生物、工程及交叉力学

基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法 1)

孙攀旭* 杨 红*,†,2) 吴加峰* 王志军*

*(重庆大学土木工程学院, 重庆 400045)

†(重庆大学山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400045)

摘要 黏性阻尼模型存在每周期耗散能量与外激励频率相关的缺陷, 复阻尼模型时域计算结果存在发散现象. 为克服上述两种阻尼模型的不足, 在复阻尼模型基础上, 依据时频域转化原则推导了频率相关黏性阻尼模型. 频率相关黏性阻尼模型不仅具有每周期耗散能量与外激励频率无关的优点, 还保证了结构位移时程的稳定收敛. 混合结构由具有不同阻尼特性的材料组成, 其阻尼矩阵为非比例矩阵, 无法直接采用实模态叠加法. 根据频率相关黏性阻尼模型与复阻尼模型的转换关系, 提出了适用于混合结构的基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法. 算例分析结果表明, 与基于黏性阻尼模型的复模态叠加法相比, 基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法不仅计算结果唯一, 且不增加矩阵维度, 具有较高的计算效率. 小阻尼情况下, 两种方法的计算结果近似相等, 且与复阻尼模型的频域计算结果一致. 当阻尼比较大时, 两种方法的计算结果差异增大, 但频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法与复阻尼模型的频域计算结果仍保持一致.

关键词 黏性阻尼, 复阻尼, 频率相关, 混合结构, 复模态叠加法

中图分类号: TU311.3　**文献标识码:** A　**doi:** 10.6052/0459-1879-18-170

COMPLEX MODE SUPERPOSITION METHOD BASED ON FREQUENCY DEPENDENT VISCOUS DAMPING MODEL 1)

Sun Panxu* Yang Hong*,†,2) Wu Jiafeng* Wang Zhijun*

*(*School of Civil Engineering*, *Chongqing University*, *Chongqing* 400045, *China*)

†(*Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area of the Ministry of Education*, *Chongqing University*, *Chongqing* 400045, *China*)

Abstract According to the viscous damping model, energy dissipation is related to external excitation frequencies in each cycle. There is divergence in time domain calculation results of complex damping model. In order to overcome the two kinds of disadvantages of damping models, frequency dependent damping model is obtained by time-frequency transformation principle on the basis of complex damping model. Energy dissipation is not related to external excitation frequencies in each cycle. In addition, time-history calculation of frequency dependent damping model is convergent. Real mode superposition method is not directly adopted, because the damping matrix of mixed structure of multiple damping characteristic materials is non-proportional. By the transformations of frequency dependent damping model and complex damping model, complex mode superposition method is proposed based on frequency

2018–04–04 收稿, 2018–07–30 录用, 2018–07–31 网络版发表.

1) 国家重点研发计划 (2016YFC0701506) 和重庆市研究生科研创新项目 (CYB18036) 资助.

2) 杨红, 教授, 主要研究方向: 结构抗震设计理论与方法. E-mail: yangh@cqu.edu.cn

引用格式: 孙攀旭, 杨红, 吴加峰, 王志军. 基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法. 力学学报, 2018, 50(5): 1185-1197

Sun Panxu, Yang Hong, Wu Jiafeng, Wang Zhijun. Complex mode superposition method based on frequency dependent viscous damping model. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(5): 1185-1197

dependent damping model. And it can be directly applied to mixed structure. The analysis results of the cases show that compared with complex mode superposition method based on viscous damping model, the calculation results of the complex mode superposition method based on frequency dependent damping model are unique. In addition, the method does not increase matrix dimensions and has high computational efficiency. The analysis results of small damping cases show that calculation results of the two methods are approximately equal. They are consistent with frequency domain calculation results of complex damping model. When the damping ratios are larger, the difference of calculation results by the two methods will increase. While the calculation results of complex mode superposition method based on frequency dependent damping model will remain consistent with frequency domain calculation results of complex damping model.

Key words viscous damping, complex damping, frequency dependent, mixed structure, complex mode superposition method

引言

物理模型采用数学动力方程求解时, 选择合理的阻尼模型是关乎计算分析结果可靠性的关键因素之一[1]. 迄今为止已有多种阻尼理论被提出, 包括黏性阻尼模型、复阻尼模型、分数导数理论等[2]. 黏性阻尼模型具有数学处理上的简易性, 而复阻尼模型易于描述材料的阻尼特性, 故这两种阻尼理论应用最为广泛[3-4]. 另一方面, 黏性阻尼模型在结构稳态反应中每周期耗散能量与外激励频率相关, 这与大部分工程材料在较宽频率范围内每周期耗散能量与外频率无关的现象不符[5-8], 复阻尼模型的时程计算结果存在发散现象[9], 为克服黏性阻尼模型和复阻尼模型的缺陷, 有必要寻求一种新阻尼模型以改善结构动力时程响应计算的合理性和适用性.

Lee 等[10] 将黏性阻尼模型与复阻尼模型相结合; 尚守平等[11] 提出阻尼力与加速度成正比, 但上述得到的新运动方程通解中仍含有发散项. 朱镜清等[7] 直接舍弃通解中发散项的计算方法, 保证了计算结果的稳定性, 但这种处理在数学上是不正确的[12]. Wang[13] 采用 Rayleigh 阻尼矩阵等效复阻尼矩阵, 但上述方法得到的计算结果与复阻尼模型存在一定的误差, 且计算结果不具有唯一性. Clough [14]、Chen[15] 等对复阻尼模型进行了修正, 假定阻尼力的大小与结构体系的位移大小成正比, 且与速度的方向相反, 进而提出了迟滞阻尼理论, 但无法保证系统的线性特点. Pan 等[16] 在 Biot 阻尼模型基础上研究了卷积型阻尼运动方程的构建和求解; Reggio[17] 将 Maxwell-Wiechert 本构模型等效于复阻尼本构模型, 亦可得到在时域内稳定收敛的运动方程. 上述方法的实质是采用黏弹性材料的本构模型作为结构体系的阻尼力模型, 计算过程复杂, 是否符合材料的阻尼特性亦有待进一步验证. 朱镜清[18] 利用复化对偶原则, 在复阻尼模型基础上提出了频率相关黏性阻尼模型, 可直接在实数域中进行计算.

由具有不同阻尼特性的材料组成的混合结构, 其阻尼矩阵不再与刚度矩阵保持比例关系, 结构无阻尼自由振动模态向量矩阵无法使阻尼矩阵对角化, 传统的实模态叠加法将不再适用[19]. 为此, 潘旦光[20]、黄维等[21-22] 基于位移误差最小原则得到了最佳等效阻尼比, 并采用 Rayleigh 阻尼模型计算竖向混合结构的动力响应; Luco 等[23] 基于拉格朗日插值函数将 Caughey 阻尼矩阵等效于非比例阻尼矩阵; 汪梦甫[24]、Neugebauer 等[25,26] 在黏性阻尼模型基础上, 利用基于状态空间法的复模态叠加法计算非比例线性阻尼体系的动力反应; Qin[27]、楼梦麟等[28] 研究了非比例阻尼体系复模态的实模态摄动法; 国巍等[29] 将直接积分法和强迫解耦法联系起来求解非比例结构的地震响应; 段绍伟等[30]、Mohamed 等[31] 采用模态应变能法计算非比例线性阻尼体系的响应; Zoghaib 等[32] 提出利用共振模态和拉普拉斯变换相结合计算非比例线性阻尼体系的时域响应和频域响应. 上述方法均建立在黏性阻尼模型基础上, 但存在计算结果不唯一、合理性不易被判定的缺点. 复阻尼模型可直接采用复模态叠加法计算混合结构的动力响应[33-34], 但需剔除发散项, 遵循复化对偶原则.

本文在上述研究的基础上, 利用傅里叶变换过滤复阻尼模型的发散项, 得到了在频域上与复阻尼模型等效的频率相关黏性阻尼模型. 频率相关黏性阻尼模型可克服黏性阻尼中每周期耗散能量与外激励频率相关的缺陷, 还避免了复阻尼模型的发散. 在单自由体系响应的计算基础上, 本工作采用频率相关黏性阻尼模型与复阻尼模型的转换关系, 研究了基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法, 以期为混合结构的振型分解反应谱法提供理论依据.

