

开裂孔隙材料渗透率的细观力学模型研究¹⁾

李乐²⁾

(华东交通大学土木建筑学院, 南昌 330013)

摘要 采用细观力学方法对含随机裂纹网络的孔隙材料渗透性进行研究. 开裂孔隙材料渗透性的影响因素包括裂纹网络的密度、连通度、裂纹的开度以及孔隙材料基体渗透性. 对于不连通的裂纹网络, 该文采用已有的相互作用直推法 (interaction direct derivative, IDD) 的理论框架, 引入裂纹的密度 ρ 和裂纹开度比 b , 提出了裂纹夹杂-基体两相复合材料渗透率的 IDD 理论解. 对于部分连通裂纹网络, 考虑局部裂纹团内部各个裂纹对有效渗透率的相互放大作用, 引入裂纹网络的连通度 f , 定义与连通度相关的水平裂纹密度 ρ^h , 按照增量法将表征连通特征的水平裂纹嵌入有效基体中, 以此方式来考虑裂纹夹杂间的相互搭接, 提出了考虑裂纹连通特征的扩展 IDD 理论解, 分别考虑了基体材料渗透率 K_m 、裂纹密度 ρ 、裂纹开度比 b 以及与连通度 f 相关的 ρ^h . 最后通过对有限区域内含随机裂纹网络孔隙材料渗透过程的有限元模拟分别验证了不连通和部分连通裂纹网络扩展 IDD 模型的适用性: (1) 当裂纹不连通时, 由于基体对流体渗透的阻隔作用, 裂纹的开度对有效渗透率影响不大; (2) 当裂纹部分连通时, 裂纹密度分别小于 1.1 (无关联裂纹网络, 分形维数为 2.0)、1.2 (关联裂纹网络, 分形维数为 1.75) 时, 扩展 IDD 模型能够很好地估计开裂孔隙材料的有效渗透率, 但是随着裂纹进一步扩展, 最大裂纹团主导作用凸显, 扩展 IDD 模型不再适用.

关键词 孔隙材料, 裂纹网络, 渗透率, 相互作用直推法, 连通度

中图分类号: O346.5 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-18-065

PERMEABILITY OF MICROCRACKED POROUS SOLIDS THROUGH A MICROMECHANICAL MODEL¹⁾

Li Le²⁾

(Department of Civil Engineering and Architecture, East China Jiao Tong University, Nanchang 330013, China)

Abstract This paper investigates the permeability of solids containing a crack network with finite connectivity through micromechanical method. The main factors of permeability include crack density, connectivity, crack opening and permeability of porous matrix. Firstly, for solids with unconnected cracks, the interaction direct derivative (IDD) method is employed to obtain the crack-altered permeability considering crack density ρ and crack opening b . Then, for networks containing randomly oriented cracks with intersection, the amplification of permeability by crack connectivity is quantified for local crack clusters. This amplification effect is modeled by arranging parallel cracks on transport direction. By introducing the definition of hypothetically parallel crack density ρ^h , the hypothetically parallel cracks are embedded in a host matrix whose permeability are those of the effective medium. In this way the IDD model is extended to evaluate the permeability of part-connected networks before total percolation occurs, considering the permeability of porous matrix

2018-03-12 收稿, 2018-08-07 录用, 2018-08-08 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (51808218), 江西省自然科学基金 (20171BAB216043) 和江西省教育厅基金 (GJJ170393) 资助项目.

2) 李乐, 讲师, 主要研究方向: 混凝土结构耐久性. E-mail: liniannian15@163.com

引用格式: 李乐. 开裂孔隙材料渗透率的细观力学模型研究. 力学学报, 2018, 50(5): 1032-1040

Li Le. Permeability of microcracked porous solids through a micromechanical model. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(5): 1032-1040

K_m , crack density ρ , opening aperture b and parallel crack density ρ^h . Finally, the representative volume element is built for cracked solids with cracks having random spatial locations and the permeability is solved by finite element method. Through this numerical tool, the validity and accuracy of IDD solutions for non-connected and part-connected crack networks are confirmed by several case analysis. The results show that: (1) For non-connected networks, crack opening is found to have little impact on the effective permeability due to the continuous matrix and its low permeability; (2) For part-connected networks, when crack density $\rho < 1.1$ (uncorrelated networks, the fractal dimension is 2.0), 1.2 (correlated networks, the fractal dimension is 1.75), the IDD extended model show a good agreement with numerical results and loses its accuracy due to the clustering effect at more higher ρ level.

Key words porous material, crack network, permeability, interaction direct derivative, connectivity

引言

孔隙材料基体本身的渗透率很小,如基岩岩体、混凝土等,是高放废物地下处置库常用的屏障材料^[1-2]。但是在外载荷、温湿度梯度及其他侵蚀性环境里,岩体或混凝土材料内部出现一些微裂纹,且都有扩展趋势,最终形成连通的裂纹网络^[3-4],这些连通的裂纹网络构成良好的渗流通道,能加速水、气及侵蚀性介质在孔隙材料内的传输,对处置库的长期安全性产生显著影响^[5]。孔隙材料中裂纹的空间结构(如裂纹长度分布、取向及裂纹之间的连通程度等)和裂纹的物理性质(裂纹的开度等)的不同导致渗透性也不相同^[6],使得开裂岩体或者混凝土的渗透性具有明显的非均质性^[7]。因此,研究开裂孔隙材料的渗透性具有普遍意义。

由于多孔介质与裂纹的渗透性相差很大,可以假设多孔介质为均匀基体,开裂孔隙材料可以看作是由基体与裂纹夹杂组成的两相复合材料,这两相的空间分布状态对整体渗透率有重要影响^[8-9]。细观力学从材料的微结构特征出发,在宏观性质中体现微结构的相互作用^[10]。采用不同的假设来定性或者定量描述夹杂物之间相互作用可以得到不同的研究方法,如稀疏解法^[11]、自洽法^[12-13]、Mori-Tanaka方法^[14-15]、微分法^[16-17]、相互作用直推法^[18-20]等。郑泉水等^[18-19]以三相模型为分析基础,在已有的有效自洽法基础上提出了相互作用直推法(interaction direct derivative, IDD)。IDD法具有显式解,其相关量都有清晰的物理含义,可适用于多种物理现象的研究,包括各向同性及各向异性材料的线弹性、渗流和热传导等问题^[21-24]。周春圣等^[23-24]在其研究基础上又将IDD法应用于含裂纹夹杂多孔材料的渗透率求解上,通过修正连通部分裂纹的有效长度来模拟裂纹连通对渗透率的影响。虽然文献^[23-24]中给出

