第 50 卷 第 3 期 力 学 学 报 Vol. 50，No. 3
2018 年 5 月 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics May，2018

固体力学

求解 I 型裂纹构元 *J* 积分的半解析方法[1)]

贺 屹 蔡力勋[2)] 陈 辉[3)] 彭云强

(西南交通大学力学与工程学院应用力学与结构安全四川省重点实验室，成都 610031)

摘要 表征裂纹尖端应力应变场程度的 *J* 积分是一个定义明确、理论严密的弹塑性断裂力学基础参量. 目前 *J* 积分的计算主要是依靠塑性因子法和有限元法，但对各类裂纹构元获得 *J* 积分以及载荷–位移关系的解析公式以实现材料断裂韧性理论预测和材料测试是断裂力学的重要和困难的任务. 以 *J* 积分为参量的材料断裂测试中应用最广的是 I 型裂纹试样的断裂韧性测试. 本文在平面应变条件下，针对断裂韧性测试中使用的 6 种 I 型裂纹构元，基于能量等效假设，提出了 *J* 积分–载荷和载荷–位移的工程半解析统一表征方法，进而结合有限元分析的少量计算获得 *J* 积分–载荷和载荷–位移关系的半解析公式待定参数. 分析表明，6 种 I 型裂纹构元的 *J* 积分–载荷和载荷–位移统一公式的预测结果与有限元结果吻合良好. 新提出的 *J* 积分–载荷工程半解析公式包含了材料的弹性模量、应力强度系数和应变硬化指数，能够广泛适应不同的材料，且运用该公式能够方便获取任意载荷点对应的 *J* 积分值. 应用新方法可便于获得各类 I 型裂纹构元的 *J* 积分–载荷和载荷–位移工程半解析公式.

关键词 *J* 积分，塑性断裂，半解析公式，能量等效假设，I 型裂纹

中图分类号：O346.1 **文献标识码**：A doi：10.6052/0459-1879-18-026

A SEMI ANALYTICAL METHOD TO SOLVE *J*-INTEGRAL FOR MODE-I CRACK COMPONENTS[1)]

He Yi Cai Lixun[2)] Chen Hui[3)] Peng Yunqiang

(*Applied Mechanics and Structure Safety Key Laboratory of Sichuan Province*，*School of Mechanics and Engineering*，*Southwest Jiaotong University*，*Chengdu* 610031，*China*)

Abstract The *J*-integral to characterize the singular level of the stress and strain field at the crack tip is definite and rigorous and is a basic parameter of elastoplastic fracture mechanics. The calculation of *J*-integral mainly depends on the plastic factor method and the finite element method at present. For theoretical predicting and testing of material fracture toughness, it is important and difficult to obtain analytical expressions about *J*-integral-load and load-displacement relations of cracked components. The most widely used test for structure integrity evaluation with *J*-integral is the ductile fracture toughness of type-I cracked specimens. Here, based on the Chen-Cai energy equivalence hypothesis, a unified characterization method of *J*-integral-load and load-displacement relation is proposed for six Mode-I cracked components which are commonly used in fracture toughness test under the plane strain condition. Then, the undetermined parameters of the engineering semi-analytical formulas of the *J*-integral-load and the load-displacement relations are obtained

2018–01–24 收稿，2018–04–04 录用，2018–04–04 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11472228).

2) 蔡力勋，教授，博士生导师，主要研究方向：断裂与疲劳、强度理论、材料测试理论与技术. E-mail: lix_cai@263.net

3) 陈辉，博士研究生，主要研究方向：材料测试理论与技术. E-mail：chen_hui5352@163.com

引用格式：贺屹, 蔡力勋, 陈辉, 彭云强. 求解 I 型裂纹构元 *J* 积分的半解析方法. 力学学报, 2018, 50(3): 579-588

He Yi, Cai Lixun, Chen Hui, Peng Yunqiang. A semi analytical method to solve *J*-integral for mode-I crack components. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(3): 579-588

by a small amount of finite element analysis. The results show that the *J*-integral-load and load-displacement relation predicted by the unified semi-analytical formulas are in good agreement with those from finite element method. The engineering semi-analytical *J*-integral-load formula, which contains the elastic modulus, stress strength coefficient and strain hardening exponent of materials, can be widely adapted for different materials. And the *J*-integral value corresponding to arbitrary load points can be easily obtained by the formula. The presented novel method is convenient to establish the engineering semi-analytical formulas of *J*-integral-load and load-displacement relations for various type-I cracked components or specimens.