相比非比例阻尼体系的基于黏性阻尼模型的复模态叠加法, 基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法中阻尼矩阵仅依赖于结构的损耗因子, 计算结果具有唯一性, 合理性易判定; 矩阵维度不增加, 计算量相对较小.

1 基于复阻尼模型的频率相关黏性阻尼模型

复阻尼模型假定简谐激励作用下, 结构内部的阻尼应力与弹性应力成正比, 而与速度同相. 在简谐荷载作用下, 复阻尼模型中阻尼力每个周期消耗的能量与外荷载激励的频率无关, 该特点与实际相符, 因此在结构动力响应计算中得到了较广泛使用. 单自由度体系的复阻尼运动方程为

$$m\ddot{x}(t)+\mathrm{i}\eta kx(t)+kx(t)=-mg(t)-\mathrm{i}mg'(t) \tag{1}$$

其中, m 为结构质量, k 为结构刚度, $g(t)$ 为地震加速度, $g(t)$ 通过复化对偶原则[9] 可计算得到 $g'(t)$, i 为虚数单位, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

η 为复阻尼系数, 即为结构的损耗因子, 其与阻尼比的关系为[35-36]

$$\eta=2\xi \tag{2}$$

其中, ξ 为阻尼比.

令 $g(t)=0$, 得到方程 (1) 的自由振动方程为

$$m\ddot{x}(t)+\mathrm{i}\eta kx(t)+kx(t)=0 \tag{3}$$

采用待定系数法, 求解方程 (3), 得到方程的通解为

$$x(t)=a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_1 t}+a_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_2 t} \tag{4}$$

其中, a_1 和 a_2 为任意复常数, λ_1 和 λ_2 为

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=\sqrt[4]{1+\eta^2}\sqrt{\frac{k}{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{arctg}\eta}{2}}\\ \lambda_2&=-\sqrt[4]{1+\eta^2}\sqrt{\frac{k}{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{arctg}\eta}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

令 $a_2=a_{21}+\mathrm{i}a_{22}$, 则

$$\begin{aligned}a_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_2 t}=&\exp\left[\sqrt[4]{1+\eta^2}\sqrt{\frac{k}{m}}t\sin\left(\frac{\mathrm{arctg}\eta}{2}\right)\right]\cdot(a_{21}+\\&\mathrm{i}a_{22})\exp\left[-\mathrm{i}\sqrt[4]{1+\eta^2}\sqrt{\frac{k}{m}}t\cos\left(\frac{\mathrm{arctg}\eta}{2}\right)\right]\end{aligned} \tag{6}$$

取式 (6) 的实部 $x_1(t)$, 可得

$$\begin{aligned}x_1(t)=&\exp\left(\sqrt[4]{1+\eta^2}\sqrt{\frac{k}{m}}t\sin\left(\frac{\mathrm{arctg}\eta}{2}\right)\right)\cdot\\&\left\{a_{21}\cos\left[\sqrt[4]{1+\eta^2}\sqrt{\frac{k}{m}}t\cos\left(\frac{\mathrm{arctg}\eta}{2}\right)\right]+\right.\\&\left.a_{22}\sin\left[\sqrt[4]{1+\eta^2}\sqrt{\frac{k}{m}}t\cos\left(\frac{\mathrm{arctg}\eta}{2}\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{7}$$

由式 (7) 可知, 随着时间 t 的增大, $x_1(t)$ 逐渐增大, 即方程的通解 $x(t)$ 存在发散项, 复阻尼运动方程无法计算结构自由振动的位移响应, 为病态方程. 方程 (3) 中含有指数增长项 $\mathrm{e}^{\tau t}(\tau>0)$, 时间 t 的范围为 $[0,+\infty)$, 则指数增长项的傅里叶变换为

$$x(\mathrm{i}\varpi)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\tau t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varpi t}\mathrm{d}t \tag{8}$$

指数增长函数在 $[0,+\infty)$ 不可积分, 因此式 (8) 是不成立的, 傅里叶变换过程相当于滤波器, 可筛选掉方程 (3) 通解中的指数增长项.

复阻尼模型本构关系在频域范围内成立, 对方程 (1) 进行傅里叶变换, 得到频域运动方程为

$$-\varpi^2mx(\mathrm{i}\varpi)+k(1+\mathrm{i}\eta)x(\mathrm{i}\varpi)=-mg(\mathrm{i}\varpi)-\mathrm{i}mg'(\mathrm{i}\varpi) \tag{9}$$

其中, ϖ 为结构位移响应的振动频率, $x(\mathrm{i}\varpi)$ 为 $x(t)$ 的傅里叶变换, $g(\mathrm{i}\varpi)$ 为 $g(t)$ 的傅里叶变换.

当结构位移响应的振动频率不为零时, 方程 (9) 可转化为

$$\begin{aligned}-\varpi^2mx(\mathrm{i}\varpi)+kx(\mathrm{i}\varpi)+\frac{\mathrm{i}\eta k}{\varpi}\varpi x(\mathrm{i}\varpi)=&\\-mg(\mathrm{i}\varpi)-\mathrm{i}mg'(\mathrm{i}\varpi)&\end{aligned} \tag{10}$$

经傅里叶逆变换之后, 得频率相关黏性阻尼时域运动方程为

$$m\ddot{x}(t)+kx(t)+\frac{\eta k}{\varpi}\dot{x}(t)=-mg(t)-\mathrm{i}mg'(t) \tag{11}$$

结构位移响应的振动频率不为零时, 经过时频域转化的方程 (11) 与方程 (1) 是等价的. 实数域计算时可不考虑方程 (11) 右端虚部分量.

基于频率相关黏性阻尼模型的阻尼力为

$$F_P=-\frac{ck}{\varpi}\dot{x}(t) \tag{12}$$

式 (12) 表明基于频率相关黏性阻尼模型的结构阻尼力大小与速度大小成正比, 同时与结构的振动频率成反比, 方向与速度的方向相反.

1.1 稳定性分析

基于频率相关黏性阻尼的单自由度体系时域自由振动方程为

$$m\ddot{x}(t)+kx(t)+\frac{\eta k}{\varpi}\dot{x}(t)=0 \tag{13}$$

采用复平面法求解, 假定通解为

$$x(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(pt+\gamma)} \tag{14}$$

将式 (14) 代入方程 (13), 得到

$$-p^2+\mathrm{i}\frac{\eta\omega^2}{\varpi}p+\omega^2=0 \tag{15}$$

其中, ω 为结构无阻尼自振频率, $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$. 令 $p=\alpha+\mathrm{i}\beta$, 则

$$\left.\begin{aligned}\alpha^2&=\omega^2-\frac{\eta^2\omega^4}{4\varpi^2}\\ \beta&=\frac{\eta\omega^2}{2\varpi}\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

取式 (14) 的实部, 得到

$$x(t)=A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\alpha t+\gamma) \tag{17}$$

由式 (17) 知, 位移响应的振动频率为 $|\alpha|$, 则

$$|\alpha|=\varpi \tag{18}$$

进一步得

$$\varpi^4-\omega^2\varpi^2+\frac{1}{4}\eta^2\omega^4=0 \tag{19}$$

由方程 (19), 可解得

$$\varpi=\sqrt{\frac{\omega^2+\sqrt{\omega^4-\eta^2\omega^4}}{2}} \tag{20}$$

将式 (16) 和式 (20) 代入式 (17), 可得到位移为

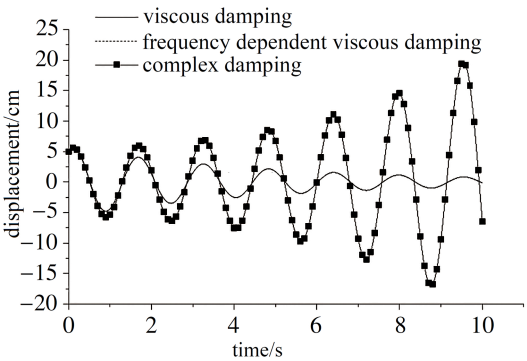
$$x(t)=[C_1\cos(\varpi t)+C_2\sin(\varpi t)]\mathrm{e}^{-\frac{\eta\omega^2}{2\varpi}t} \tag{21}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}C_1&=x(t_0)\\ C_2&=\frac{\dot{x}(t_0)+x(t_0)\dfrac{\eta\omega^2}{2\varpi}}{\varpi}\\ \varpi&=\sqrt{\frac{\omega^2+\sqrt{\omega^4-\eta^2\omega^4}}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

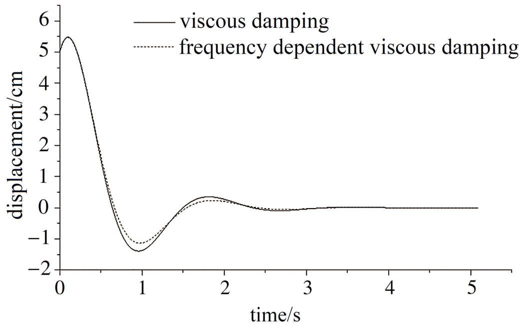
式 (22) 表明, 频率相关黏性阻尼模型下单自由度体系的自由振动方程通解中不含指数增长项, 其位移响应理论上是稳定收敛的.