了裂纹连通程度的概念描述,但是它与渗透性之间的关系并不直接,也没有明确的物理意义。因此,当裂纹逐渐聚集、连通时,从渗透性的角度考虑,对裂纹之间的连通程度进行量化分析;考虑裂纹网络的密度、连通度和开度,如何建立含有裂纹连通特征的孔隙材料渗透性的细观力学模型,是尚未解决的问题。

本文在含裂纹夹杂的相互作用直推法研究的基础上,引入裂纹网络的连通度和裂纹的开度信息,定义与连通度相关的水平裂纹密度,按照增量法将表征连通特征的水平裂纹嵌入有效基体中,以此方式来考虑裂纹夹杂间的相互作用,提出考虑裂纹连通特征的扩展IDD模型;然后基于有限元数值工具,研究裂纹网络的密度、裂纹的开度、连通度对渗透性的影响,验证理论模型的有效性。

1 渗透率的扩展 IDD 理论模型

1.1 IDD 理论解模型

IDD理论解是针对复合材料的线弹性问题提出的,也可以推广应用于有效渗透率的计算。如果两个裂纹夹杂取向一样,但几何尺寸不同,则称这两个是属于同一类裂纹夹杂。基体、第*i*类夹杂和等效介质的渗透张量分别标记为 K_m 、 K_i 和 K ,其中 $i = 1, 2, \dots, N$, N 代表复合材料中裂纹夹杂类别的总数。等效介质的渗透率增量 H 和裂纹夹杂相对于基体的渗透率变化量 H_i 定义为^[18]

$$H = K - K_m, \quad H_i = K_i - K_m \quad (1)$$

郑泉水等^[18-19]提出的IDD法利用稀疏解的性质,将渗透率增量表示为

$$H^d = \sum_{i=1}^N H_i^d = \sum_{i=1}^N c_i (H_i^{-1} + \Omega_i^0)^{-1} \quad (2)$$

式中 $H_i^d = c_i (H_i^{-1} + \Omega_i^0)^{-1}$ 代表第 i 类夹杂所对应的稀疏解, c_i 为第 i 类夹杂的体积分数, Ω_i^0 是第 i 类夹杂的特征刚度张量, 它刻画的是夹杂的形状和取向. 为了标记上的方便, 此处上角标 0 代表对基体材料相的依赖性, 上角标 d 代表稀疏解 (dilute). 考虑夹杂之间相互作用的 IDD 估计可以显式地表达为 [18]

$$H^{idd} = \left(I - \sum_{i=1}^N H_i^d \Omega_{Di}^0 \right)^{-1} H^d \quad (3)$$

式中 Ω_{Di}^0 是基体氛围的特征刚度张量. 因为 H^{idd} 解中包含的 H_i^d , Ω_{Di}^0 和 H^d , 这些量在物理上和定量上都有良好的定义, 在文献中也能够获得有大量现成的结果 [11], 求解过程比较简单. 特别地, 当所有裂纹夹杂-基体胞元有相同的外部几何构型, 即 $\Omega_{Di}^0 = \Omega_D^0$ 时, 上式就简化为 [18]

$$H^{idd} = \left[(H^d)^{-1} - \Omega_D^0 \right]^{-1} \quad (4)$$

IDD 估计的关键是恰当地选取夹杂-基体胞元的基体氛围. 周春圣等 [23-24] 利用 Shafiro 和 Kachanov [11] 给出的对应于线性物理问题椭球形夹杂时的稀疏解通式, 采用椭球 (三维)、椭圆 (二维) 状的基体氛围, 假设裂纹夹杂为币状 (三维) 和线状 (二维), 应用 IDD 理论框架对含裂纹夹杂的多孔介质渗透率进行估计. 以三维椭球形夹杂为例, 对 Shafiro 和 Kachanov 稀疏解的形式进行简单描述. 假设椭球的三个半轴长分别为 $a_{1,2,3}$, 沿三个轴方向的单位矢量分别为 $e_{1,2,3}$, 线性物理问题的稀疏解可以写为 [11]

$$H^d = \sum_{i=1}^N H_i^d, \quad H_i^d = c_i (H_i^{-1} + K_m^{-1} J)^{-1} \quad (5)$$

式中张量 J 与椭球形夹杂几何形状相关, 对于各向同性的情况 J 的主分量 $J_{j=1,2,3}$ 可以由标准椭球积分表示为 [11]

$$J_1 = \frac{a_1 a_2 a_3}{2} \int_0^\infty \left[(a_1^2 + u) \sqrt{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)} \right]^{-1} du \quad (6)$$

J_2, J_3 可由下标轮换得到. 对比式 (2) 和式 (5) 可以得到椭球形夹杂的特征刚度张量 [11]

$$\Omega_i^0 = K_m^{-1} \cdot J \quad (7)$$

基体氛围的特征刚度张量 Ω_{Di}^0 也可以由式 (7) 算得.

