生物、工程及交叉力学

基于均匀化理论的页岩微观多孔黏土强度特性

韩强*,†,2) 屈展*,† 叶正寅**

*(西安石油大学石油工程学院,西安710065) [†](西安石油大学陕西省油气井及储层渗流与岩石力学重点实验室,西安710065) **(西北工业大学航空学院,西安710072)

摘要页岩强度是页岩油气开发所必需的基础技术参数之一,对页岩强度的研究贯穿于钻完井、压裂工艺施工的全过程.常规宏观室内实验存在试样获取困难、耗时较长,受井下工矿制约,地球物理方法获取资料品质欠佳且增加了井下设备卡、埋风险.因此,提出基于均匀化理论评价页岩微观多孔黏土强度的方法,进行多孔黏土组成与力学分析.基于耗散能原理和 Drucker-Prager 准则,开展了微观多孔黏土的强度与π函数的应变求解分析;讨论黏土颗粒与粒间孔隙的力学特性,建立多孔黏土的均匀化应变能;采用强度均匀化理论构建微观非线性函数模型,建立与多孔黏土组成、摩擦系数、内聚系数等参数相关的均匀化函数模型;基于纳米力学实验、量纲分析和有限元模拟,分析多孔黏土硬度、强度与组成的内在关系.研究结果表明,页岩微观多孔黏土的弹性模量和硬度与黏土堆积密度正相关,当黏土堆积密度一定时,硬度与内聚系数的比值受摩擦系数影响较大,为非线性递增;通过量纲分析和有限元模拟,求解页岩微观多孔黏土关于硬度-强度-堆积密度的 π函数,揭示页岩微观黏土矿物的组成与力学性质的关系,为进一步深入研究页岩细观强度参数和宏观强度预测奠定基础.

关键词 页岩,多孔黏土,均匀化,微观力学测试,强度参数

中图分类号: TE135 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-18-214

STUDY ON STRENGTH CHARACTERISTICS OF MICROPOROUS CLAY IN SHALE BASED ON HOMOGENIZATION THEORY ¹⁾

Han Qiang^{*,†,2)} Qu Zhan^{*,†} Ye Zhengyin^{**}

*(College of Petroleum Engineering, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China) †(Shaanxi Key Laboratory of Well Stability and Fluid & Rock Mechanics in Oil and Gas Reservoirs, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China) **(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract As one of the basic parameters necessary for shale oil and development, the analysis of shale strength is carried out in the whole process of drilling and hydraulic fracturing. Macroscopic experiments have problems such as sample preparation and time consuming. Limited by downhole conditions, not only the quality of data obtained by geophysical method is not good enough for mechanical analysis, but also it increases the risk of equipment stuck and buried in downhole. In this paper, the strength evaluation method of microporous clay in shale was proposed based on the homogenization theory. The composition and mechanical analysis of porous clay was carried out. Based on dissipative energy principle and Drucker-Prager criterion, the strength evaluation of porous clay was transformed into a solution to

Han Qiang, Qu Zhan, Ye Zhengyin. Study on strength characteristics of microporous clay in shale based on homogenization theory. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(3): 940-948

²⁰¹⁸⁻⁰⁶⁻²⁸ 收稿, 2019-04-03 录用, 2019-04-04 网络版发表.

¹⁾ 国家自然科学基金 (51704233, 51674200), 中国博士后科学基金 (2017M613207) 资助项目.

²⁾ 韩强, 讲师, 主要研究方向: 岩石力学与随钻测量. E-mail: hqcampus@163.com

引用格式: 韩强, 屈展, 叶正寅. 基于均匀化理论的页岩微观多孔黏土强度特性. 力学学报, 2019, 51(3): 940-948

the strain of the microscopic π function. The mechanical properties of the intergranular pores of clay were discussed and the homogenization strain energy of porous clay was established. The microscopic nonlinear function was constructed based on the strength homogenization theory. A homogenization π function was established in relation to parameters such as the composition of porous clay, coefficient of friction and cohesion. Based on nanomechanical experiments, dimensional analysis and finite element simulation, the intrinsic relationship between hardness, strength and composition of porous clay was evaluated. The results show that the elastic modulus and hardness of microporous clay in shale are positively correlated with the packing density of shale. The ratio of hardness to cohesion coefficient exhibits a nonlinear increase with increasing friction coefficient when the clay packing density is constant. The π function of porous clay with respect to hardness, strength and clay packing density is solved by dimensional analysis and finite element simulation. The composition and mechanical relationship of shale microporous clay are described. It lays a foundation for further research on shale meso-strength parameters and macro-strength prediction.

Key words shale, microporous clay, homogenization, micromechanical test, strength parameters

引 言

作为页岩油气开发的重要基础研究之一,页岩 岩石力学的表征贯穿整个地质勘探、钻完井、油气 开采的全过程[1-3].如何在勘探、钻井、开采早期, 超前或及时获取页岩力学性质并准确做出异常情况 预警,是目前岩石力学急需解决的问题.现有的室内 常规实验存在耗时长、精度低、完整岩芯不易获取 等问题,受测井技术和井下工况的制约,获取的测 井资料品质难以保证,导致页岩力学测量值与真实 值差距较大[4].同时,常规力学实验与测井解释等方 法较难反映页岩的微观力学特征,无法从根源上反 映页岩力学性质形成的机理.