以无阻尼自振频率为 4 rad/s 的单自由度结构体系为例, 结构的初始位移为 5 cm, 初始速度10 cm/s, 分别采用黏性阻尼模型、频率相关黏性阻尼模型、复阻尼模型计算体系的自由振动响应, 得到的位移时程如图 1 所示. 如图 1(a) 所示, 当材料的阻尼比取为 0.05, 复阻尼模型计算的结构自由振动位移存在发散现象; 频率相关黏性阻尼模型与黏性阻尼模型计算的结构自由振动收敛稳定, 且位移响应近似相等, 这是由于在小阻尼情况下, 频率相关黏性阻尼模型下结构的有阻尼振动频率近似等于结构的无阻尼自振频率 (由式 (20) 可知). 需说明的是, 由于复阻尼运动方程的通解中直接剔除发散项的做法在数学上是不合理的[12], 故在图 1 的计算结果中, 复阻尼模型计算时未采用剔除发散项的处理方法 (下同).



(a) 阻尼比为 0.05

(a) Damping ratio is 0.05



(b) 阻尼比为 0.4

(b) Damping ratio is 0.4

图 1 不同阻尼模型计算的结构自由振动位移时程

Fig.1 Structural free vibration time history displacements with different damping models

当结构的阻尼比较大时, 频率相关黏性阻尼模型下结构的有阻尼振动频率小于结构的无阻尼自振频率 (由式 (20) 可知), 使得频率相关黏性阻尼模型下阻尼力大于黏性阻尼模型下阻尼力. 因此, 如图 1(b) 所示, 当材料的阻尼比取 0.4 时, 频率相关黏性阻尼模型下结构的自由振动位移小于黏性阻尼模型下结构的自由振动位移.

1.2 能量耗散分析

设单自由度结构体系在激励频率为 θ 的谐波作用下, 结构的稳态位移响应为

$$x(t) = X_1\sin(\theta t) + X_2\cos(\theta t) \tag{23}$$

简谐载荷作用下结构的稳态响应如式 (23) 所示, 结构的振动频率 ϖ 为 θ, 则阻尼力为

$$F_P = -\eta k\,[X_1\cos(\theta t) - X_2\sin(\theta t)] \tag{24}$$

在频率相关黏性阻尼模型中, 阻尼力与位移的关系与复阻尼模型相同. 阻尼力在一个周期内消耗的能量为

$$\Delta W_P = -\int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} F_p\mathrm{d}x(t) = \pi\eta k({X_1}^2 + {X_2}^2) \tag{25}$$

由式 (25) 可知, 每周期阻尼力耗散的能量与外激励频率无关.

综上, 频率相关黏性阻尼模型在保留了每周期耗散能量与外激励频率无关的优点基础上, 保证了结构自由振动位移时程稳定收敛.

2 基于频率相关黏性阻尼模型的单自由度体系振动响应

2.1 谐波作用下单自由度体系的振动响应

谐波作用下结构的时域运动方程为

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) + \frac{\eta\omega^2}{\varpi}\dot{x}(t) = \frac{p_0}{m}\sin(\theta t) \tag{26}$$

其中, ω 为结构的自振频率, 即 $\omega = \sqrt{k/m}$.

方程 (26) 的补解与结构自由振动时的解形式相同. 由于线弹性系统具有频率保持不变特性, 其特解的频率与激励频率相同, 假定特解形式为

$$x_p(t) = G_1\cos(\theta t) + G_2\sin(\theta t) \tag{27}$$

此时, $\varpi = \theta$, 将式 (27) 代入方程 (26) 可得

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= \frac{-p_0\eta\omega^2/m}{(\omega^2-\theta^2)^2+(\eta\omega^2)^2} \\ G_2 &= \frac{p_0(\omega^2-\theta^2)/m}{(\omega^2-\theta^2)^2+(\eta\omega^2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

则方程 (23) 的解为

$$\begin{aligned} x(t) =& [D_1\cos(\varpi t) + D_2\sin(\varpi t)]\mathrm{e}^{-\frac{\eta w^2}{2\varpi}t} + \\ & G_1\cos(\theta t)G_2\sin(\theta t) \end{aligned} \tag{29}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= x(t_0) - G_1 \\ D_2 &= \frac{\dot{x}(t_0) + \eta\omega^2[x(t_0) - G_1]/2\varpi - \theta G_2}{\varpi} \\ \varpi &= \sqrt{\frac{\omega^2 + \sqrt{\omega^4 - \eta^2\omega^4}}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

由式 (28) 可知, 频率相关黏性阻尼模型的动力放大系数

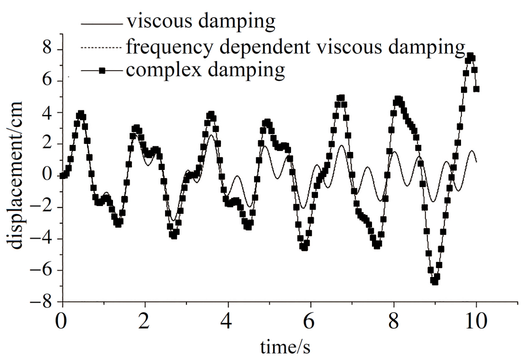
$$D_p = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \eta^2}} \tag{31}$$

黏性阻尼模型的动力放大系数

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\eta\dfrac{\theta}{\omega}\right)^2}} \tag{32}$$

由式 (31) 和式 (32) 可知, 只有当外激励频率和结构无阻尼自振频率相等时, 两种阻尼理论下结构的稳态响应相同.

以无阻尼自振频率为 4 rad/s 的单自由度结构为例, 结构的初始位移为 0, 初始速度 0, 选择频率为 10 rad/s 的正弦波作用在结构上, 仍然分别采用黏性阻尼模型、频率相关黏性阻尼模型、复阻尼模型计算体系的强迫振动响应 (见图 2). 小阻尼情况下, 式

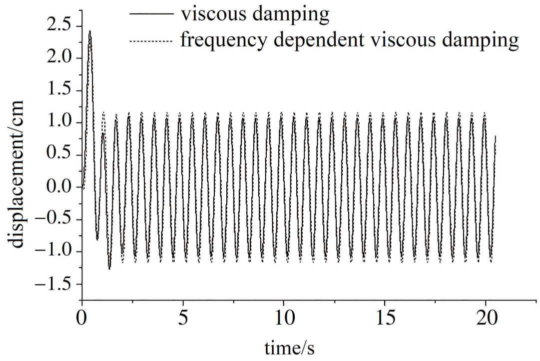


(a) 阻尼比为 0.05

(a) Damping ratio is 0.05

图 2 不同阻尼理论计算的谐波作用下结构位移时程

Fig.2 Structural time history displacements under the function of harmonic with different damping models



(b) 阻尼比为 0.5

(b) Damping ratio is 0.5

图 2 不同阻尼理论计算的谐波作用下结构位移时程 (续)

Fig.2 Structural time history displacements under the function of harmonic with different damping models(continued)

(31) 和式 (32) 近似相等. 当材料的阻尼比取 0.05 时, 结构的位移时程如图 2(a) 所示, 频率相关黏性阻尼模型与黏性阻尼模型计算的结构位移近似相等, 且明显收敛稳定, 而复阻尼模型计算的结构位移存在发散现象. 当材料的阻尼比选为 0.5 时, 结构的位移时程如图 2(b) 所示, 外激励频率大于结构无阻尼自振频率, 使得频率相关黏性阻尼模型下结构动力放大系数较大, 因此频率相关黏性阻尼模型下结构稳态位移大于黏性阻尼模型下结构的稳态位移.