1.2 不连通裂纹网络

当裂纹开展较少时, 假设裂纹网络是由离散的单条裂纹组成, 即裂纹之间互不连通, 引入裂纹密度、裂纹开度来定量分析二维不连通裂纹网络的渗透率. 假设 $a_1 > a_2 > a_3$, 二维问题对应三维时 $a_1 \rightarrow \infty$, 仅考虑 $e_2 e_3$ 平面. 采用椭圆形的基体氛围, 并假设基体氛围取向与夹杂一致, 其形状、取向如图 1 所示. 裂纹夹杂的半轴长分别定义为 a_2 和 a_3 , 基体氛围半轴长定义为 a'_2 和 a'_3 , 有 $a'_2 = a_2 + a'_3$. 若裂纹夹杂的密度定义为无量纲面密度 [25]

$$\rho = \sum_{i=1}^N \frac{(a_2)_i^2}{A} \quad (8)$$

式中 N 代表裂纹夹杂总数, A 为研究区域的面积. 裂纹夹杂在基体氛围内的密度与整体密度一致, 则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_2^2}{\pi(a_2 + a'_3)a'_3} &= \rho \\ \frac{a'_3}{a'_2} &= \frac{a'_3}{a_2 + a'_3} = \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\pi\rho}} - 1 \right) / \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\pi\rho}} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

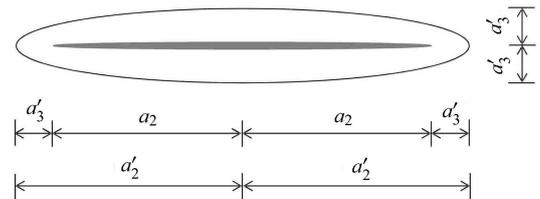


图 1 裂纹及其所处基体氛围示意图

Fig. 1 Crack inclusion and its matrix atmosphere

由于 $a_1 \rightarrow \infty$ 有

$$J_1 = 0, \quad J_2 = \frac{a_3}{a_2 + a_3}, \quad J_3 = \frac{a_2}{a_2 + a_3} \quad (10)$$

代入式 (5), 则垂直于 e_1 的平面内渗透率张量增量的稀疏解可写成

$$H_i^d = c_i \left[H_i^{-1} + K_m^{-1} \left(\frac{a_3}{a_2 + a_3} e_2 e_2 + \frac{a_2}{a_2 + a_3} e_3 e_3 \right) \right]^{-1} \quad (11)$$

此时椭圆形裂纹夹杂的稀疏解可进一步简化为

$$H_i^d = \frac{\pi a_2 a_3}{A} \left[\frac{(K_i - K_m) \cdot K_m (a_2 + a_3)}{K_m a_2 + K_i a_3} e_2 e_2 + \frac{(K_i - K_m) \cdot K_m (a_2 + a_3)}{K_m a_3 + K_i a_2} e_3 e_3 \right]_i \quad (12)$$

椭圆形基体氛围的特征刚度张量可表达为

$$\mathbf{Q}_{Di}^0 = \mathbf{K}_m^{-1} \cdot \left[\frac{a'_3}{a'_2 + a'_3} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \frac{a'_2}{a'_2 + a'_3} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \right]_i \quad (13)$$

代入式 (4) 可得稀疏解. 假设裂纹夹杂的渗透率相对基体而言, $\mathbf{K}_i/\mathbf{K}_m \rightarrow \infty$, 裂纹的开度比用 $b = a_3/a_2$ 表示. 对于横观各向同性的平行裂纹而言, 沿着裂纹取向方向的渗透率分量的 IDD 解为

$$\frac{K_x}{K_m} = \frac{1 + \pi\rho(1+b)(1-\gamma_d)}{1 - \pi\rho(1+b)\gamma_d} \quad (14)$$

对于各向同性、裂纹随机分布的情况而言, IDD 解可表达为

$$\frac{K}{K_m} = \frac{1 + \pi\rho(1+b)[b + (1+b)(1-\gamma_d)]/2}{1 - \pi\rho(1+b)[-b + (1+b)\gamma_d]/2} \quad (15)$$

其中

$$\gamma_d = \frac{a'_3}{a'_2 + a'_3} = \frac{\sqrt{1 + 4/\pi\rho} - 1}{2\sqrt{1 + 4/\pi\rho}} \quad (16)$$

1.3 部分连通裂纹网络

1.3.1 裂纹网络的连通度

裂纹在孔隙材料中产生并扩展的过程中, 相互之间会出现相交、连通, 最终形成网络 [26]. 裂纹网络的连通度是表征孔隙材料内部损伤程度的一个重要指标 [27]. 李乐等 [28] 提出了考虑裂纹网络分形特征的连通度 f 的定义方法

$$f = \frac{\xi}{L} (P(\rho, L))^{(3-D_c)} \quad (17)$$

其中, ξ 是裂纹团的关联长度, $P(\rho, L)$ 是某一裂纹属于最大裂纹团的概率, D_c 为裂纹网络的分形维数, L 为有限研究区域尺度. 裂纹网络的局部团簇效应越明显, D_c 越小, f 也越小.

对孔隙材料裂纹网络的连通行为进行模拟, 首先定义无量纲尺度 $x = L/l$ 为二维多孔基体研究区域, 其中 l 为裂纹长度, $x = 5, 10, 15, 20, 25, 30$. 针对岩体、混凝土等孔隙材料开裂状态的实际观测和统计分析, 能够得到裂纹的开度、长度、取向的统计特征, 比如文献 [29-30] 中对混凝土裂纹的观测结果表明裂纹开度与裂纹长度直接相关. 假设裂纹的开度由裂纹开度与长度的比值 b 来表征, 使用文献中的研究, b 的取值范围为 0.001~0.028 之间, 裂纹的平均长度为 3.6 mm, 对应裂纹的开度在 5~100 μm . 假定裂纹的长度服从等长分布, 裂纹随机取向, 在研究区域内, 基于 Monte Carlo 法控制裂纹的密度及每条裂纹上的交点数, 按照取样—投放两个步骤来生

成随机裂纹网络模型 [31]. 释放对裂纹的交点数的控制可得到无关联随机裂纹网络 $D_c = 2.0$; 通过控制裂纹的交点数可以得到不同连通程度的关联裂纹网络 $D_c < 2.0$. 彼此相连通的裂纹在基体中会形成裂纹团, 而不同的裂纹团之间相互独立没有交集. 采用一定的算法在生成的裂纹网络中找出各个裂纹团, 并通过提取各个裂纹团的信息得到整个裂纹网络的连通性信息.