Key words *J*-integral，plastic fracture，semi-analytical formula，energy equivalence hypothesis，mode I crack

引 言

随着科技的发展，新材料的广泛使用，各种工程建筑和结构 [1-2] 不断涌现，研究其力学行为以保障安全就显得尤为重要. 弹塑性断裂力学已经在工程结构设计中得到切实应用，航空部门提出了损伤容限设计思想，在选材方面有了专门的指导手册，美国电力研究院发展了以 J 积分为基础的弹塑性缺陷评估方法，称为 EPRI 方法 [3-5]. J 积分是一个定义明确，理论严密的应力、应变场参量，与线弹性断裂力学中的应力强度因子一样，J 积分既能表征裂纹尖端区域应力、应变场的程度，又因与加载过程中的能量相关而容易通过实验来测定，是弹塑性断裂力学的基础参量 [6].

对于平面应变条件下断裂韧性 J_c 测试，现已发展的较为成熟，Zhu 等 [7] 从线弹性断裂力学和弹塑性断裂力学的角度对金属材料的断裂韧性测试、评定和标准化进行了较为详细的技术综述，嵇醒 [8] 对断裂力学中的判据作了扼要的综述，归纳出断裂力学判据中目前还没有较好解决的几个问题. 在现有断裂韧性评定方法中，最常见的是采用裂纹尖端具有高约束度的标准紧凑拉伸 (compact tension，CT) 试样或单边裂纹弯曲 (single edged notched bending，SEB) 试样进行断裂力学试验以获取 J_{Ic}，这些试样已在若干测试标准 [9-11] 中得到推荐，其中 CT 试样使用最广，已经涉及到蠕变分析 [12]、残余应力分析 [13]、复合材料 [14] 断裂韧性测试等方面. 由 Feddern 和 Macherauch[15] 提出的圆形紧凑拉伸试样 (round compact tensile，RCT) 是一种对圆棒材料裂韧性测试非常方便的试样，目前已运用到各种合金的疲劳裂纹扩展研究 [16-17]. 单边裂纹拉伸 (single edged notched tension，SENT) 试样因其约束特性与含裂纹管道材料约束性相近而在管道材料的断裂韧度评定中得到重视 [18-19]，该试样对焊接材料的力学性能测试 [20] 同样方便. 小尺寸构件不仅取样方便且能有效降低试验成本，因而研究非标准小试样具有重要理论意义和工程应用价值. Bao 等 [21] 开发了一种实际尺寸仅有一元硬币大小的含内侧边裂纹 C 形拉伸 (C-shaped inside edge-notched tension，CIET) 小试样，实现了金属材料的疲劳裂纹扩展和断裂行为测试. 但晨等 [22] 基于量纲一载荷分离理论建立了可用于测定 CIET 试样延性断裂行为的规则化法，并完成了 J 阻力曲线测试. 双边裂纹板拉伸 (double edge crack tension，DECT) 试样也是一种在研究中使用较多的裂纹构元 [23].

现有的方法中，对于 J 积分的计算可以分为两大类：一类是按照简化模型或者工程估算方法进行计算，如 EPRI 法，另一类是通过有限元分析 (finite element analysis，FEA) 或者实验方法获取 J 积分值，如柔度法. EPRI 手册 J 积分估算法的关键是将弹塑性 J 积分分解为弹性 J_e 和塑性 J_p 两部分 [24-26]，即

$$J = J_e + J_p \tag{1}$$

其中弹性部分为

$$J_e = f_1(a_e)\frac{P^2}{E'} \tag{2}$$

式中，$E' = E/(1-\nu^2)$ 对应平面应变问题，$E' = E$ 对应平面应力问题；E 为弹性模量；ν 为泊松比. f_1 为与试件裂纹大小、位置等因素有关的形状函数，a_e 为修正的有效裂纹长度. 塑性部分 [27] 表示为

$$J_p = \alpha\sigma_0\varepsilon_0 c h_1\left(\frac{P}{P_0}\right)^{n+1} \tag{3}$$