2.2 地震作用下单自由度体系的振动响应

地震作用下单自由度体系的时域运动方程为

$$\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)+\frac{\eta\omega^2}{\varpi}\dot{x}(t)=-g(t) \tag{32}$$

采用时域逐步积分法求解地震作用下的结构动力响应, 具有计算量小、快速直观等优点, 但逐步积分法依赖于积分的时间步长, 时间步长不仅影响计算精度, 还可能影响算法的稳定性. 为保证地震作用下结构的时域计算结果不受算法稳定性的影响, 本文采用基于三角级数的近似解析算法, 其误差仅来源于三角级数计算得到的地震波数据与实际地震波数据之间的误差, 计算精度较高, 不受时间步长的影响, 是无条件稳定的.

目前, 地震加速度时程采用三角多项式逼近已经是一种常用的数值方法, 借助于快速傅里叶变换方法, 可快速确定三角多项式中的参数, 计算量较小, 且利用三角多项式计算得到的地震加速度值与实际记录的地震加速度值近似相等. 地震作用加速度可采用三角多项式展开[37-39]

$$g(t)=A_0+\sum_{i=1}^{N/2}A_i\sin(\theta_i t)+\sum_{i=1}^{N/2}B_i\cos(\theta_i t) \tag{34}$$

其中, A_0 为常数, A_i 和 B_i 为三角插值公式系数, θ_i 为谐波频率.

地震作用下的时域运动方程可表示为

$$\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)+\frac{\eta\omega^2}{\varpi}\dot{x}(t)=-\Big[A_0+\sum_{i=1}^{N/2}A_i\sin(\theta_i t)+\sum_{i=1}^{N/2}B_i\cos(\theta_i t)\Big] \tag{35}$$

由叠加原理得

$$\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)+\frac{\eta\omega^2}{\varpi}\dot{x}(t)=-\Big[\sum_{i=1}^{N/2}A_i\sin(\theta_i t)+\sum_{i=1}^{N/2}B_i\cos(\theta_i t)\Big] \tag{36}$$

$$\omega^2 x(t)=-A_0 \tag{37}$$

方程 (36) 的特解为

$$x_p(t)=\sum_{i=1}^{N/2}J_i\sin(\theta_i t)+\sum_{i=1}^{N/2}K_i\cos(\theta_i t) \tag{38}$$

将式 (38) 代入方程 (36) 可得

$$\left.\begin{aligned}J_i&=\frac{-(\omega^2-\theta_i^2)A_i-\eta\omega^2 B_i}{(\omega^2-\theta_i^2)^2+\eta^2\omega^4}\\ K_i&=\frac{\eta\omega^2 A_i-(\omega^2-\theta_i^2)B_i}{(\omega^2-\theta_i^2)^2+\eta^2\omega^4}\end{aligned}\quad (i=1,2,\cdots,N/2)\right\} \tag{39}$$

方程 (36) 的补解与自由振动解形式相同, 则其解为

$$x(t)=[E_1\cos(\varpi t)+E_2\sin(\varpi t)]\mathrm{e}^{-\frac{\eta\omega^2}{2\varpi}t}+\sum_{i=1}^{N/2}J_i\sin(\theta_i t)+\sum_{i=1}^{N/2}K_i\cos(\theta_i t) \tag{40}$$

方程 (37) 的解为

$$x(t)=-\frac{A_0}{\omega^2} \tag{41}$$

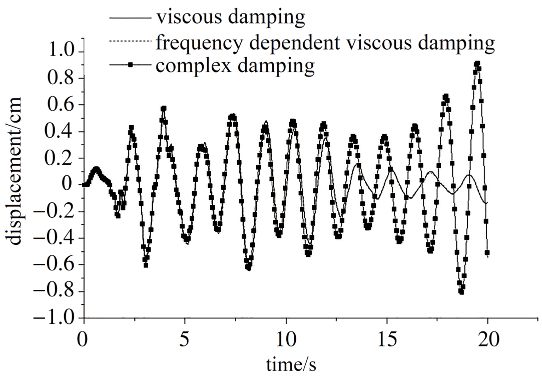
方程 (35) 的解为

$$x(t)=-\frac{A_0}{\omega^2}+[E_1\cos(\varpi t)+E_2\sin(\varpi t)]\mathrm{e}^{-\frac{\eta\omega^2}{2\varpi}t}+\sum_{i=1}^{N/2}J_i\sin(\theta_i t)+\sum_{i=1}^{N/2}K_i\cos(\theta_i t) \tag{42}$$

其中

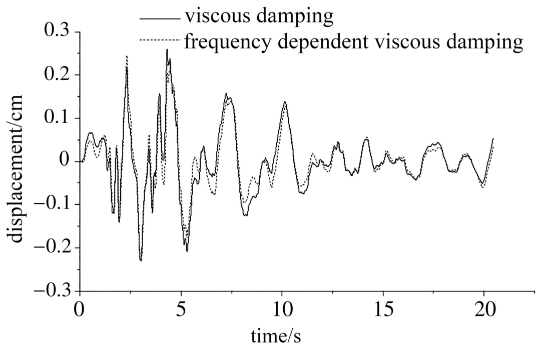
$$\left.\begin{aligned} E_1 &= x(t_0) + \frac{A_0}{\omega^2} - \sum_{i=1}^{N/2} K_i \\ E_2 &= \frac{\dot{x}(t_0) + \dfrac{\eta\omega^2}{2\varpi}\left[x(t_0) + \dfrac{A_0}{\omega^2} - \sum\limits_{i=1}^{N/2} K_i\right] - \sum\limits_{i=1}^{N/2} \theta_i J_i}{\varpi} \\ \varpi &= \sqrt{\frac{\omega^2 + \sqrt{\omega^4 - \eta^2\omega^4}}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

以无阻尼自振频率为 4 rad/s 的单自由度结构为例, 结构的初始位移为 0, 初始速度 0, 分别采用黏性阻尼模型、频率相关黏性阻尼模型、复阻尼模型计算体系的地震响应 (见图 3). 当材料的阻尼比选为 0.05 时, 迁安波作用下结构的位移时程如图 3(a) 所示, 频率相关黏性阻尼模型与黏性阻尼模型计算的结构位移近似相等, 且明显收敛稳定, 而复阻尼模型计算的结构位移存在发散现象. 当材料的阻尼比选为 0.5 时, 迁安波作用下结构的位移时程如图 3(b) 所示, 由于阻尼比较大, 频率相关黏性阻尼模型与黏性阻尼模型计算的结构位移时程局部存在较大差异, 且不可忽略.



(a) 阻尼比为 0.05

(a) Damping ratio is 0.05



(b) 阻尼比为 0.5

(b) Damping ratio is 0.5

图 3 不同阻尼理论计算的迁安波作用下结构位移时程

Fig.3 Structural time history displacements under the function of Qian'an wave with different damping models

3 基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法

不同材料的阻尼比一般不同, 故由不同阻尼特性的材料组成的混合结构, 其阻尼矩阵为非比例矩阵, 不再满足经典阻尼条件. 因此, 混合结构的动力计算无法直接采用实模态叠加法. 本文依据频率相关黏性阻尼模型与复阻尼模型之间的转换关系, 提出了基于频率相关黏性阻尼的复模态叠加法, 可直接用于混合结构.

地震作用下多自由度混合结构体系的时域运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{K}_\eta\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}[g(t) + \mathrm{i}g'(t)] \tag{44}$$

其中, $\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵, $\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为与地震动输入有关的向量 $(N \times 1)$, 与 $g(t)$ 方向相同的位移自由度元素为 1.

$\boldsymbol{K}_\eta$ 为阻尼矩阵, 可表示为

$$\boldsymbol{K}_\eta = \frac{1}{\varpi}\sum_{j=1}^{s} \eta_j \boldsymbol{K}_j \tag{45}$$

其中, s 为混合结构中不同阻尼特性材料的种类总数, η_j 为第 j 种材料对应的损耗因子, $\boldsymbol{K}_j$ 为第 j 种材料对应的刚度矩阵.