近年来随着仪器化压入技术的长足发展, 通过 材料微尺度结构和显微力学特性研究,评估宏观等 效力学性能的均匀化理论逐渐建立起来. 基于材料 在微尺度下的组成与力学关系分析,采用等效均匀 化方法探寻局部对全局行为和性能的影响规律,最 终完成宏观性能预测或通过微结构设计改进材料性 能的目标^[5-7]. Cheng 等^[8] 通过材料微观力学实验和 量纲函数分析,构建了微观力学量纲函数模型.Cariou 等 [9] 通过对多孔黏弹性介质压入硬度与组成的 量纲分析,提取出多孔黏弹性材料的细观强度参数. Ortega 等^[10] 基于前述研究, 进一步建立了黏性、摩 擦性材料的强度模型,分析了微观尺度下的硬度-组 成特征参数. 在微尺度力学实验方面, Constantinides 等[11] 通过开展水泥胶结材料的微观力学分析, 评价 了该技术对非均匀材料的适用性.

由于页岩组成的多样性和非均质,考虑多尺度 均匀化理论开展其力学分析的起步较晚. Zeszotarski

等[12] 将微观力学测量引入到页岩多尺度力学的研 究中,开展了微观黏土矿物的力学分析. Ulm 等^[13-14] 通过对泥页岩的微结构和组成矿物评价,将泥页岩 按组成尺度大小的不同划分为:单晶黏土矿物、多 孔黏土矿物(微观)、具有非黏土夹的复合介质(细观) 和宏观页岩.根据页岩多尺度组成模型分类,黏土单 晶的尺度不大于 10-9 m; 微观尺度的研究对象为多 孔黏土介质,量级为10⁻⁷~10⁻⁶m;细观尺度研究对 象为夹杂非黏土相的复合介质,量级 10⁻⁵~10⁻⁴ m; 宏观尺度不小于 10⁻³ m, 为常规实验测量范围 ^[15]. 在此基础上, 文献 [16-19] 开展了页岩微观弹性力学 性质评价,明确了排水弹性多孔介质的有效弹性张 量. Chen 等^[20-21] 通过微米力学测试技术开展了页岩 细观力学参数评价,对预测页岩宏观力学性质给出 了指导性意见.本文基于均匀化理论,建立适用页岩 微观多孔黏土强度准则的均匀化函数模型, 开展页 岩微观多孔黏土力学测试,分析纯黏土矿物的力学 特征,通过量纲分析和有限元模拟,建立页岩微观 多孔黏土强度参数预测模型. 该研究不仅有利于认 知页岩微观黏土的力学属性,同时为页岩细观强度 均匀化分析和宏观强度的预测提供新的思路和方法.

1 强度均匀化理论

作为研究材料局部强度和多尺度预测的基础, 强度均匀化理论是基于材料塑性均匀化本构方程, 材料组成特征、耗散能原理和变分准则,建立强度 均匀化模型.

1.1 耗散能原理

当材料受到的有效应力大于临界强度时,会由

弹性变形转为塑性变形,其应力、应变不再满足线性 关系^[22-23].塑性变形中,以塑性变形(热能形式)耗 散掉的外力做功和材料内部存储应变能的变化,被 称为塑性耗散能^[24-25].

局部与全局的塑性应变率满足关系

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\overline{d}} : \boldsymbol{\overline{B}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} : \boldsymbol{d}$$
(1)

式中, **D** 为全局塑性应变张量, **d** 为局部塑性应变张量, **B** 为弹性应力局部化张量. 全局和局部的塑性耗散能满足^[26]

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}} = \overline{\boldsymbol{d}^{\mathrm{e}}} = \overline{\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{d}} = \overline{(\boldsymbol{\Sigma}:\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{r}}):\boldsymbol{d}}$$
(2)

式中, D^{e} 为全局塑性耗散能, d^{e} 为局部塑性耗散能, Σ 为全局应力张量, σ 为局部应力张量, σ^{r} 为残余应力张量.

根据残余应变率的协调性和希尔引理关于可能 应力场和位移场的讨论,有

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{D} + \overline{\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{r}} : \boldsymbol{d}} = \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{D} - \overline{\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{r}} : \boldsymbol{L} : \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{r}}} \qquad (3)$$

式中, *L* 为局部柔度张量. 该结果表明, 局部塑性耗 散能只是全局塑性能的一部分. 当单元体达到某一 塑性状态时, 定义真实应力场与静力可能应力场塑 性功的差值为

$$W_{\rm p} - W_{\rm p}^* = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) : \boldsymbol{d}$$
⁽⁴⁾

式中, W_p 为真实塑性功, W_p^* 为静力可能的塑性功, σ^* 为静力可能的局部应力张量.

根据屈服理论,此时屈服面对原点外凸且两矢 量夹角介于 0°~90°,此时真实应力场与可能应力场 塑性功满足

$$W_{\rm p} \ge W_{\rm p}^* \tag{5}$$

对于某一塑性状态下,真实应力与任意一个静力可 能满足条件

$$\sigma^{*}(x) = \boldsymbol{B}(x) : \boldsymbol{\Sigma}^{*} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{r}}(x)$$

$$\sigma(x) = \boldsymbol{B}(x) : \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{r}}(x)$$
(6)

式中, **2*** 为静力可能的应力张量, x 为位移. 由式 (6) 可以得到

$$\boldsymbol{\sigma}(x) - \boldsymbol{\sigma}^*(x) = \boldsymbol{B}(x) : (\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^*)$$
(7)

联立式(1)、式(5)和(7),得到

$$(\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^*) : (\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} \ge 0 \tag{8}$$

通过支撑函数[27],将局部耗散能简化为

$$\pi(d) = \sup_{\sigma^* \in G} \sigma^* : d \tag{9}$$

式中, G 为强度域.