式中，α 为材料硬化系数，σ_0 和 ε_0 为屈服应力和屈服应变，n 为硬化指数，c 为试样剩余韧带宽度，P_0 为试样的参考屈服载荷；h_1 为 J 积分全塑性解的函数，它与材料、结构、载荷以及裂纹尺寸有关. 通过有限元计算，可以得到 h_1 的值，EPRI 手册针对多种

试样提供了 h_1 随 n、试样几何尺寸变化的系列离散数据表格.

在断裂韧性试验时, 若采用 ASTM E1820-15[28], J 积分的弹性分量 J_e 表示为

$$J_e = \frac{K^2}{E'} \tag{4}$$

式中，K 为应力强度因子，塑性分量为

$$J_p = \eta \frac{U_p}{B_N b} \tag{5}$$

式中，b 表示剩余韧带厚度，B_N 表示试样净厚度，U_p 表示塑性功如图 1 所示，可由载荷 (P) 和加载线位移 (h) 的试验曲线获得，η 为无量纲塑性因子 [29-30]. η 因子多由有限元法分析确定 [31]，其步骤为建立有限元网格模型，设置材料属性，施加约束及载荷，提交运算，进而提取 J 积分值，减去由 K 因子得到的弹性部分，而根据式 (5) 逆向求解. 在平面应变下，η 近似与几何尺寸相关，在一般三维约束条件下，η 不仅与几何尺寸相关，也与 n 相关，但要获得 η 的关于几何尺寸、硬化指数的统一表达式十分困难.

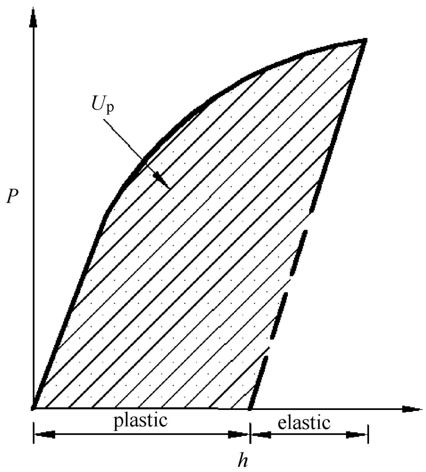


图 1 塑性功示意图

Fig. 1 The schematic diagram of plastic work

考虑 Rice 在 1968 年针对 I 型裂纹构元提出的定义式 [32]

$$J = -\left(\frac{\partial U}{B\partial a}\right) \tag{6}$$

式中，B 表示试样厚度，a 为裂纹长度. 本文基于 Chen-Cai 能量等效假设，采用 J 积分能量定义式 (6)，针对不同几何的 I 型裂纹，提出了 J 积分的工程半解析表征方法，得到 J 积分和载荷–位移的半解析统一公式.

1 单向加载下构元弹塑性问题的半解析方法

Chen 和 Cai[33-36] 通过建立变形域的应变能与积分中值点位置的材料 RVE(representative volume element) 的应变能密度与变形域有效体积等效，以及考虑 Mises 等效使得复杂应力状态下 RVE 能量密度与单轴应力状态下 RVE 能量密度等效，进而建立反映连续固体的能量、载荷、位移和材料本构关系参数关系的通用模型.

对于幂硬化材料，考虑 Ramberg-Osgood 应力应变关系，即

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{C_K}\right)^N \tag{7}$$

式中，ε 表示应变，σ 表示应力，C_K 表示应力强度系数，N 表示应力硬化指数，对于纯塑性材料，有

$$\varepsilon_p = \left(\frac{\sigma}{C_K}\right)^N \tag{8}$$

由 Chen-Cai 能量等效假设，可得塑性应变能 U_p 为

$$U_p = \frac{NC_K}{N+1} V_P \varepsilon_p^{1/N+1} = \frac{NC_K V^*}{N+1} \frac{V_P}{V^*} \varepsilon_{pp}^{1/N+1} \tag{9}$$