对方程 (44) 进行傅里叶变换, 可得

$$\begin{aligned} -\varpi^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varOmega}(\mathrm{i}\varpi) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{\varOmega}(\mathrm{i}\varpi) + \mathrm{i}\varpi\boldsymbol{K}_\eta\varOmega(\mathrm{i}\varpi) = \\ -\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}[\varGamma(\mathrm{i}\varpi) + \mathrm{i}\varGamma(\mathrm{i}\varpi)] \end{aligned} \tag{46}$$

对方程 (45) 进行傅里叶逆变换, 可得

$$\boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + i\sum_{j=1}^{s}\eta_j\boldsymbol{K}_j\boldsymbol{x}(t) = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}[g(t) + \mathrm{i}g'(t)] \tag{47}$$

求解方程 (47) 的特征方程可得 N 个复特征向量, 按排列组成复特征向量矩阵

$$\boldsymbol{\varPhi} = [\boldsymbol{\phi}_1 \quad \boldsymbol{\phi}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\phi}_N] \tag{48}$$

任意两个复特征向量满足

$$\frac{\boldsymbol{\phi}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_n} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ m_n, & m = n \end{cases} \tag{49}$$

$$\frac{\boldsymbol{\phi}_m^{\mathrm{T}}(K+\mathrm{i}\sum_e \boldsymbol{\eta}_e K_e)\boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_n}=\begin{cases}0, & m\neq n\\ k_n+\mathrm{i}c_n, & m=n\end{cases} \tag{50}$$

$$\frac{-\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ME}}{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_n}[g(t)+\mathrm{i}g'(t)]=g_n \tag{51}$$

其中, m_n, k_n 和 c_n 为实数, g_n 为复数.

$\boldsymbol{x}(t)$ 可由复特征向量线性组合表示, 即

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_n y_n(t) \tag{52}$$

将式 (52) 代入方程 (47), 利用复特征向量的正交性可实现复运动方程的解耦, 故第 n 个运动方程为

$$m_n\ddot{y}(t)+k_n y(t)+\mathrm{i}c_n y(t)=g_n \tag{53}$$

利用前文所时频域转换, 方程 (53) 可转换为

$$m_n\ddot{y}(t)+k_n y(t)+\frac{c_n}{\varpi_n}\dot{y}(t)=g_n \tag{54}$$

令

$$\left.\begin{aligned} y(t)&=y_1(t)+\mathrm{i}y_2(t)\\ g_n&=g_{n1}+\mathrm{i}g_{n2}\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

方程 (54) 可转化为

$$m_n\ddot{y}_1(t)+k_n y_1(t)+\frac{c_n}{\varpi_n}\dot{y}_1(t)=g_{n1} \tag{56}$$

$$m_n\ddot{y}_2(t)+k_n y_2(t)+\frac{c_n}{\varpi_n}\dot{y}_2(t)=g_{n2} \tag{57}$$

对应的齐次方程为

$$m_n\ddot{y}_1(t)+k_n y_1(t)+\frac{c_n}{\varpi_n}\dot{y}_1(t)=0 \tag{58}$$

$$m_n\ddot{y}_2(t)+k_n y_2(t)+\frac{c_n}{\varpi_n}\dot{y}_2(t)=0 \tag{59}$$

方程 (58) 和 (59) 对应的特征方程为

$$m_n\lambda_n^2+k_n+\frac{c_n}{\varpi_n}\lambda_n=0 \tag{60}$$

求解方程 (60), 可得

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{n1}&=-\frac{c_n}{2m_n\varpi_n}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{k_n}{m_n}-\frac{c_n^{\ 2}}{4m_n^{\ 2}\varpi_n^{\ 2}}}\\ \lambda_{n2}&=-\frac{c_n}{2m_n\varpi_n}-\mathrm{i}\sqrt{\frac{k_n}{m_n}-\frac{c_n^{\ 2}}{4m_n^{\ 2}\varpi_n^{\ 2}}}\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

进而得到特征根的虚部与对应的频率相等, 即

$$\varpi_n=\sqrt{\frac{k_n}{m_n}-\frac{c_n^{\ 2}}{4m_n^{\ 2}\varpi_n^{\ 2}}} \tag{62}$$

进一步求解方程 (62), 得

$$\varpi_n=\sqrt{\frac{k_n+\sqrt{k_n^{\ 2}-c_n^{\ 2}}}{2m_n}} \tag{63}$$

可得方程 (58) 和 (59) 的补解为

$$\begin{aligned} y_{1c}(t)=&\left[F_1\cos\left(\sqrt{\frac{k_n+\sqrt{k_n^{\ 2}-c_n^{\ 2}}}{2m_n}}t\right)+\right.\\ &\left.L_1\sin\left(\sqrt{\frac{k_n+\sqrt{k_n^{\ 2}-c_n^{\ 2}}}{2m_n}}t\right)\right]\cdot\\ &\exp\left(-\frac{c_n}{2m_n}\sqrt{\frac{2m_n}{k_n+\sqrt{k_n^{\ 2}-c_n^{\ 2}}}}\right)\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} y_{2c}(t)=&\left[F_2\cos\left(\sqrt{\frac{k_n+\sqrt{k_n^{\ 2}-c_n^{\ 2}}}{2m_n}}t\right)+\right.\\ &\left.L_2\sin\left(\sqrt{\frac{k_n+\sqrt{k_n^{\ 2}-c_n^{\ 2}}}{2m_n}}t\right)\right]\cdot\\ &\exp\left(-\frac{c_n}{2m_n}\sqrt{\frac{2m_n}{k_n+\sqrt{k_n^{\ 2}-c_n^{\ 2}}}}t\right)\end{aligned} \tag{65}$$

地震加速度可采用三角多项式进行表示, 进而得到

$$g_{n1}=P_{10}+\sum_{i=1}^{N/2}P_{1i}\sin(\gamma_i t)+\sum_{i=1}^{N/2}Q_{1i}\cos(\gamma_i t) \tag{66}$$

$$g_{n2}=P_{20}+\sum_{i=1}^{N/2}P_{2i}\sin(\kappa_i t)+\sum_{i=1}^{N/2}Q_{2i}\cos(\kappa_i t) \tag{67}$$

将式 (66) 代入方程 (56), 式 (67) 代入方程 (57), 可得

$$\begin{aligned} m_n\ddot{y}_1(t)+k_n y_1(t)+\frac{c_n}{\varpi}\dot{y}_1(t)=P_{10}+&\\ \sum_{i=1}^{N/2}P_{1i}\sin(\gamma_i t)+\sum_{i=1}^{N/2}Q_{1i}\cos(\gamma_i t)&\end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned} m_n\ddot{y}_2(t)+k_n y_2(t)+\frac{c_n}{\varpi}\dot{y}_2(t)=P_{20}+&\\ \sum_{i=1}^{N/2}P_{2i}\sin(\kappa_i t)+\sum_{i=1}^{N/2}Q_{2i}\cos(\kappa_i t)&\end{aligned} \tag{69}$$

方程 (68) 可进一步转化为

$$\begin{aligned} m_n\ddot{y}_1(t)+k_n y_1(t)+\frac{c_n}{\gamma_i}\dot{y}_1(t)=\sum_{i=1}^{N/2}P_{1i}\sin(\gamma_i t)+&\\ \sum_{i=1}^{N/2}Q_{1i}\cos(\gamma_i t)&\end{aligned} \tag{70}$$

$$k_n y_1(t)=P_{10} \tag{71}$$

令方程 (70) 的特解为

$$y_{1p}(t)=\sum_{i=1}^{N/2}R_{1i}\sin(\gamma_i t)+\sum_{i=1}^{N/2}S_{1i}\cos(\gamma_i t) \tag{72}$$

将式 (72) 代入方程 (70) 可得

$$\left.\begin{aligned}R_{1i}&=\frac{(-m_n\gamma_i^2+k_n)P_{1i}+c_nQ_{1i}}{(-m_n\gamma_i^2+k_n)^2+c_n^2}\\ &\qquad\qquad (i=1,2,\cdots,N/2)\\ S_{1i}&=\frac{-c_nP_{1i}+(-m_n\gamma_i^2+k_n)Q_{1i}}{(-m_n\gamma_i^2+k_n)^2+c_n^2}\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

方程 (71) 的解为

$$y_1(t)=\frac{P_{10}}{k_n} \tag{74}$$

方程 (68) 的特解为

$$y_{1p}(t)=\frac{P_{10}}{k_n}+\sum_{i=1}^{N/2}R_{1i}\sin(\gamma_i t)+\sum_{i=1}^{N/2}S_{1i}\cos(\gamma_i t) \tag{75}$$