对于任意局部应力场和与其对应的全局应力场, 根据耗散能原理有

$$\Sigma: \boldsymbol{D} = \overline{\boldsymbol{\sigma}: \boldsymbol{d}} = \overline{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{d})}$$
(10)

由屈服理论^[28],对应的全局均匀化 Π函数可类似地 定义为

$$\Pi^{\text{hom}}(\boldsymbol{D}) = \sup_{\boldsymbol{\Sigma} \in \boldsymbol{G}} \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{D}$$
(11)

根据局部应力关系建立全局应力的屈服条件和流动 法则,由于加载会产生塑性应变,需通过弹塑性变 形方程求解塑性应变矢量.这里根据屈服条件和流 动法则的描述,基于塑性应变凸函数性质的外功率 为

$$\delta W = \overline{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d}} = \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{D} \leqslant \overline{\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{d})}$$
(12)

由机动可能速度场得到的应变速率,其Π函数满足 关系

$$\Pi^{\text{hom}}(\boldsymbol{D}) = \overline{\pi(\boldsymbol{d})} \leqslant \overline{\pi(\boldsymbol{d}^*)}$$
(13)

根据数学变换,可以给出单元体真实耗散能的另一 简洁表达

$$\Pi^{\text{hom}}\left(\boldsymbol{D}\right) = \inf \overline{\pi\left(\boldsymbol{d}^*\right)} \tag{14}$$

式中, d* 为机动可能的应变张量.

1.2 强度均匀化模型

对于多相复合材料,在单元体上的塑性均匀化 积分,可以得到式 (14) 的变分问题

$$\boldsymbol{\Pi}^{\text{hom}}(\boldsymbol{D}) = \inf \frac{1}{|\boldsymbol{\Omega}|} \int_{\boldsymbol{\Omega}} \pi d\boldsymbol{V} = \inf \overline{\pi}$$
(15)

通过上述推导,将全局均匀化耗散能问题转换为与 应力和应变有关的局部耗散能求解,即局部等效刚 度张量^[29].

定义材料局部的应变能为

$$\omega_0(\boldsymbol{d}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{d}: \boldsymbol{C}: \boldsymbol{d}$$
(16)

式中, C 为单元体刚度张量. 定义局部的耗散能与应 变能差值函数为

$$v(\boldsymbol{C}) = \sup \left\{ \pi(\boldsymbol{d}) - \omega_0(\boldsymbol{d}) \right\}$$
(17)

当刚度张量为极小值时,有

$$\pi(\boldsymbol{d}) \leq \inf \left\{ \omega_0(\boldsymbol{d}) + v(\boldsymbol{C}) \right\}$$
(18)

则 П 函数的变分问题可表示为

$$\Pi^{\text{hom}}(\boldsymbol{D}) = \inf \overline{\inf \{\omega_0(\boldsymbol{d}) + v(\boldsymbol{C})\}}$$
(19)

联立式 (18) 和式 (19) 得到

$$\Pi^{\text{hom}}(\boldsymbol{D}) = \inf \left\{ W_0(\boldsymbol{D}) + V(\boldsymbol{C}) \right\}$$
(20)

通过上式的变换,将全局均匀化耗散能分解为应变 能和差值函数的求和问题,通过对材料中各相介质 属性分析,可得到 Π 函数的近似解.

2 微观多孔黏土强度均匀化模型

根据组成矿物的尺寸大小,可以将页岩组成划 分为不同的量级,如表1所示^[14].由于多孔黏土与 非黏土夹杂相的尺度相差较大,不适宜将两个尺度 进行统一分析.因此,开展页岩的微观多孔黏土的强 度分析,评价页岩微观黏土矿物的组成-力学关系, 为进一步深入研究页岩细观强度参数和宏观强度预 测奠定基础.

2.1 多孔黏土应变能

由土力学提出的 Drucker-Prager(D-P) 准则, 与主应力存在直接关系, 充分考虑了颗粒材料的内聚性和摩擦性^[30]. 微观力学研究表明, 连续 D-P 准则能够较好地表征多晶体的刚性夹杂问题, 可以将黏土颗粒简化为满足 D-P 准则的均匀模型, 分析黏性摩擦材料的界面特征^[31]. 因此, 本文通过满足 D-P 准则的页岩微观黏土强度分析, 构建页岩微观多孔黏土应变能.

表1 页岩多尺度组成分类

Table 1 The multi-scale composition of shale

Classification of model	Scale/m	Key feature
single crystal of clay	$\leq 10^{-9}$	particle aggregation of the same magnitude
microscopic scale	$10^{-8} \sim \! 10^{-6}$	porous clay medium, fracture development between particles
mesoscopic scale	$10^{-5} \sim \! 10^{-4}$	porous clay with non-clay mineral
macroscopic scale	$\ge 10^{-3}$	observation by conventional test

由塑性能与应变速率的关系,给出黏土晶体颗 粒强度的定义

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2} + \alpha_{\rm s} \sigma_{\rm m} - c_{\rm s} \leq 0 \pi(\boldsymbol{d}) = \sup(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d}) = \frac{c_{\rm s}}{\alpha_{\rm s}} d_{\rm v}$$

$$(21)$$

式中, J_2 为应力偏量, α_s 为摩擦系数, c_s 为内聚系数, σ_m 为主应力.