式中，V 表示变形域有效体积，V^* 表示特征体积，且 $V^* = A^* h^*$，A^* 为特征面积，h^* 表示特征位移. 特征体积、特征面积、特征位移旨在用于实现不同 a/W 条件下载荷、位移、应变、能量的无量纲化. 对材料的塑性有效体积和塑性等效应变做如下幂律假定

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_p}{V^*} &= k_1\left(\frac{h_p}{h^*}\right)^{k_2} \\ \varepsilon_p &= k_3\left(\frac{h_p}{h^*}\right)^{k_4} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中，k_1 和 k_2 分别为有效体积系数和指数，k_3 和 k_4 分别为有效应变系数和指数，h_p 表示加载点在加载方向移塑性位移，h^* 表示特征位移，将式 (10) 代入式 (9) 可得

$$U_p = \frac{NC_K V^*}{N+1} k_1 k_3^{1+1/N} \left(\frac{h_p}{h^*}\right)^{k_4/N+k_4+k_2} \tag{11}$$

求导可得载荷 P 的半解析公式

$$P = \frac{\partial U_p}{\partial h_p} = \frac{NC_K V^*}{(N+1)h^*} k_1 k_3^{1+1/N} \cdot \left(\frac{k_4}{N} + k_4 + k_2\right)\left(\frac{h_p}{h^*}\right)^{k_4/N+k_4+k_2-1} \tag{12}$$

整理可得，在塑性状态下材料的应变能与载荷、位移

之间的关系为

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{U_{\mathrm{p}}}{U_{\mathrm{p}}^{*}} &= \begin{cases} \left(\dfrac{h_{\mathrm{p}}}{h^{*}}\right)^{m_{\mathrm{p}}+1} \\ \left(\dfrac{P}{P_{\mathrm{p}}^{*}}\right)^{1/m_{\mathrm{p}}+1} \end{cases} \\
\frac{P}{P_{\mathrm{p}}^{*}} &= \left(\frac{h_{\mathrm{p}}}{h^{*}}\right)^{m_{\mathrm{p}}}
\end{aligned}\right\} \tag{13}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
U_{\mathrm{p}}^{*} &= \frac{NC_{K}V^{*}}{N+1}k_{1}k_{3}^{1+1/N} \\
m_{\mathrm{p}} &= \frac{k_{4}}{N}+k_{4}+k_{2}-1 \\
P_{\mathrm{p}}^{*} &= \frac{(1+m_{\mathrm{p}})NC_{K}V^{*}}{(N+1)h^{*}}k_{1}k_{3}^{1+1/N}
\end{aligned}\right\} \tag{14}
$$

类似地，在线弹性范围内可以得到材料的弹性能与载荷、位移之间的关系为

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{U_{\mathrm{e}}}{U_{\mathrm{e}}^{*}} &= \begin{cases} \left(\dfrac{h_{\mathrm{e}}}{h^{*}}\right)^{2} \\ \left(\dfrac{P}{P_{\mathrm{e}}^{*}}\right)^{2} \end{cases} \\
\frac{P}{P_{\mathrm{e}}^{*}} &= \frac{h_{\mathrm{e}}}{h^{*}}
\end{aligned}\right\} \tag{15}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
U_{\mathrm{e}}^{*} &= \frac{k_{0}EV^{*}}{2} \\
P_{\mathrm{e}}^{*} &= k_{0}EA^{*}
\end{aligned}\right\} \tag{16}
$$

2 I 型裂纹构元的半解析统一公式

对于弹塑性变形，在单向加载下裂纹构元的总能量可以通过弹性能和塑性能进行工程叠加获得，即

$$
U(P,h) = U_{\mathrm{e}}(P,h_{\mathrm{e}}) + U_{\mathrm{p}}(P,h_{\mathrm{p}}) \tag{17}
$$