1.3.2 扩展 IDD 估计

引入连通度 f , 将二维 IDD 模型进行适当扩展以适用于描述有部分裂纹连通的情形. 如图 2 所示, 裂纹随机生成, $D_c = 2.0$, $x = 20$, 裂纹密度分别为 0.2, 1.43. 当 $\rho = 1.43$ 时出现了贯通的裂纹通路, 主裂纹团占主导地位, 此时裂纹网络的实际状态明显超出了细观力学中的基体-夹杂型拓扑假设的适用范围, 细观力学模型失效, 依据连通度的定义计算得到 $f = 0.75$, 连通度对整体渗透性影响显著; 而当 $\rho = 0.2$ 时, $f = 4.19 \times 10^{-3}$, 裂纹开始聚集, 形成离散的小裂纹团, 最大裂纹团的主导作用并不明显, 可能同时存在与最大裂纹团差不多大小的裂纹团, 如图 3 所示. 每个裂纹团内部的裂纹在一定程度上相互放大各自对有效渗透率的影响, 在渗透系数的计算中需要将其考虑进去. 为了量化这种放大效果, 本文设想存在一条水平裂纹来考虑连通作用的影响, 具体做法如下所示.

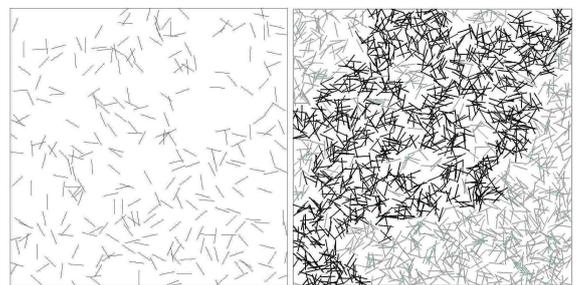


图 2 随机裂纹网络 ($x = 20, D_c = 2.0$): 部分连通 ($\rho = 0.2$, 左); 贯通网络 ($\rho = 1.43$, 右)

Fig. 2 Random crack networks ($x = 20, D_c = 2.0$): unpercolated network ($\rho = 0.2$, left) and percolated network ($\rho = 1.43$, right)

首先假设最大裂纹团在水平方向上的投影长度为 ξ , 投影长度为 $0.5\xi \sim \xi$ 之间裂纹团属于考虑范围, 统计在该范围内有 N_ξ 个裂纹团, 第 j 个裂纹团的投影长度为 ξ_j , $\xi_j = \psi_j \xi$, $\psi_j \in [0.5, 1.0]$. 然后定义与连通度相关的水平裂纹密度 ρ^h : 将 N_ξ 个裂纹团的

投影长度作为新的水平裂纹嵌入有效基体中, 计算出一个水平裂纹密度, 并将式 (8) 代入可得

$$\rho^h = \sum_{j=1}^{N_\xi} \frac{\xi_j^2}{4A} = \sum_{j=1}^{N_\xi} \psi_j^2 \frac{\xi_j^2}{4A} = \rho \left(\sum_{j=1}^{N_\xi} \psi_j^2 \cdot \xi_j^2 \right) / \left(4 \cdot \sum_{i=1}^N (a_2)_i^2 \right) \quad (18)$$

将连通度的表达式 (17) 代入可得

$$\rho^h = \sum_{j=1}^{N_\xi} \frac{1}{4} \psi_j^2 f^2 P^{-2(3-D_c)} \quad (19)$$

其中 P 为最大裂纹团中的裂纹占总裂纹的面积比。

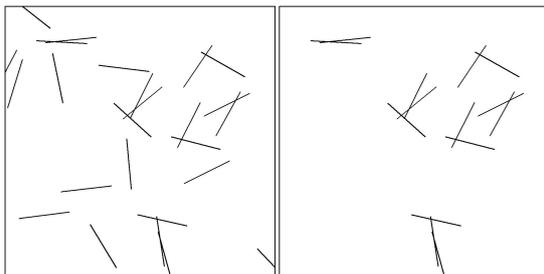


图 3 随机裂纹网络 ($x = 5, D_c = 2.0, \rho = 0.2$, 左) 及其局部连通裂纹团 (右)

Fig. 3 Random crack network ($x = 5, D_c = 2.0, \rho = 0.2$, left) and its local clusters (right)

如图 4 中大小为 2 的裂纹团, 首先计算不考虑裂纹相交的渗透率 K_1 , 然后在以 K_1 为基体的研究区域内假定同样的位置有一个长度为 ξ_j 的水平裂纹存在, 作此处理考虑裂纹的搭接作用. 依据 IDD 解的求解格式, 计算修正后假想水平裂纹夹杂渗透率可表征为

$$\frac{K_x}{K_1} = \frac{1 + \pi \rho^h (1 + b) (1 - \gamma_{dx})}{1 - \pi \rho^h (1 + b) \gamma_{dx}} \quad (20)$$

从而, 各向同性裂纹网络的等效渗透率的扩展 IDD 解为

$$\frac{K_{\text{eff}}}{K_m} = \frac{1 + \pi \rho^h (1 + b) (1 - \gamma_{dx})}{1 - \pi \rho^h (1 + b) \gamma_{dx}} \cdot \frac{1 + \pi \rho (1 + b) [b + (1 + b) (1 - \gamma_d)] / 2}{1 - \pi \rho (1 + b) [-b + (1 + b) \gamma_d] / 2} \quad (21)$$

其中 ρ^h 可由裂纹网络的连通度 f 计算得到, γ_{dx} 、 γ_d 分别与裂纹密度 ρ^h 、 ρ 有关, 均可由式 (16) 求得. 只需统计出不同裂纹密度和连通度的随机裂纹网络对应的水平密度 ρ^h , 然后按照 IDD 解格式计算等效渗透率即可。