进而得到方程 (56) 的解为

$$\begin{aligned}y_1(t)=&\frac{P_{10}}{k_n}+[F_1\cos(\varpi_n t)+L_1\sin(\varpi_n t)]\cdot\\ &\exp\left(-\frac{c_n}{2m_n\varpi_n}t\right)+\sum_{i=1}^{N/2}R_{1i}\sin(\gamma_i t)+\\ &\sum_{i=1}^{N/2}S_{1i}\cos(\gamma_i t)\end{aligned} \tag{76}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}F_1&=y_1(t_0)-\frac{P_{10}}{k_n}-\sum_{i=1}^{N/2}S_{1i}\\ L_1&=\left[\dot{y}_1(t_0)+\frac{c_n}{2m_n\varpi_n}\left(y_1(t_0)-\frac{P_{10}}{k_n}-\right.\right.\\ &\left.\left.\sum_{i=1}^{N/2}S_{1i}\right)-\sum_{i=1}^{N/2}\gamma_iR_{1i}\right]\Bigg/\varpi_n\\ \varpi_n&=\sqrt{\frac{k_n+\sqrt{k_n^2-c_n^2}}{2m_n}}\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

同理得到方程 (57) 的解为

$$\begin{aligned}y_2(t)=&\frac{P_{20}}{k_n}+[F_2\cos(\varpi_n t)+L_2\sin(\varpi_n t)]\cdot\\ &\exp\left(-\frac{c_n}{2m_n\varpi_n}t\right)+\sum_{i=1}^{N/2}R_{2i}\sin(\kappa_i t)+\\ &\sum_{i=1}^{N/2}S_{2i}\cos(\kappa_i t)\end{aligned} \tag{78}$$

其中

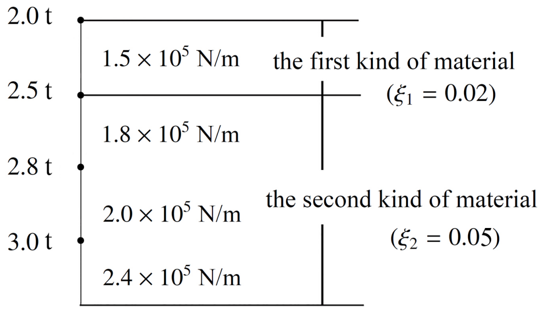
$$\left.\begin{aligned}F_2&=y_2(t_0)-\frac{P_{20}}{k_n}-\sum_{i=1}^{N/2}S_{2i}\\ L_2&=\left[\dot{y}_2(t_0)+\frac{c_n}{2m_n\varpi_n}\left(y_2(t_0)-\frac{P_{20}}{k_n}-\sum_{i=1}^{N/2}S_{2i}\right)-\right.\\ &\left.\sum_{i=1}^{N/2}\gamma_iR_{2i}\right]\Bigg/\varpi_n\\ R_{2i}&=\frac{(-m_n\kappa_i^2+k_n)P_{2i}+c_nQ_{2i}}{(-m_n\kappa_i^2+k_n)^2+c_n^2}\\ S_{2i}&=\frac{-c_nP_{2i}+(-m_n\kappa_i^2+k_n)Q_{2i}}{(-m_n\kappa_i^2+k_n)^2+c_n^2}\\ \varpi_n&=\sqrt{\frac{k_n+\sqrt{k_n^2-c_n^2}}{2m_n}}\\ &(i=1,2,\cdots,N/2)\end{aligned}\right\} \tag{79}$$

利用式 (55) 计算出 $y(t)$, 进一步由式 (52) 得到 $x(t)$, 从而实现了基于频率相关黏性阻尼模型的混合结构复模态叠加法.

由式 (48) 可知, 当结构为单一材料结构时, 阻尼矩阵为比例矩阵, 复振型向量的虚部为零, 复振型向量退化为实振型向量, 基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法退化为传统的实模态叠加法, 因此基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法不仅适用于混合材料结构, 还适用于单一材料结构.

4 算例分析

以阻尼特性不同的两种材料组成的一维四自由度体系为例, 建立竖向混合结构, 模型 A 和模型 B 仅阻尼比不同, 具体参数取值如图 4 所示.

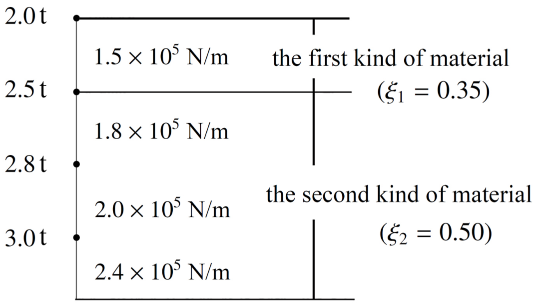


(a) 模型 A

(a) Model A

图 4 模型参数

Fig.4 Parameters of models



(b) 模型 B

(b) Model B

图 4 模型参数 (续)

Fig.4 Parameters of models(continued)

质量矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2.0&0&0&0\\0&2.5&0&0\\0&0&2.8&0\\0&0&0&3.0\end{bmatrix}\text{t} \tag{80}$$

刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}1.5&-1.5&0&0\\-1.5&3.3&-1.8&0\\0&-1.8&3.8&-2.0\\0&0&-2.0&4.4\end{bmatrix}\times10^5\ \text{N/m} \tag{81}$$

黏性阻尼模型在状态空间法的基础上, 将矩阵的维度增加一倍, 然后采用复模态叠加法计算混合结构的位移时程[24]. 对于简单混合结构, 黏性阻尼模型下可仅考虑第一阶振型的自振频率[40], 则阻尼矩阵为

$$\boldsymbol{K}_z=\frac{1}{\omega_1}\sum_{j=1}^{s}\eta_j\boldsymbol{K}_j \tag{82}$$

其中, ω_1 为第一阶振型对应的无阻尼自振频率.

频率相关黏性阻尼模型下模型 A 的阻尼矩阵为

$$\boldsymbol{K}_{a\eta}=\frac{1}{\varpi}\begin{bmatrix}0.06&-0.06&0&0\\-0.06&0.24&-0.18&0\\0&-0.18&0.38&-0.20\\0&0&-0.20&0.44\end{bmatrix}\times10^5\ \text{N/m} \tag{83}$$

由式 (82) 可计算出在黏性阻尼模型下模型 A 的阻尼矩阵为

$$\boldsymbol{K}_{az}=\begin{bmatrix}0.18&-0.18&0&0\\-0.18&0.74&-0.55&0\\0&-0.55&1.16&-0.61\\0&0&-0.61&1.35\end{bmatrix}\times10^4\ \text{N/m} \tag{84}$$

频率相关黏性阻尼模型下模型 B 的阻尼矩阵为

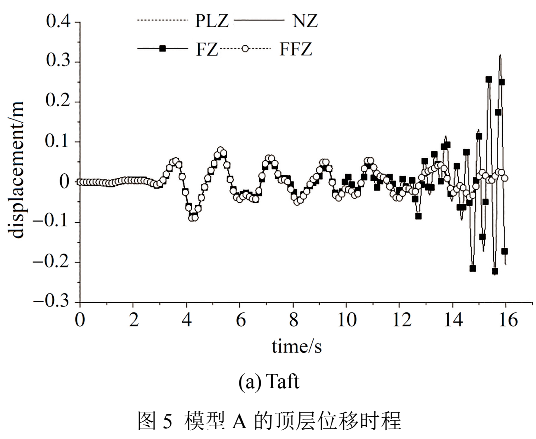
$$\boldsymbol{K}_{b\eta}=\frac{1}{\varpi}\begin{bmatrix}1.05&-1.05&0&0\\-1.05&2.85&-1.85&0\\0&-1.80&3.80&-2.00\\0&0&-2.00&4.40\end{bmatrix}\times10^5\ \text{N/m} \tag{85}$$

由式 (82) 可计算黏性阻尼模型下模型 B 的阻尼矩阵为

$$\boldsymbol{K}_{bz}=\begin{bmatrix}0.32&-0.32&0&0\\-0.32&0.87&-0.55&0\\0&-0.55&1.16&-0.61\\0&0&-0.61&1.35\end{bmatrix}\times10^5\ \text{N/m} \tag{86}$$

分别采用基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法 (PLZ)、基于黏性阻尼模型的复模态叠加法 (NZ) 和基于复阻尼模型的复模态叠加法 (FZ) 计算模型 A、模型 B 在地震波作用下的位移时程, 所得结果如图 5 和图 6 所示, 并将其与基于复阻尼模型的频域法 (FFZ) 计算结果对比. 其中, FFZ 避免了复阻尼模型时域发散现象, 其计算结果可视为精确解[41].