加载线位移

$$
h(P) = h_{\mathrm{e}}(P) + h_{\mathrm{p}}(P) \tag{18}
$$

将式 (13) 和式 (15) 代入式 (18) 即可得裂纹构元的载荷–位移统一公式

$$
\left(\frac{PA_{1}}{A^{*}}\right)^{\frac{1}{m_{\mathrm{p}}}} + \frac{PA_{2}}{A^{*}} = \frac{h}{h^{*}} \tag{19}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
A_{1} &= \frac{(1+N)}{(1+m_{\mathrm{p}})NC_{K}k_{1}k_{3}^{1+1/N}} \\
A_{2} &= \frac{1}{k_{0}E}
\end{aligned}\right\} \tag{20}
$$

且

$$
\left.\begin{aligned}
A* &= WB\left(1-\frac{a}{W}\right)^{m} \\
h* &= W \\
V* &= W^{2}B\left(1-\frac{a}{W}\right)^{m}
\end{aligned}\right\} \tag{21}
$$

式 (21) 中 W 表示试样宽度，m 表示与裂纹长度 a 相关的特征体积折减系数，对于特定的裂纹构元，其值可固定为一个适当的常数. 联立式 (13)、式 (15) 和式 (17) 得到弹塑性条件下应变能为

$$
U = W^{2}B\left(1-\frac{a}{W}\right)^{m}\left[\frac{NC_{K}}{N+1}k_{1}k_{3}^{1+1/N}\left(\frac{P}{P_{\mathrm{p}}^{*}}\right)^{1/m_{\mathrm{p}}+1} + \frac{k_{0}E}{2}\left(\frac{P}{P_{\mathrm{e}}^{*}}\right)^{2}\right] \tag{22}
$$

联立式 (22) 和式 (6)，可得裂纹构元的 J 积分–载荷统一公式为

$$
J = \left(1-\frac{a}{W}\right)^{m-1}\left[a_{1}\left(\frac{P}{P_{\mathrm{p}}^{*}}\right)^{a_{2}} + a_{3}\left(\frac{P}{P_{\mathrm{e}}^{*}}\right)^{2}\right] \tag{23}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
a_{1} &= Wm\frac{NC_{K}}{N+1}k_{1}k_{3}^{1+1/N} \\
a_{2} &= 1+\frac{1}{m_{\mathrm{p}}} \\
a_{3} &= Wm\frac{k_{0}E}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{24}
$$

如式 (23) 所示的 J 积分–载荷统一公式，$k_0 \sim k_4$ 皆为式 (14) 和式 (16) 中的未知参数，可通过载荷位移曲线获取. 同时，J 积分统一公式又可以表示成如下无量纲化形式

$$
\frac{J}{J^{*}} = a_{4}\left(\frac{P}{P^{*}}\right)^{a_{2}} + a_{5}\left(\frac{P}{P^{*}}\right)^{2} \tag{25}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
P^{*} &= (P_{\mathrm{p}}^{*}P_{\mathrm{e}}^{*})^{0.5} \\
J^{*} &= Wm\left(1-\frac{a}{W}\right)^{m-1}C_{K}
\end{aligned}\right\} \tag{26}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
A &= \frac{P_{\mathrm{e}}^{*}}{P_{\mathrm{p}}^{*}} = \frac{(N+1)Ek_{0}}{(1+m_{\mathrm{p}})NC_{K}k_{1}k_{3}^{1+1/N}} \\
a_{4} &= \frac{NA^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m_{\mathrm{p}}}\right)}}{N+1}k_{1}k_{3}^{1+1/N} \\
a_{5} &= \frac{(1+m_{\mathrm{p}})N}{2(N+1)}k_{1}k_{3}^{1+1/N}
\end{aligned}\right\} \tag{27}
$$

对于 h 不是加载线位移的 I 型裂纹构元情形，上述公式的形式依然可假定成立.

3 J 积分公式参数的确定方法

采用有限元分析通过少量计算即可获得 J 积分

统一公式参数，其计算过程如图 2 所示. 采用有限元软件 ANSYS14.5 计算 6 种 I 型裂纹构元的 J 积分统一公式的参数，全部采用平面应变条件，模型单元采用 plane183 单元，泊松比 $\upsilon = 0.3$，应力强度系数 $C_K = 1\,000\,\mathrm{MPa}$，线弹性计算时取弹性模量 $E = 210\,\mathrm{GPa}$. 表 1 给出了各裂纹构元的尺寸，现以 CT 试样为例说明参数求解过程.