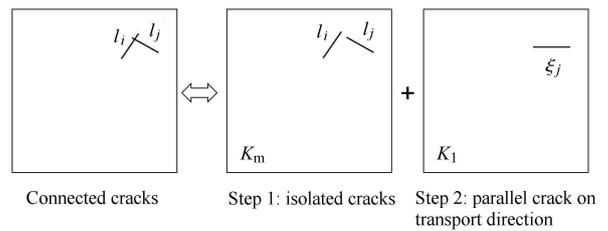


图 4 随机裂纹部分连通的等效模型

Fig. 4 Equivalent models for part-connected crack networks

2 数值分析

2.1 渗透过程的有限元分析

对于水等不可压缩流体而言, 渗透过程可以用达西定律表示为: $q = -\nabla p \cdot K / \eta$, 其中 q 为流体流速 (m/s), K 为渗透率 (m^2), η 为流体动黏度 (Pa·s). 流体在孔隙材料中的流动需满足质量守恒方程: $\nabla(\rho_1 p) = 0$, 其中不可压缩流体的密度 ρ_1 与压力无关, 近似常数. 因此稳态渗流情况下水在孔隙材料中的渗透率可表示为 [24]

$$K = \frac{Q}{A_T} \frac{\eta L_T}{p_2 - p_1} \quad (22)$$

式中, Q 和 A_T 分别为横截面流量 (m^3/s) 和面积 (m^2), p_2 和 p_1 分别为入口、出口压力 (Pa), L_T 为渗流路径长度 (m). 假设二维渗流区域的边界为 Γ , 沿渗流方向的区域边界 Γ_1 和 Γ_2 压力恒定, 垂直于渗流方向的区域边界 Γ_3 和 Γ_4 无流量流入或流出 [24]

$$\left. \begin{aligned} p|_{\Gamma_1} &= p_1, p|_{\Gamma_2} = p_2 \\ K \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_3, \Gamma_4} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

对于二维随机裂纹网络模型, 多孔基体采用三角形六节点单元进行模拟; 裂纹采用二节点线单元进行模拟, 建立两种单元的单元刚度矩阵并集成, 计算稳态渗流的压力场 $p(x, y)$, 从而实现渗流问题的求解。

2.2 不连通裂纹网络

对于不连通裂纹网络, 从数值模拟的角度采用裂纹密度和开度两个指标来进行验证. 在 $x = 20$ 的研究区域内, 控制裂纹相互不相交, 裂纹取向随机, 裂纹开度比 $b = 1.39 \times 10^{-2}$ (对应裂纹开度为 $50 \mu\text{m}$), 计算模型如图 5 所示, $\rho = 0.2$. 在 $\rho \in [0, 1.0]$ 范围内以 0.1 为步长连续生成不同密度的裂纹网络, 每个密度值下生成 40 个随机模型, 计算每个密度下的裂纹

渗透率平均值, 结果如图 6(a) 所示. 从图 6(a) 可以看出, 在开裂密度分别大于 0.15 和 0.35 时, 稀疏解与微分解明显偏离数值解. 这是因为稀疏解没有考虑裂纹之间的相互作用从而低估了裂纹网络的有效渗透率, 而微分解又高估了裂纹间的相互作用从而过高估计了裂纹网络的有效渗透率. 在密度范围 [0,1.0] 内 IDD 理论解与数值计算结果吻合得很好, 二者相关系数达到 0.99. 换言之, 对于不连通的随机裂纹网络, IDD 理论解能够很好地估计裂纹之间的相互作用.

为了分析裂纹开度对有效渗透率的影响, 固定裂纹密度 $\rho = 1.0$, 变化裂纹开度比 $b \in [0.14 \times 10^{-2}, 2.77 \times 10^{-2}]$, 每个 b 值下生成 40 个随机裂纹网络, 计算其有效渗透率并取平均值, 从而得到裂纹网络的有效渗透率随 b 的变化规律, 如图 6(b). 可以看出, 随着裂纹开度比的增大, 有效渗透率变化不大. 这是因为基体的渗透率远小于裂纹的渗透率, 当裂纹相互不连通而基体相互连通, 在一定程度上低渗透率的基体可以看作是阻隔了裂纹中流体的流动, 因此局部裂纹渗透增量对整体有效渗透率影响不大.

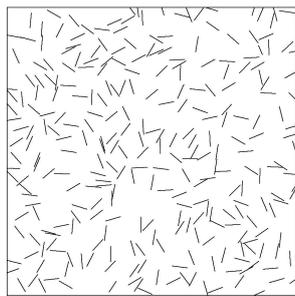


图 5 不连通随机裂纹网络的二维计算单元
Fig.5 2D numerical sample containing randomly cracks

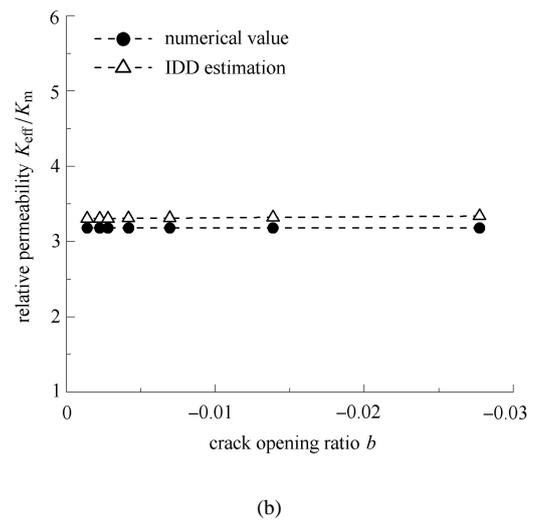
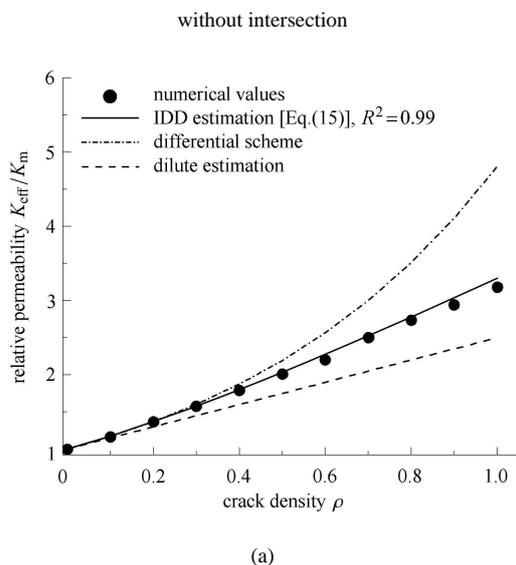


图 6 不连通随机裂纹网络有效渗透率随裂纹密度 (a) 和开度 (b) 变化的数值及理论结果
Fig.6 Numerical results and IDD estimates of effective permeability in terms of crack density (a) and crack opening (b) for unconnected crack networks

2.3 部分连通裂纹网络

数值模拟选用两种部分连通裂纹网络对扩展 IDD 模型进行验证: 无关联裂纹网络 ($D_c = 2.0$) 和关联裂纹网络 ($D_c = 1.75$). 裂纹取向随机, 裂纹开度比 $b = 1.39 \times 10^{-2}$, 计算模型如图 7 所示, $\rho = 0.5$, $x = 20$.