D-P 准则的屈服条件满足

$$f(\sigma) = 1 - \left(\frac{\sigma_{\rm m} - S_0}{A_{\rm D}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{J_2}}{B_{\rm D}}\right)^2 \le 0 \qquad (22)$$

其中

$$\left.\begin{array}{l}
B_{\rm D} = \alpha_{\rm s} A_{\rm D} \\
S_0 = \frac{c_{\rm s}}{\alpha_{\rm s}} \\
A_{\rm D} \to 0
\end{array}\right\}$$
(23)

根据塑性流动法则和屈服条件,对 σ 求偏导

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\rm m}} \left(\sigma_{\rm m}, \sqrt{J_2} \right) \boldsymbol{I} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\rm d}} \left(\sigma_{\rm m}, \sqrt{J_2} \right) \frac{\delta B_{\rm D}^2}{\lambda \sigma_{\rm d}} \tag{24}$$

则局部耗散能可表示为

$$\pi (d_{\rm v}, d_{\rm d}) = S_0 d_{\rm v} - \sqrt{(A_{\rm D} d_{\rm v})^2 - \left(\sqrt{2}B_{\rm D} d_{\rm d}\right)^2}$$
(25)

式中, d_v 为局部体应变, d_d 为局部偏应变.

通过变换将满足 D-P 准则的强度关系简化为与 应变有关的 π 函数,强度均匀化转换为对函数的均 匀化求解问题.

多孔黏土介质的应力--应变方程可表示为

$$\sigma = C : d + \tau \tag{26}$$

其中

$$C = 3kJ + 2\mu K$$

$$\tau = \tau_i I, V_s$$

$$\tau = 0, V_p$$

$$I = J + K$$

$$(27)$$

式中, k 为体积模量, μ 为剪切模量, τ 为预应力张 量, τ_i 为预应力张量分量, V_s 为固相体积, V_p 为孔 隙体积.

١

考虑多孔黏土复合介质的黏土固相 (黏土堆积 密度 η),相对应的微观均匀化的应力–应变方程为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{C}^{\text{hom}} : \boldsymbol{D} + \boldsymbol{T} \tag{28}$$

其中

$$C^{\text{hom}} = 3k^{\text{hom}} \boldsymbol{J} + 2\mu^{\text{hom}} \boldsymbol{K}$$

$$T = \tau : \eta \overline{A_s}$$

$$k^{\text{hom}} = \eta k \boldsymbol{J} : \overline{A_s}$$

$$\mu^{\text{hom}} = \eta \mu \boldsymbol{K} : \overline{A_s}$$
(29)

式中, *C*^{hom} 为微观均匀化刚度张量, *k*^{hom} 为有效体积模量, *µ*^{hom} 为有效剪切模量, *A*_s 固相平均应变张量.

基于 Levin 理论对于复合材料的基本假设,均匀 化应变能可表示为^[32]

$$W_0 = \overline{\frac{1}{2}\boldsymbol{d}:\boldsymbol{C}:\boldsymbol{d}} + \overline{\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{d}}$$
(30)

通过上式的变换,将含预应力的多孔黏土问题分解 成线弹性和存在预应力问题展开讨论.黏土颗粒与 粒间孔隙的力学特性满足条件

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{\tau}_{\rm s} = \boldsymbol{\tau}_{\rm sm} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{C}_{\rm p} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\tau}_{\rm P} = \boldsymbol{0} \end{array} \right\}$$
(31)

微观均匀化应变能满足条件

$$W_{0} = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}: \boldsymbol{C}: \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\tau}_{s}: \boldsymbol{C}_{s}^{-1}: \boldsymbol{C}^{\text{hom}}: \boldsymbol{D} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}_{s}: (\boldsymbol{C}_{s}^{-1}: \boldsymbol{C}^{\text{hom}} - \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{I}): \boldsymbol{C}^{-1}: \boldsymbol{\tau}_{s}$$

$$T = \boldsymbol{\tau}_{s}: \boldsymbol{C}_{s}^{-1}: \boldsymbol{C}^{\text{hom}}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{C}^{\text{hom}}: \boldsymbol{D} + \boldsymbol{T}$$

$$(32)$$

式中, τ_s 为黏土颗粒的预应力张量, τ_{sm} 为预应力 张量分量, τ_p 为孔隙预应力张量, C_p 为孔隙刚度张 量, C_s 为黏土颗粒刚度张量.

引入页岩黏土堆积密度参数,根据线性微观力 学理论和强度均匀化方法^[33],得到多孔黏土的应变 能的应变表达式为

$$W_{0}(D_{v}, D_{d}) = \frac{1}{2}k^{\text{hom}}D_{v}^{2} + \mu^{\text{hom}}D_{d}^{2} + \frac{k^{\text{hom}}}{k}\tau D_{v} + \frac{1}{2k}\left(\frac{k^{\text{hom}}}{k} - \eta\right)\tau^{2} \quad (33)$$

式中, D_v 为全局体应变, D_d 为全局偏应变.