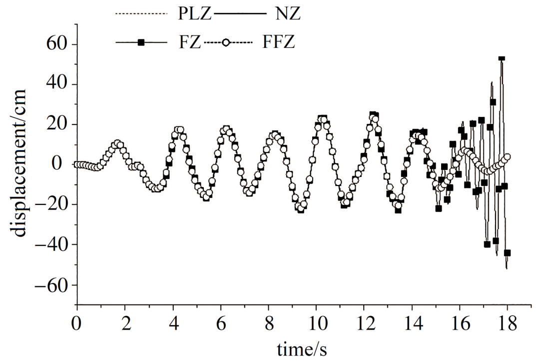
在图 5 中, 随着地震作用时间增加, FZ 计算的位移时程呈现发散现象; PLZ、NZ 和 FFZ 近似相等, 且一直保持稳定收敛的特点. 在图 5(a)、图 5(b)



(a) Taft

图 5 模型 A 的顶层位移时程

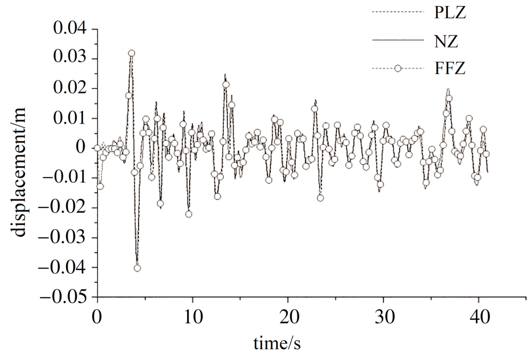
Fig.5 Top time history displacements of Model A



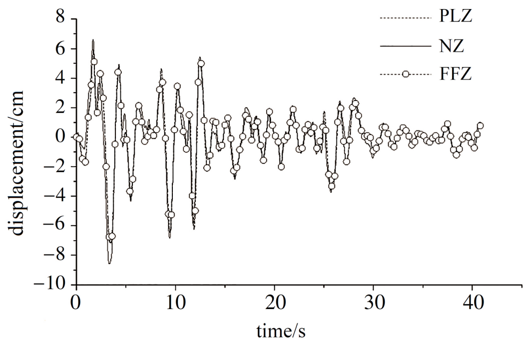
(b) El Centro

图 5 模型 A 的顶层位移时程 (续)

Fig.5 Top time history displacements of Model A(continued)



(a) Taft



(b) El Centro

图 6 模型 B 的顶层位移时程

Fig.6 Top time history displacements of Model B

中, 当地震持时分别小于 11 s 和 14 s 时, PLZ 与 NZ、FZ、FFZ 近似相等, 更进一步证明了 PLZ 的正确性.

相对于模型 A, 模型 B 的材料阻尼比明显增大. 如图 6 所示, PLZ 与 FFZ 近似相等, 而 NZ 与 FFZ 存在较大差异. 如图 6 所示, Taft 波作用下, PLZ 和 FFZ 的位移均在 4.18 s 处达到最大值 I, NZ 的位移在 4.16 s 处达到最大值 I, PLZ 和 NZ 发生位移最大值的时间近似相等 (见图 6(a)), 但 PLZ 与 FFZ 的最大位移值相对误差 δ 为 0.61%, NZ 与 FFZ 的最大位移值相对误差 δ 为 6.79% (见表 1); El Centro 波作用下, PLZ 和 FFZ 的位移均在 3.42 s 处达到最大值 I, NZ 的位移在 3.32 s 处达到最大值 I (见图 6b), PLZ 和 NZ 发生位移最大值的时间近似相等, 但 PLZ 与 FFZ 的相对误差 δ 为 0.30%, NZ 与 FFZ 的最大位移值相对误差 δ 为 20.05% (见表 1).

表 1 模型 B 的位移响应

Table 1 Displacement responses of Model B

	FFZ	Taft PLZ	NZ	FFZ	El Centro PLZ	NZ
I/cm	4.080	4.105	3.803	7.086	7.107	8.507
δ/%	—	0.61	6.79	—	0.30	20.05

采用基于黏性阻尼模型的复模态叠加法时, 模型 A 和模型 B 的复特征向量矩阵维数是 8; 采用基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法时, 模型 A 和模型 B 的复特征向量矩阵维数是 4, 维度没有增加. 因此, 相比基于黏性阻尼模型的复模态叠加法, 基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法计算量较小.

此外, 本文算例为简单混合结构, 黏性阻尼模型下可选择第一阶振型的自振频率确定阻尼矩阵. 对于实际工程结构, 通常不能仅考虑第一阶振型, 还需要考虑其他高阶振型, 而不同的振型组合, 将得到不同的阻尼矩阵, 因此基于黏性阻尼模型的复模态叠加法计算结果不具有唯一性. 本文提出的基于频率相关黏性阻尼模型阻尼矩阵仅依赖于结构的损耗因子, 复模态叠加法计算结果具有唯一性, 合理性易被判定.

5 结论

经理论推导和算例分析, 得到以下结论:

(1) 依据频率相关黏性阻尼模型的特点, 得到了频率相关黏性阻尼运动方程的精确解. 算例分析表明, 基于复阻尼理论的频率相关黏性阻尼模型不仅克服了黏性阻尼中每周期耗散能量与外激励频率相关的缺陷, 还避免了复阻尼模型的发散问题.

(2) 利用频率相关黏性阻尼模型与复阻尼模型的转换关系, 提出了基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法, 不仅可适用于由阻尼特性不同材料组成的混合结构, 还可适用于单一材料结构.

(3) 与基于黏性阻尼模型的复模态叠加法相比, 基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法不仅计算结果唯一, 且不增加矩阵维度, 具有较高的计

算效率.

(4) 在小阻尼情况下, 基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法与基于黏性阻尼模型的复模态叠加法计算结果近似相等, 且与基于复阻尼模型的频域法计算结果一致. 随着材料阻尼比增大, 基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法与基于黏性阻尼模型的复模态叠加法计算结果的差异逐渐增大, 且不可忽略, 但基于频率相关黏性阻尼模型的复模态叠加法与复阻尼模型的频域计算结果仍保持一致.

参 考 文 献

1 杨慧, 闫维明, 何浩祥. 基于残余应力的复合阻尼模型及在 R-C 梁损伤分析中的应用. 振动工程学报, 2017, 30(3): 432-441 (Yang Hui, Yan Weiming, He Haoxiang. The damage analysis of R-C beam structure based on the combined damping model of residual stress. *Journal of Vibration Engineering*, 2017, 30(3): 432-441 (in Chinese))

2 Bert CW. Material damping: An introductory review of mathematical models, measures and experimental techniques. *Journal of Sound and Vibration*, 1973, 29(2): 129-135

3 梁超锋, 刘铁军, 邹笃建等. 材料黏滞系数与损耗因子的频率相关性研究. 力学学报, 2012, 44(5): 933-937 (Liang Chaofeng, Liu Tiejun, Zou Dujian, et al. The frequency-dependent study on viscosity coefficient and loss tangent of viscoelastic materials. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, 44(5): 933-937 (in Chinese))

4 吴泽玉, 王东炜, 李玉河. 复阻尼结构动力方程的增维精细积分法. 振动与冲击, 2017, 36(2): 107-110 (Wu Zeyu, Wang Dongwei, Li Yuhe. Magnified dimension precise integration method for the dynamic equations of complex damped structures. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(2): 107-110 (in Chinese))

5 Crandall SH. The role of damping in vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*, 1970, 11(1): 3-18

6 Bert CW. Material damping: An introductory review of mathematic measures and experimental technique. *Journal of Sound and Vibration*, 1973, 29(2): 129-153

7 朱镜清. 关于复阻尼理论的两个基本问题. 固体力学学报, 1992, 13(2): 113-118 (Zhu Jingqing. On the two basic problems of complex damping theory. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1992, 13(2): 113-118 (in Chinese))