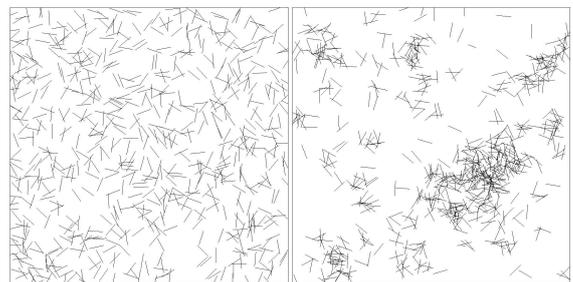


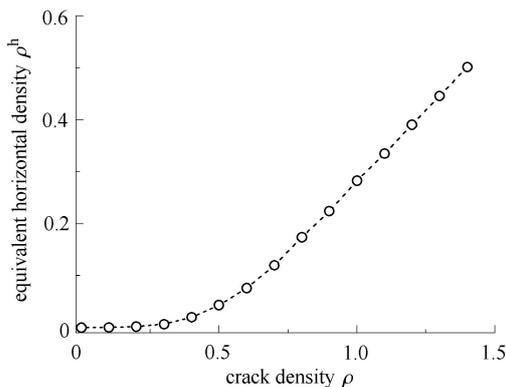
图 7 部分连通裂纹网络的二维计算单元: 无关联裂纹网络 ($D_c = 2.0$, 左); 关联裂纹网络 ($D_c = 1.75$, 右)
Fig.7 2D numerical samples containing randomly cracks with intersection: uncorrelated network ($D_c = 2.0$, left); correlated network ($D_c = 1.75$, right)

在研究区域内, 裂纹密度在 [0,1.4] 之间取值, 步长为 0.1. 每个密度点生成 40 个独立的裂纹网络, 追踪到各个网络中最大裂纹团, 计算其在渗流方向上的投影长度, 记为 ξ , 同时其他的投影长度在 $0.5\xi \sim \xi$ 的之间裂纹团也考虑进来, 计算该裂纹网络的水平裂纹密度 ρ^h . 将每个密度点上生成的裂纹网络计算

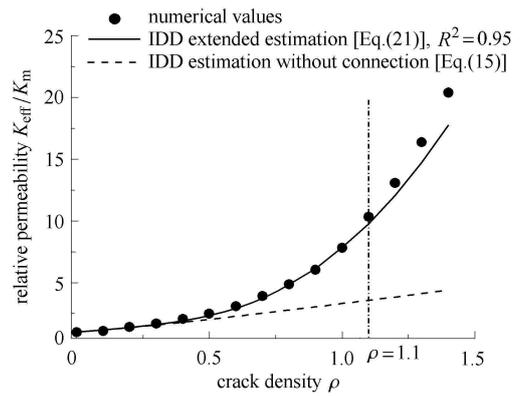
得到的 ρ^h 求平均值即为该密度点对应的 ρ^h , 如图 8(a) 和图 9(a) 所示. 将 ρ 和 ρ^h 代入扩展 IDD 模型中计算可得不同开裂密度裂纹网络的渗透率. 随后采用有限元程序计算每个密度点生成的 40 个独立裂纹网络的渗透率, 取平均值即为对应密度点的有效渗透率, 与扩展 IDD 模型计算结果相对比, 如图 8(b) 和图 9(b) 所示.

图 8(a) 和图 9(a) 表示了不同密度水平下 ρ^h 的变化曲线. 可以看出, 随着开裂密度 ρ 的增大, ρ^h 也逐渐增大且增大幅度依赖于裂纹网络的几何特征. 对于无关联裂纹网络 (图 8(a)), 当裂纹密度 $\rho < 0.4$ 时, 研究区域内几乎不存在裂纹团, 因此得到的 ρ^h 也很小, 而随着 ρ 增加, 小的裂纹团出现之后对应的 ρ^h 增加较快. 而对于 $D_c = 1.75$ 的关联裂纹网络 (图 9(a)), 由于裂纹网络生成过程对每条裂纹上交点数的要求, 即使裂纹密度很小的情况下也有小的裂纹团存在, 因而对应的 ρ^h 几乎和 ρ 呈线性关系. 在不同裂纹密度水平下, 裂纹网络的有效渗透率随裂纹密度变化的数值及理论结果如图 8(a) 和图 9(a) 所示. 可以看出, 对于无关联裂纹网络和关联裂纹网络, 当裂纹密度分别小于 1.1 和 1.2 时, 扩展 IDD 模型能够很好地与数值模拟的结果相吻合, 验证了扩展 IDD 模型对不同几何特征的裂纹网络的适用性. 而随着裂纹密度的进一步增大, 最大裂纹团的主导作用凸显, 均质化方法失效, 因而扩展 IDD 模型会出现较大误差.