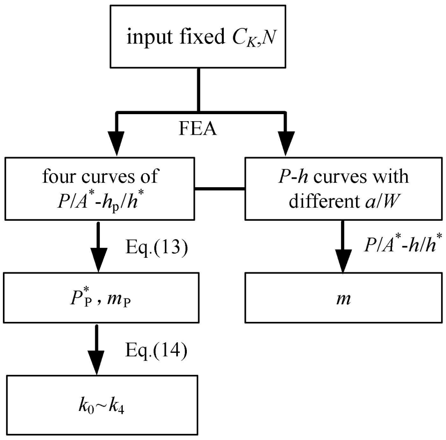
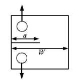
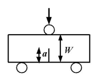
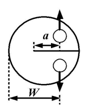
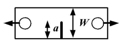
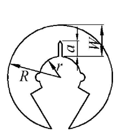
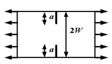


图 2 参数获取流程框图

Fig. 2 Flow chart of parameters acquisition

表 1 各类裂纹构元的尺寸

Table 1 The size of various cracked components

Cracked components		Size/mm		
		W	Others	Remarks
CT		50	—	—
SEB		40	$S = 4W$	S is the loading span
RCT		30	$R = 1.35W/2$	R is a radius
SENT		20	$H = 80$	H is the ength
CIET		9	$R = 15$, $r = 6$	R is the radius of the outer circle，r is the radius of the inner circle
DECT		20	$H = 80$	H is the ength

有限元分析中，单元网格的划分对计算结果可能存在影响，本文对不同的裂尖网格密度条件下的载荷位移曲线进行了比较. 定义裂尖 2 mm×1 mm 范围网格数量为 104 时为一倍网格密度，在此基础上对裂尖区域网格加密，其余部分网格密度不变. 图 3 给出了网格密度对载荷位移曲线的影响，结果表明采用一倍网格时已经满足计算要求.

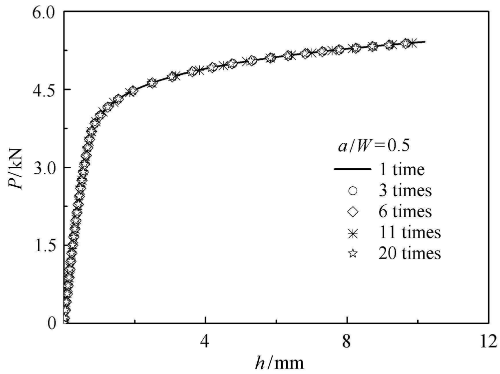


图 3 裂尖网格对载荷位移曲线的影响

Fig. 3 Effect of crack tip grid on load-displacement curves

如图 2 的流程图所示，在有限元软件前处理时输入相应参数，计算得到不同 a/W 条件下的载荷位移曲线，进行几何无关处理 $(P/A^* - h/h^*)$ 后可得参数 m，同时求得 a/W 的适用范围，结果如图 4 所示. 对模型进行全塑性计算 (文中模型均取 $a/W = 0.5$)，根据式 (13)，可得 P_p^* 和 m_p，并将其代入式 (14) 即可得到 $k_1 \sim k_4$，对模型进行线弹性计算，根据式 (15) 可求得 k_0.

计算出 CT 试样 J 积分统一公式中各参数数值分别为 $m = 2.282$，$k_0 = 0.142\,9$，$k_1 = 2.245\,6$，$k_2 = 0.003\,8$，$k_3 = 0.317\,0$，$k_4 = 1.003\,3$，公式对 a/W 的适用范围为 0.45~0.75. 图 5 给出了全塑性条件 J 积分公式预测载荷位移曲线与有限元结果的对比，弹塑性条件下公式预测的载荷位移曲线与有限元的比较由图 6(a) 给出. 图 7(a) 和图 7(b) 给出了弹塑性