8 Mastroddi F, Eugeni F, Erba F. On the modal diagonalization of viscoelastic mechanical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 96: 159-175

9 朱敏, 朱镜清. 逐步积分法求解复阻尼结构运动方程的稳定性问题. 地震工程与工程振动, 2001, 21(4): 59-62 (Zhu Min, Zhu Jingqing. Studies on stability of step-by-step methods under complex damping conditions. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2001, 21(4): 59-62 (in Chinese))

10 Lee JH, Kim J. Identification of damping matrices from measured frequency response functions. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 240(3): 545-565

11 尚守平, 甘宜诚, 蒋林. 结构振动阻尼理论模型探究及实验分析. 地震工程与工程振动, 2015, 35(2): 166-171 (Shang Shouping, Gan Yicheng, Jiang Lin. Theoretical research and experimental analysis of structural damping. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2015, 35(2): 166-171 (in Chinese))

12 何钟怡, 廖振鹏, 王小华. 关于复阻尼理论的几点注记. 地震工程与工程振动, 2002, 22(1): 1-6 (He Zhongyi, Liao Zhenpeng, Wang Xiaohua. Some notes on theory of complex damping. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2002, 22(1): 1-6 (in Chinese))

13 Wang J. Rayleigh coefficients for series infrastructure systems with multiple damping properties. *Journal of Vibration and Control*, 2015, 21(6): 1234-1248

14 Clough RW, Penzien J. 结构动力学. 王光远. 译. 北京: 科学出版社, 1983 (Clough RW, Penzien J. Dynamics of Structures. Wang Guangyuan transl. Beijing: Science Press, 1983 (in Chinese))

15 15 Chen LY, Chen JT, Chen CH, et al. Free vibration of a SDOF system with hysteretic damping. *Mechanics Research Communications*, 1994, 21(6): 599-604

16 Pan Y, Wang YF. Frequency-domain analysis of exponentially damped linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(7): 1754-1765.

17 Reggio A, Angelis MD. Modelling and identification of structures with rate-independent linear damping. *Meccanica*, 2015, 50(3): 617-632

18 朱镜清. 频率相关黏性阻尼理论及有关问题的解. 振动与冲击, 1992(4): 1-7 (Zhu Jingqing. Frequency dependant viscous damping theory and some related problems. *Journal of Vibration and Shock*, 1992(4): 1-7 (in Chinese))

19 刘庆林, 傅学怡. 基于复阻尼假定的不同材料阻尼特性混合结构抗震分析反应谱 CCQC 法. 土木工程学报, 2011, 44(3): 61-71 (Liu Qinglin, Fu Xueyi. A response spectrum CCQC method for seismic analysis of structures of multiple material damping characteristics based on complex damping assumption. *China Civil Engineering Journal*, 2011, 44(3): 61-71 (in Chinese))

20 潘旦光. 地震反应分析中 Rayleigh 阻尼系数的优化解. 工程力学, 2013, 30(11): 15-20 (Pan Danguang. An optimization solution for Rayleigh damping coefficients in seismic response analysis. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(11): 15-20 (in Chinese))

21 黄维, 钱江, 周知. 基于 Rayleigh 阻尼模型的竖向混合结构设计阻尼比研究. 工程力学, 2015, 32(10): 60-67 (Huang Wei, Qian Jiang, Zhou Zhi. Research on equivalent damping ratio of vertically mixed structures based on Rayleigh damping model. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(10): 60-67 (in Chinese))

22 Wei H, Jiang Q, Zhi Z, et al. An approach to equivalent damping ratio of vertically mixed structures based on response error minimization. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2015, 72: 119-128

23 Luco JE, Lanzi L. Optimal Caughey series representation of classical damping matrices. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*,

2017, 92: 253-265

24 汪梦甫. 非比例阻尼线性体系地震反应计算的振型分解反应谱法. 地震工程与工程振动, 2007, 27(1): 31-37 (Wang Mengfu. On seismic response analysis methods of non-proportional damped linear MDOF systems. *Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2007, 27(1): 31-37 (in Chinese))

25 Neugebauer R, Scheffler C, Wabner M, et al. Advanced state space modeling of non-proportional damped machine tool mechanics. *Cirp Journal of Manufacturing Science and Technology*, 2010, 3(1): 8-13

26 Neugebauer R, Scheffler C, Wabner M, et al. State space modeling of non-proportional passive damping in machine tools. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2011, 53(9-12): 945-952

27 Qin JQ. Seismic response analysis on non-proportional damped system by using perturbation technique. *Advanced Materials Research*, 2013, 639-640(1): 917-921

28 楼梦麟, 范幺清. 求解非比例阻尼体系复模态的实模态摄动法. 力学学报, 2007, 39(1): 112-118 (Lou Menglin, Fan Yaoqing. Modal perturbation method for obtaining complex modal characteristics of non-proportional damping systems. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, 39(1): 112-118 (in Chinese))

29 国巍, 余志武. 一种计算非比例阻尼结构地震响应的新方法. 力学学报, 2011, 43(6): 1170-1180 (Guo Wei, Yu Zhiwu. A new method for calculating seismic response of non-proportionally damped structures. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 43(6): 1170-1180 (in Chinese))

30 段绍伟, 向湘林, 沈蒲生. 复杂阻尼结构阻尼模型研究. 振动与冲击, 2011, 30(2): 73-76 (Duan Shaowei, Xiang Xianglin, Shen Pusheng. Damping model of a complex structure. *Journal of Vibration and Shock*. 2011, 30(2): 73-76 (in Chinese))

31 Mohamed K, Noureddine B, Scott C. Appropriation effects in the estimation of modal damping. *Advances in Acoustics and Vibration*, 2017, 5: 185-193

32 Zoghaib L, Mattei PO. Time and frequency response of structures with frequency dependent, non-proportional linear damping. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(3): 887-900

33 朱镜清, 朱敏. 复阻尼多自由度系统动力分析的模态叠加法. 地震工程与工程振动, 2004, 24(1): 55-58 (Zhu Jingqing, Zhu Min. Two mode-superposition methods for dynamic analysis of MDOF systems with complex damping characteristics. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2004, 24(1): 55-58 (in Chinese))

34 刘庆林, 傅学怡, 孙占琦. 基于复阻尼假定的不同材料阻尼特性混合结构抗震分析复模态叠加法. 建筑结构学报, 2011, 32(9): 27-33 (Liu Qinglin, Fu Xueyi, Sun Zhanqi. A complex mode superposition method for seismic analysis of structures of multiple material damping characteristics based on complex damping assumption. *Journal of Building Structures*, 2011, 32(9): 27-33 (in Chinese))

35 Makris N, Zhang J. Time-domain viscoelastic analysis of earth structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2015, 29(6): 745-768

36 Lage Y, Cachão H, Reis L, et al. A damage parameter for HCF and VHCF based on hysteretic damping. *International Journal of Fatigue*, 2014, 62(7): 2-9

37 大崎顺彦. 地震动的谱分析入门. 吕敏申, 谢礼立. 译. 北京: 地震出版社, 2008 (Osaki Y. Introduction to Spectrum Analysis of Ground Motion. Lü Minshen, Xie Lili, trans. Beijing: Seismological Press, 2008 (in Chinese))

38 胡聿贤. 地震工程学 (第 2 版). 北京: 地震出版社, 2006 (Hu Yuxian. Earthquake Engineering, 2nd edn. Beijing: Seismological Press, 2006 (in Chinese))

39 王建平, 刘宏昭, 原大宁等. 含复阻尼系统的对偶原则及数值方法研究. 振动工程学报, 2004, 17(1): 62-65 (Wang Jianping, Liu Hongzhao, Yuan Daning, et al. Dual principle of oscillation systems with complex damping and its numerical method. *Journal of Vibration Engineering*, 2004, 17(1): 62-65 (in Chinese))

40 朱镜清. 结构抗震分析原理. 北京: 地震出版社, 2002 (Zhu Jingqing. Seismic Analysis of Structures. Beijing: Earthquake Press, 2002 (in Chinese))

41 潘玉华, 王元丰. 复阻尼结构动力方程的高斯精细时程积分法. 工程力学, 2012, 29(2): 16-20 (Pan Yuhua, Wang Yuanfeng. Gauss precise time-integration of complex damping vibration systems. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(2): 16-20 (in Chinese))