可以看出, 扩展 IDD 显式解并不能得到由裂纹连通而产生的逾渗现象. 因为它也是基于 Eshelby 理论得到的, 基本假设是将单个夹杂置于无限大的场



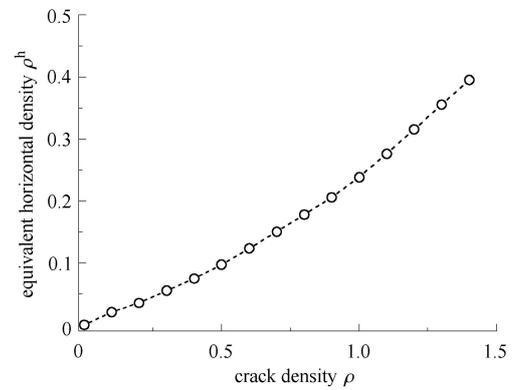
(a) $\rho^h \sim \rho$ 曲线
(a) $\rho^h \sim \rho$ curve



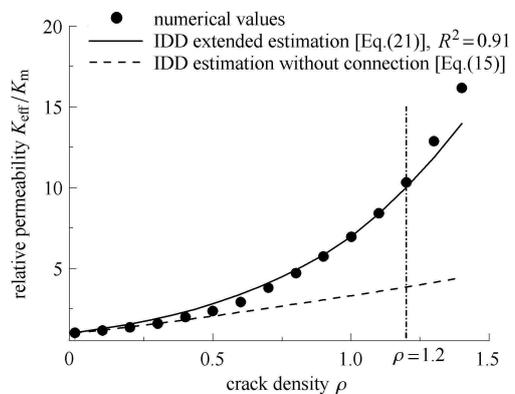
(b) 有效渗透率随 ρ 变化的数值及理论结果
(b) Numerical results and IDD estimates of effective permeability in terms of ρ

图 8 无关联裂纹网络 ($D_c = 2.0$)

Fig. 8 Random uncorrelated networks ($D_c = 2.0$)



(a) $\rho^h \sim \rho$ 曲线
(a) $\rho^h \sim \rho$ curve



(b) 有效渗透率随 ρ 变化的数值及理论结果
(b) Numerical results and IDD estimates of effective permeability in terms of ρ

图 9 关联裂纹网络 ($D_c = 1.75$)

Fig. 9 Random correlated networks ($D_c = 1.75$)

中^[32], 它只能考虑裂纹之间的相互作用. 而在以往的研究中 Hanai 等^[33] 和包科达^[34] 等学者给出了由细观力学方法得到的两相复合材料导电性的临界阈值, 如假设椭球形的导体导电率为 κ_2 , 将其置于电导率极低的基体材料 $\kappa_1 \approx 0$ 中, 复合材料的有效电导率可写为 $\kappa = (3c - 1)\kappa_2/2$, 其中 c 为椭球形导体夹杂所占的体积比, 可以看出当 $c = 1/3$ 时复合材料出现了导体-绝缘体的质变. 但是这个临界阈值是没有物理意义的, 也就是说只要改变椭球夹杂的排列方式便可以得到大于或小于 $1/3$ 的临界阈值, 如 Pike 等^[35] 得到了临界阈值 $c = 0.17$, 因此文献报道中由细观力学方法得到的临界阈值只是数学分析的结果.

3 结 论

本文使用已有的相互作用直推法 (IDD 法) 的理论框架, 推导了含不连通裂纹网络的两相复合材料渗透率的 IDD 理论解, 同时给出了裂纹平行且不连通情况下的有效渗透率的解析表达, $K_{\text{eff}} = K(K_m, \rho, b)$. 当 $\rho \in [0, 1.0]$ 时, IDD 理论解能够很好地估计裂纹之间的相互作用, 与数值计算结果相吻合; 裂纹的开度变化对整体有效渗透率影响不大, 这是因为基体的渗透率 K_m 远小于裂纹的渗透率, 当裂纹不连通而基体相互连通时, 基体可以看作是阻隔了流体的流动, 局部裂纹渗透增量对整体有效渗透率影响不大.

对于部分连通裂纹网络, 引入裂纹网络的连通度 f , 设想存在新的水平裂纹嵌入有效基体中, 定义水平裂纹密度 ρ^h , 按照增量法来考虑裂纹连通的影响, 提出了考虑裂纹连通特征的扩展 IDD 理论解, $K_{\text{eff}} = K(K_m, \rho, b, \rho^h)$. 当 $\rho < 1.1(D_c = 2.0)$, $1.2(D_c = 1.75)$ 时, 扩展 IDD 模型能够很好地与数值结果相吻合, 验证了该模型对不同几何特征的裂纹网络的适用性. 而随着 ρ 进一步增大, 扩展 IDD 理论解会出现较大误差, 这是因为主裂纹团凸显, 均质化方法失效, IDD 理论解不再适用.

参 考 文 献

- Andryushchenko ND, Safonov AV, Babich TL, et al. Sorption characteristics of materials of the filtration barrier in upper aquifers contaminated with radionuclides. *Radiochemistry*, 2017, 59(4): 414-424
- 陈永贵, 贾灵艳, 叶为民等. 施工接缝对缓冲材料水-力特性影响研究进展. *岩土工程学报*, 2017, 39(1): 138-147 (Chen Yong-gui, Jia Lingyan, Ye Weimin, et al. Advances in hydro-mechanical behaviors of buffer materials under effect of technological gaps. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2017, 39(1): 138-147 (in Chinese))
- Wu Z, Wong H, Buenfeld N. Influence of drying-induced microcracking and related size effects on mass transport properties of concrete. *Cement and Concrete Research*, 2015, 68: 35-48
- Smyl D, Rashetnia R, Seppänen A, et al. Can Electrical Resistance Tomography be used for imaging unsaturated moisture flow in cement-based materials with discrete cracks? *Cement and Concrete Research*, 2017, 91: 61-72
- Cormenzana J. Transport of a two-member decay chain in a single fracture: simplified analytical solution for two radionuclides with the same transport properties. *Water Resources Research*, 2000, 36(5): 1339-1346
- Ghasemzadeh F, Pour-Ghaz M. Effect of damage on moisture transport in concrete. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 2015, 27(9): 04014242
- 周建军, 周辉, 邵建富. 脆性岩石各向异性损伤和渗流耦合细观模型. *岩石力学与工程学报*, 2007, 26(2): 368-373 (Zhou Jianjun, Zhou Hui, Shao Jianfu. Coupled micromechanical model for anisotropic damage and permeability variation in brittle rocks. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, 26(2): 368-373 (in Chinese))
- 冯西桥, 余寿文. 计算微裂纹损伤材料有效模量的一种简单方法. *力学学报*, 2001, 33(1): 102-108 (Feng Xiqiao, Yu Shouwen. A simplified calculation method for effective moduli of microcracked solid. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2001, 33(1): 102-108 (in Chinese))
- Song Y, Davy CA, Nguyen KT, et al. Two-scale analysis of a tight gas sandstone. *Physical Review E*, 2016, 94(4-1): 043316
- 朱合华, 陈庆. 多相材料有效性能预测的高精度方法. *力学学报*, 2017, 49(1): 41-47 (Zhu Hehua, Chen Qing. An approach for predicting the effective properties of multiphase composite with high accuracy. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(1): 41-47 (in Chinese))
- Kachanov M. Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts. *Applied Mechanics Reviews*, 1992, 45(8): 304-335
- Lemarchand E, Davy CA, Dormieux L, et al. Tortuosity effects in coupled advective transport and mechanical properties of fractured geomaterials. *Transport in Porous Media*, 2010, 84(1): 1-19
- 付云伟, 倪新华, 刘协权等. 颗粒缺陷相互作用下复合材料的细观损伤模型. *力学学报*, 2016, 48(6): 1334-1342 (Fu Yunwei, Ni Xinhua, Liu Xiequan, et al. Micro-damage model of composite materials with particle and defect interaction. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(6): 1334-1342 (in Chinese))
- Yang R, Gui Q, Lemarchand E, et al. Micromechanical modeling of transport properties of cement-based composites: Role of interfacial transition zone and air voids. *Transport in Porous Media*, 2015, 110(3): 1-21
- Lemarchand E, Davy CA, Dormieux L, et al. Micromechanics contribution to coupled transport and mechanical properties of fractured geomaterials. *Transport in Porous Media*, 2009, 79(3): 335-358