2.2 非线性函数

报

通过 1.2 节的讨论,可以给出固相介质的非线性 函数

$$v_{s} = \operatorname{stat} \left\{ \pi(d) - w_{s}(d) \right\}$$

$$w_{s} = \frac{1}{2} k d_{v}^{2} + \mu d_{d}^{2} + \tau d_{v}$$
(34)

根据驻值定理,对式 (34) 求应变速率的偏导 $\partial v_{e} = \partial (\pi - w_{e})$

$$\frac{\partial V_{s}}{\partial d_{v}} = \frac{\partial (\alpha - M_{s})}{\partial d_{v}} =$$

$$S_{0} - \frac{A_{D}^{2} d_{v}}{\sqrt{(A_{D} d_{v})^{2} - (\sqrt{2}B_{D} d_{d})^{2}}} - kd_{v} - \tau = 0$$

$$\frac{\partial v_{s}}{\partial d_{d}} = \frac{\partial (\pi - W_{s})}{\partial d_{d}} =$$

$$\frac{2B_{D}^{2} d_{d}}{\sqrt{(A_{D} d_{v})^{2} - (\sqrt{2}B_{D} d_{d})^{2}}} - 2\mu d_{d} = 0$$

$$(35)$$

其中

$$k = \frac{A_D^2}{\sqrt{(A_D d_V)^2 - (\sqrt{2}B_D d_d)^2}} > 0$$

$$\mu = \frac{B_D^2}{\sqrt{(A_D d_V)^2 - (\sqrt{2}B_D d_d)^2}} > 0$$
 (36)

根据式 (35) 和式 (36), 可以得到

$$\frac{k}{\mu} = \frac{A_{\rm D}^2}{B_{\rm D}^2} = \frac{1}{\alpha_{\rm s}^2}$$
 (37)

将上式代入式(34),有

$$v_{\rm s} = \left(\frac{B_{\rm D} \left(S_0 - \tau\right)}{2A_{\rm D}}\right)^2 \frac{1}{\mu} - \frac{1}{2} \frac{B_{\rm D}^2}{\mu} \tag{38}$$

2.3 均匀化函数

将推导出的 W₀ 和 v_s 代入 Π 函数模型中, 求解 满足驻值条件的方程

$$\Pi^{\text{hom}} = \text{stat} \left[W_0 \left(D_{\text{v}}, D_{\text{d}} \right) + \eta v_{\text{s}} \right]$$
(39)

将式 (39) 分别对剪切模量和预应力求偏导,可以得 到

$$\frac{\partial \Pi^{\text{hom}}}{\partial \mu} = \frac{\partial k}{\partial \mu} \frac{\partial W_0}{\partial k} + \frac{\partial W_0}{\partial \mu} + \eta \frac{\partial v_s}{\partial \mu} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi^{\text{hom}}}{\partial \tau} = \frac{\partial W_0}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial v_s}{\partial \tau} = 0$$

$$(40)$$

将式 (31)、式 (33) 和式 (38) 代入式 (40) 中,得到

$$\frac{\partial \Pi^{\text{hom}}}{\partial \tau} \frac{\mu}{k} K_{\text{m}} D_{\text{v}} + \frac{\tau}{k^{2}} \left(\mu K_{\text{m}} - k\eta \right) + \eta \frac{B_{\text{D}}^{2}}{A_{\text{D}}^{2}} \left(\frac{\tau - S_{0}}{2\mu} \right) = 0$$

$$\mu^{2} = \frac{B_{\text{D}}^{2}}{A_{\text{D}}^{2}} \frac{\eta \left[\eta A_{\text{D}}^{2} \left(S_{0}^{2} - A_{\text{D}}^{2} \right) + K_{\text{m}} B_{\text{D}}^{2} \left(2A_{\text{D}}^{2} - S_{0}^{2} \right) \right]}{\left[\eta K_{\text{m}} A_{\text{D}}^{2} D_{\text{v}}^{2} + \left(2\eta M_{\text{m}} A_{\text{D}}^{2} - 4K_{\text{m}} M_{\text{m}} B_{\text{D}}^{2} \right) D_{\text{d}}^{2} \right]}$$

$$(41)$$

联立式 (40) 和式 (41), 有

$$\Pi^{\text{hom}} = \Sigma^{\text{hom}} D_{\text{v}} - \\ \text{sign} \left(2K_{\text{m}} B_{\text{D}}^2 - \eta A_{\text{D}}^2 \right) \sqrt{(A^{\text{hom}})^2 D_{\text{v}}^2 + 2(B^{\text{hom}})^2 D_{\text{d}}^2}$$
(42)

其中

$$A^{\text{hom}} = \sqrt{\frac{c_{\text{s}}\eta^{2}K_{\text{m}}\left(\eta - \alpha_{\text{s}}^{2}K_{\text{m}}\right)}{\left(\eta - 2\alpha_{\text{s}}^{2}K_{\text{m}}\right)^{2}}}$$

$$B^{\text{hom}} = \sqrt{\frac{c_{\text{s}}\eta^{2}M_{\text{m}}\left(\eta - \alpha_{\text{s}}^{2}M_{\text{m}}\right)}{\left(\eta - 2\alpha_{\text{s}}^{2}M_{\text{m}}\right)^{2}}}$$

$$\Sigma^{\text{hom}} = \frac{\eta\alpha_{\text{s}}K_{\text{m}}}{2\alpha_{\text{s}}^{2}K_{\text{m}} - \eta}$$

$$(43)$$

通过上述推导,建立了表征黏土组成的堆积密度、强度参数和均匀化π函数之间的联系.下面通过 微观力学实验外推出纯黏土的基本力学参数,采用 量纲分析构建多孔黏土强度-硬度模型,应用有限元 模拟页岩微观力学实验,开展微观均匀化的求解.

