic mechanics. *Journal of Tianzhong*, 1988, 13(5): 71-73 (in Chinese))
- 江优良. 经典力学体系中广义坐标和自由度的数目. 株洲师范高等专科学校学报, 2003, 7(2): 32-35 (Jiang Youliang. Generalized coordinates and degrees of freedom in classical mechanics. *Journal of Zhuzhou Teachers College*, 2003, 7(2): 32-35 (in Chinese))
- Lee JM. Introduction to Smooth Manifolds, 2nd Edition. New York: Springer-Verlag, 2013: 50-76
- Lee T, Leok M, McClamroch NH. Global Formulations of Lagrangian and Hamiltonian Dynamics on Manifolds. New York: Springer-Verlag, 2018: 1-388
- Marsden JE, Ratiu TS. Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems, 2nd Edition. New York: Springer-Verlag, 1999: 121-180
- 胡海岩. 结构阻尼模型及系统时域动响应. 应用力学学报, 1993, 10(1): 34-43 (Hu Haiyan. Structural damping model and dynamic system response in time domain. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1993, 10(1): 34-43 (in Chinese))
- Ziglin SL. Self-intersection of the complex separatrices and the nonexistence of the integrals in the Hamiltonian-systems with one-and-half degrees of freedom. *PMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1981, 45(3): 411-413
- Fung YC. Foundations of Solid Mechanics. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965: 20-29
- Min CQ, Dahlmann M, Sattel T. A concept for semi-active vibration control with a serial-stiffness-switch system. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, 405: 234-250
- 胡海岩, 李岳峰. 具有记忆特性的非线性减振器参数识别. 振动工程学报, 1989, 2(2): 17-27. (Hu Haiyan, Li Yuefeng. Parametric identification of nonlinear vibration isolators with memory. *Journal of Vibration Engineering*, 1989, 2(2): 17-27 (in Chinese))
- Wen YK. Method for random vibration of hysteretic systems. *Proceedings of ASCE, Journal of Engineering Mechanics*, 1976, 12(1): 249-263
- Simionatto VGS, Miyasato HH, de Melo FM, et al. Singular mass matrices and half degrees of freedom: A general method for system reduction//Proceedings of the 21st International Congress of Mechanical Engineering. Natal, RN, Brazil, 2011
- Liu C, Liu SX, Guo YX. Inverse problem for Chaplygin's nonholonomic systems. *Science in China E*, 2011, 54(8): 2100-2106