- 16 Norris A. A differential scheme for the effective moduli of composites. *Mechanics of Materials*, 1985, 4(1): 1-16
- 17 Nguyen ST. Micromechanical approach for electrical resistivity and conductivity of sandstone. *Journal of Applied Geophysics*, 2014, 111: 135-140
- 18 Zheng Q, Du D. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2001, 49(11): 2765-2788
- 19 Du D, Zheng Q. A further exploration of the interaction direct derivative (IDD) estimate for the effective properties of multiphase composites taking into account inclusion distribution. *Acta Mechanica*, 2002, 157(1-4): 61-80
- 20 牡丹旭. 多相材料有效性质的理论研究. [博士学位论文]. 北京: 清华大学, 2000: 11-20 (Du Danxu. Theoretical studies on the effective properties of multiphase materials. [PhD Thesis]. Beijing: Tsinghua University, 2000: 11-20 (in Chinese))
- 21 夏强平, 韦丹, 徐志平等. 金属颗粒磁带宏观性质的细观力学估计. *力学学报*, 2006, 38(3): 323-329 (Xia Qiangping, Wei Dan, Xu Zhiping, et al. Estimate of effective properties of metal particle tape based on micromechanics. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38(3): 323-329 (in Chinese))
- 22 付云伟, 张龙, 倪新华等. 考虑夹杂相互作用的复合陶瓷夹杂界面的断裂分析. *力学学报*, 2016, 48(1): 154-162 (Fu Yunwei, Zhang Long, Ni Xinhua, et al. Interface cracking analysis with inclusions interaction in composite ceramic. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(1): 154-162 (in Chinese))
- 23 Zhou C, Li K, Pang X. Effect of crack density and connectivity on the permeability of micro-cracked solids. *Mechanics of Materials*, 2012, 43(12): 969-978
- 24 周春圣, 李克非. 含裂纹夹杂多孔材料的渗透性理论与数值分析. *工程力学*, 2013, 30(4): 150-156 (Zhou Chunsheng, Li Kefei. Theoretical and numerical analyses of permeability of porous medium with cracking inclusions. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(4): 150-156 (in Chinese))
- 25 Bour O, Davy P. Connectivity of random fault networks following a power law fault length distribution. *Water Resources Research*, 1997, 33(7): 1567-1583
- 26 Ma L, Wang X, Feng X, et al. Numerical analysis of interaction and coalescence of numerous microcracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 2005, 72(12): 1841-1865
- 27 Zhao Y, Chen J, Yuan Q, et al. Microcrack connectivity in rocks: a real-space renormalization group approach for 3D anisotropic bond percolation. *Journal of Statistical Mechanics Theory and Experiment*, 2016, 2016(1): 013205
- 28 Li L, Li K. Permeability of microcracked solids with random crack networks: Role of connectivity and opening aperture. *Transport in Porous Media*, 2015, 109(1): 217-237
- 29 Li L, Li K. Experimental investigation on transport properties of cement-based materials incorporating 2D crack networks. *Transport in Porous Media*, 2018, 121(3): 1-25
- 30 李乐, 庞晓贇, 李克非. 含裂纹网络水泥基材料的渗透性. *硅酸盐学报*, 2015, 43(8): 1047-1054 (Li Le, Pang Xiaoyun, Li Kefei. Permeability of cracked cement-based materials. *Journal of the Chinese Ceramic Society*, 2015, 43(8): 1047-1054 (in Chinese))
- 31 李乐, 李克非. 含随机裂纹网络孔隙材料渗透率的逾渗模型研究. *物理学报*, 2015, 64(13): 316-326 (Li Le, Li Kefei. Permeability of cracked porous solids through percolation approach. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(13): 316-326 (in Chinese))
- 32 Dormieux L, Kondo D, Ulm F. *Microporomechanics*. New York: Wiley, 2006: 167-203
- 33 Hanai T, Koizumi N, Sugano T, et al. Dielectric properties of emulsions. (II): Electrical conductivities of O/W emulsions. *Kolloid-Zeitschrift*, 1961, 171(1): 20-23
- 34 包科达. 含椭球包体多相复合介质电导率的有效介质理论. *物理学报*, 2005, 41(5): 833-840 (Bao Keda. Effective-medium theory for electrical conductance of a two-phase composite medium with ellipsoidal inclusions. *Acta Physica Sinica*, 2005, 41(5): 833-840 (in Chinese))
- 35 Pike G, Seager C. Percolation and conductivity: A computer study. I. *Physical Review B*, 1974, 10(4): 1421-1434