3 页岩微观力学测试与模型求解

由于目前单晶黏土矿物力学属性的获取较为困 难,采用微观力学测试开展多孔黏土力学参数分析、 组成-力学关系评价,为微观强度均匀化的求解提供 基础参量.通过 II 函数模型的量纲分析,构建页岩 微观力学-组成的量纲表达,并进行数值模拟求解.

3.1 页岩微观力学测试

(1) 试样制备

测试岩样选自四川盆地志留系龙马溪组页岩露 头,根据标准 ISO 14577 和 GB/T 22458-2008 制作块 体试样尺寸 60 mm×25 mm×15 mm,试样上下表面平 行度小于 0.3°,侧面与工作面垂直度小于 0.3°,试样 表面进行二次精细抛光处理,烘干、密封待用.

(2) 实验设备与测量步骤

测量选用 Triboindenter 纳米测试仪, 压头试件 选用玻氏压头. 单次力学测试分为三个阶段: 加载阶 段, 将压头与试样表面垂直零接触, 确定试样表面 无预应力, 然后将压头以恒定速率垂直加载于试样 表面; 保持阶段, 当加载达到最大压入载荷时, 保持 载荷 15 s; 卸载阶段, 以恒定速率将载荷卸载为零, 压头提升远离试样表面 ^[34-35].

(3) 测试结果分析

基于页岩微观力学分析和页岩的组成与孔隙特征评价,获取页岩试样的黏土堆积密度(页岩多尺

度组成综合表征参量^[20]),根据页岩的微观力学测 试分析其弹性模量和压入硬度分布,建立堆积密度 与力学属性关联图版,外推出垂直/平行层里面的纯 黏土弹性模量和压入硬度^[21].由图1可以看出:黏 土堆积密度在 0.7~0.95 的弹性模量分布介于 4.89~ 20.5 GPa,弹性模量与黏土堆积密度正相关分布,且 在平行层理方向上的值要大于垂直层理方向.通过对 黏土堆积密度和弹性模量、硬度的拟合,外推出纯黏 土矿物的弹性模量分别为 *E*_h = 24.2 GPa 和 *E*_v = 15.8 GPa.图 2 为压入硬度与黏土堆积密度关系图版,由 于在平行和垂直层理面方向上的硬度变化较小,将 其统一处理,外推出黏土颗粒的硬度为 *h*_s = 0.51 GPa (图 2).





3.2 量纲分析

根据微观力学测试响应关系,页岩硬度是局部 区域力学响应在一定条件下的整体表现,是页岩对 外界物体机械作用局部抵抗能力的表现,反映着黏 土相凝聚和胶结强度的程度^[31-32]. 压入测试的量纲 函数关系满足

$$\frac{H}{c_{\rm s}} = \Pi \left(\theta, \frac{E}{c_{\rm s}}, \alpha_{\rm s}, \eta \right) \tag{44}$$

式中, H 为压入硬度, θ 为压头等效半锥角, E 为黏 土弹性模量. 由硬度定义建立硬度与强度的关系

$$H = \frac{1}{A_{\rm c}} \inf \int_{\Omega} \Pi^{\rm hom} \left(\boldsymbol{D} \right) \mathrm{d}\Omega \tag{45}$$

通过上述变换,建立均匀化耗散能与量纲函数的关 系表达,下面通过模型求解与分析,评价各因素间 的相互关系.

3.3 模型求解与分析

根据单元等效化理论,通过离散微结构的周期 性微观场方法,将微观多孔黏土等效为组成周期性 排列的特征体积单元,包含组成和微结构等基本组 成特征.根据对局部单元体的属性扰动变化分析,采 用均匀化方法求解全局的属性参数(图 3).



通过对多孔黏土的微观力学测试分析和周期性局部分布的假设,确定数值模拟单元和输入参数,采 用二维等效方法进行微观力学测试的模拟与分析.根 据页岩多尺度组成分类,建立二维基质--孔隙模型, 选取孔隙直径为 0.25 µm,样试样大小 10 µm×10 µm. 基于微观力学测试确定纯黏土输入的基本参数:平 行层理面弹性模量 24.2 GPa,垂直层理面弹性模量 15.8 GPa,压入硬度 0.51 GPa,多组强度参数和黏土 堆积密度,在压入载荷 4.8 mN下开展微观力学实验 的有限元模拟.图 4 是根据微观力学测试有限元模 拟结果,获取的孔黏土压入硬度、强度参数和黏土 堆积密度分布图版. 当摩擦系数一定时,多孔黏土硬度与内聚系数的比值与黏土堆积密度正相关. 当黏土堆积密度一定时,硬度与内聚系数的比值受摩擦系数影响较大,为非线性递增.



Fig. 4 Finite element simulation results of shale micro strength parameters

根据微观黏土的四参数有限元力学测试模拟结 果建立量纲函数,分析硬度、摩擦系数、内聚系数和 堆积密度的分布规律,建立微观多孔黏土硬度的量 纲表达函数

$$H = h_{\rm s}\left(c_{\rm s}, \alpha_{\rm s}\right) \times \Pi\left(\alpha_{\rm s}, \eta\right) \tag{46}$$

通过有限元模拟,构造压入硬度表达式为

$$h_{\rm s} = c_{\rm s} \times 4.59 \Big[1 + 2.90\alpha_{\rm s} + \left(1 \times 10^{-8}\alpha_{\rm s} \right)^3 + \left(1 \times 10^{-8}\alpha_{\rm s} \right)^{10} \Big]$$
(47)

建立与摩擦系数和堆积密度相关的微观量纲函数表 达式为

$$\Pi = \Pi_1(\eta) + \alpha_s (1 - \eta) \Pi_2(\alpha_s, \eta)$$
(48)

其中

$$\Pi_{1} = \eta \left(1 + a (1 - \eta) + b (1 - \eta)^{2} + c (1 - \eta) \eta^{3} \right)$$

$$\Pi_{2} = \alpha_{s} \eta^{2} \left(d + e (1 - \eta) + f (1 - \eta) \alpha_{s} + g \alpha_{s}^{3} \right)$$
(49)

式中各系数的拟合结果为

$$a = -6.53; b = 10.10; c = 4.58; d = 1.0 \times 10^{-8}$$

$$e = 14.30; f = -16.80; g = 4.59$$
(50)

通过上述问题的讨论与求解,可进一步揭示页岩微 观多孔黏土矿物在组成、硬度和强度参数间的关系, 为深入研究页岩细观和宏观力学形成机理奠定了 基础.

4 结 论

本文基于均匀化理论,开展了页岩微观多孔黏 土强度均匀化模型研究,进行了页岩微观力学测试, 分析了多孔黏土力学参数与黏土堆积密度的关系, 采用量纲分析和有限元模拟,求解与硬度-堆积密度 和强度参数相关的均匀化函数.得出以下结论:

(1)基于耗散能原理和强度均匀化理论,构建满 足 D-P 准则的 π 函数,可以将页岩多孔黏土强度的 均匀化问题转换为对 π 函数的均匀化求解,通过微 观多孔黏土应变能和非线性函数的建立,推导出与 多孔黏土组成和力学参数相关的均匀化函数模型.

(2)页岩微观多孔黏土力学测试表明,当黏土堆 积密度一定时,弹性模量在平行层理面的值大于垂 直层理面,且弹性模量与黏土堆积密度正相关.通过 对微观力学测试结果的外推分析,得到纯黏土矿物 的固有属性,为后续的研究奠定了理论基础.

(3) 基于量纲分析和有限元模拟的页岩微观组成 和力学参数分析表明, 当摩擦系数一定时, 堆积密度 越大, 硬度与内聚系数的比值也越大. 当黏土堆积密 度一定时, 硬度与内聚系数的比值受摩擦系数影响 较大, 为非线性递增. 通过求解得到多孔黏土硬度– 强度参数模型, 为页岩细观含非黏土夹杂的强度均 匀化评价和宏观强度预测奠定了基础.

参考文献

- 陈勉, 葛洪魁, 赵金洲等. 页岩油气高效开发的关键基础理论与 挑战. 石油钻探技术, 2015, 43(5): 7-14 (Chen Mian, Ge Hongkui, Zhao Jinzhou, et al. The key fundamentals for the efficient exploitation of shale oil and gas and its related challenges. *Petroleum Drilling Techniques*, 2015, 43(5): 7-14 (in Chinese))
- 2 孙可明,张树翠. 含层理页岩气藏水力压裂裂纹扩展规律解析 分析. 力学学报, 2016, 48(5):1229-1237 (Sun Kerning, Zhang Shucui. Hydraulic fracture propagation in shale gas bedding reservoir analytical analysis. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechancis*, 2016, 48(5): 1299-1237 (in Chinese))
- 3 韩铁林,师俊平,陈蕴生等. 轴、侧向同卸荷下砂岩力学特性影响 的试验研究. 力学学报, 2016, 48(4): 936-943 (Han Tielin, Shi Junping, Chen Yunsheng, et al. Experimental study on mechanics characteristics of sandstone under axial unloading and radial unloading path. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(3): 936-943 (in Chinese))
- 4 崔思华, 班凡生, 袁光杰. 页岩气钻完井技术现状及难点分析. 天然气工业, 2011, 31(4): 72-75 (Cui Sihua, Ban Fansheng, Yuan Guangjie. Status quo and challenges of global shale gas drilling and

completion. Natural Gas Industry, 2011, 31(4): 72-75 (in Chinese))

- 5 罗荣,曾亚武,杜欣. 非均质岩石材料宏细观力学参数的关系 研究. 岩土工程学报, 2012, 34(12): 2331-2336 (Luo Rong, Zeng Yawu, Du Xin. Relationship between macroscopic and mesoscopic mechanical parameters of inhomogenous rock material. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2012, 34(12): 2331-2336 (in Chinese))
- 6 Li ZH, Ma Q, Cui JZ. Multi-scale modal analysis for axisymmetric and spherical symmetric structures with periodic configurations. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 2017, 317: 1068-1101
- 7 Gianpetro DP, Owen DR. Multiscaling in Molecular and Continuum Mechanics: Interaction of Time and Size from Macro to Nano. Netherlands: Springer, 2007
- 8 Cheng YT, Cheng CM. Scaling, dimensional analysis, and indentation measurements. *Materials Science & Engineering: R: Reports*, 2004, 44(4-5): 91-149
- 9 Cariou S, Ulm FJ, Dormieux L. Hardness–packing density scaling relations for cohesive-frictional porous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2008, 56(3): 924-952
- 10 Ortega JA, Gathier B, Ulm FJ. Homogenization of cohesivefrictional strength properties of porous composites: Linear comparison composite approach. *Journal of Nanomechanics and Micromechanics*, 2011, 1(1): 11-23
- Constantinides G, Ulm FJ, Vliet KV. On the use of nanoindentation for cementitious materials. *Materials and Structures*, 2003, 36(3): 191-196
- 12 Zeszotarski JC, Chromik RR, Vinci RP, et al. Imaging and mechanical property measurements of kerogen via nanoindentation. *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 2004, 68(20): 4113-4119
- 13 Ulm FJ, Abousleiman Y. The nanogranular nature of shale. Acta Geotechnica, 2006, 1(02): 77-88
- 14 Ulm FJ, Vandamme M, Bobko C, et al. Statistical indentation techniques for hydrated nanocomposites: concrete, bone, and shale. *Journal of the American Ceramic Society*, 2007, 90(9): 2677-2692
- 15 韩强, 屈展, 叶正寅. 页岩多尺度力学特性研究现状. 应用力学 学报, 2018, 35(3): 564-570 (Han Qiang, Qu Zhan, Ye Zhengyin. Research status of shale multi-scale mechanical properties. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2018, 35(3): 564-570 (in Chinese))
- 16 Kumar V, Sondergeld CH, Rai CS. Nano to macro mechanical characterization of shale. SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 8-10 Oct, 2012, San Antonio, Texas, USA
- 17 Kumar V, Curtis ME, Gupta N, et al. Estimation of elastic properties of organic matter in Woodford shale through nanoindentation measurements//SPE Canadian Unconventional Resources Conference, 30 October-1 Nov, 2012, Calgary, Alberta, Canada
- 18 Shukla P, Kumar V, Curtis M, et al. Nanoindentation studies on shales. 47th US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium, 23-26 Jun, 2013, San Francisco, California, USA
- 19 Mason J, Carloni J, Zehnder A, et al. Dependence of micromechanical properties on lithofacies: Indentation experiments on Marcellus shale//SPE/AAPG/SEG Unconventional Resources Technology Conference, 25-27 Aug, 2014, Denver, Colorado, USA

- 20 Chen P, Han Q, Ma TS, et al. The mechanical properties of shale based on micro-indentation test. *Petroleum Exploration and Devel*opment, 2015, 42(5): 723-732
- 21 Han Q, Qu Z, Ye ZY. Research on the mechanical behavior of shale based on multiscale analysis. *Royal Society Open Science*, 2018, 5: 181039
- 22 侯淑娟,梁慧妍, 汪全中等. 基于迭代法的非线性弹性均质化研究. 力学学报, 2018, 50(4): 135-144 (Hou Shujuan, Liang Huiyan, Wang Quanzhong, et al. Study on nonlinear elastic homogenization with iterative method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(4): 135-144 (in Chinese))
- 23 武守信,魏吉瑞,杨舒蔚. 基于能量等效原理的应变局部化分析: I. 一维解析解. 力学学报, 2017, 49(3): 667-676 (Wu Shouxin, Wei Jirui, Yang Shuwei. Analysis of strain localization by energy equivalence: I. one-dimensional analytical solution. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(3): 667-676 (in Chinese))
- 24 王增会,李锡夔. 基于介观力学信息的颗粒材料损伤-愈合与塑 性宏观表征. 力学学报, 2018, 50(2): 284-296 (Wang Zenghui, Li Xikui. Meso-mechanically informed macroscopic characterization of damage-healing-plasticity for granular materials. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(2): 284-296 (in Chinese))
- 25 张研, 张子明. 材料细观力学. 北京: 科学出版社, 2008 (Zhang Yan, Zhang Ziming. Mesomechanics of Materials. Beijing: Science Press, 2008 (in Chinese))
- 26 Hellmich C, Barthélémy JF, Dormieux L. Mineral–collagen interactions in elasticity of bone ultrastructure–a continuum micromechanics approach. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2004, 23(5): 783-810

- 27 Dormieux L, Kondo D, Ulm FJ. Microporofracture and Damage Mechanics, Microporomechanics. New York: John Wiley & Sons, Ltd, 2006: 291-318
- 28 J. Salençon. Introduction to the yield design theory and its applications to soil mechanics. *European Journal of Mechanics A-Solids*, 1990, 9(5): 477-500
- 29 Castañeda PP. New variational principles in plasticity and their application to composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1992, 40(8): 1757-1788
- 30 Fritsch A, Dormieux L, Hellmich C, et al. Micromechanics of crystal interfaces in polycrystalline solid phases of porous media: fundamentals and application to strength of hydroxyapatite biomaterials. *Journal of Materials Science*, 2007, 42(42): 8824-8837
- 31 Maalej Y, Dormieux L, Sanahuja J. Micromechanical approach to the failure criterion of granular media. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2009, 28(3): 647-653
- 32 张研, 韩林. 细观力学基础. 北京: 科学出版社, 2014 (Zhang Yan, Han Lin. Foundation of Mesomechanics. Beijing: Science Press, 2014: 216-219 (in Chinese))
- 33 Bobko CP, Gathier B, Ortega JA, et al. The nanogranular origin of friction and cohesion in shale—A strength homogenization approach to interpretation of nanoindentation results. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2011, 35(17): 1854-1876
- 34 Borodich FM, Keer LM, Korach CS. Analytical study of fundamental nanoindentation test relations for indenters of non-ideal shapes. *Nanotechnology*, 2003, 14(7):803-808
- 35 Chollacoop N, Dao M, Suresh S. Depth-sensing instrumented indentation with dual sharp indenters. *Acta Materialia*, 2003, 51(13): 3713-3729