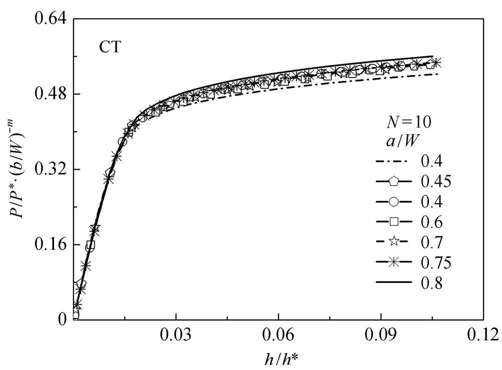


图 4 CT 试样几何无关载荷位移曲线

Fig. 4 Geometry-independent load-displacement curves of CT specimen

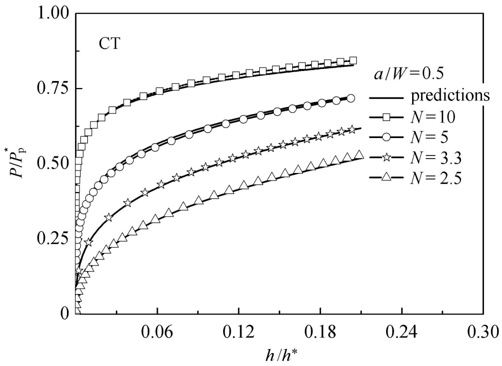


图 5 预测与计算的 CT 全塑性载荷–位移曲线比较

Fig. 5 Comparison of fully plastic load-displacement curves predicted by formula and those from FEA for CT specimen

条件下公式预测的 J 积分与有限元结果的对比.

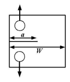
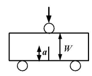
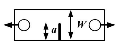
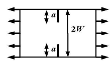
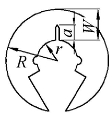
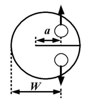
同理，本文还得到了 SEB 和 SENT 等其他 5 种试样 J 积分统一公式的未知参数，表 2 给出了其参数值，图 6 给出了 SEB、SENT 等试样载荷位移曲线公式预测与有限元结果对比，图 7 给出了各试样构元在 C_K = 100 MPa~2 000 MPa，N = 2.5 ~ 10 时统一公式对 J 积分的预测结果与有限元对比.

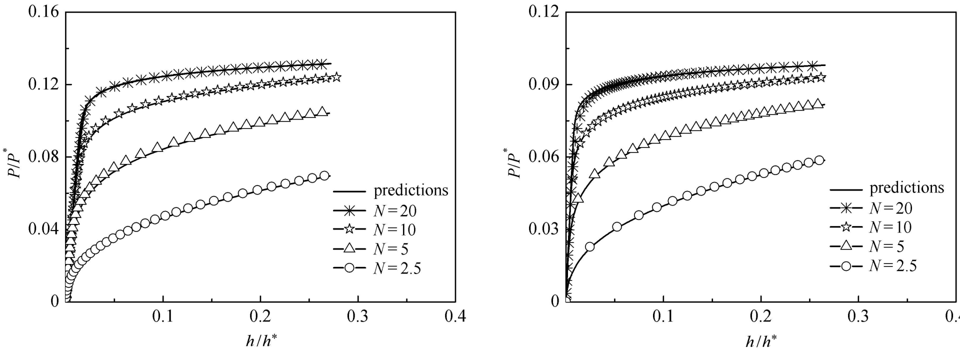
3 结 论

(1) 基于 Chen-Cai 能量等效假设，结合 J 积分能量定义式，提出了一种解析求解 I 型裂纹构元 J 积分的方法，这种新方法旨在针对一系列 I 型裂纹标

表 2 各类裂纹构元的 J 积分统一公式参数

Table 2 Unified formula parameters of J-integral for various cracked components

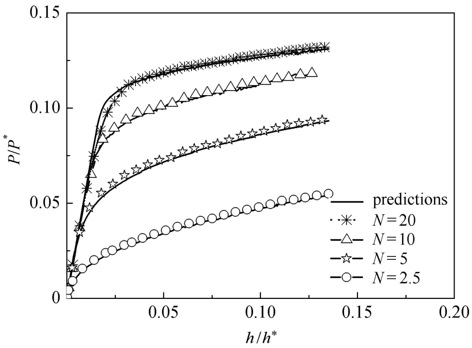
Cracked components		Range of a/W	Parameters m	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4
CT		0.45~0.75	2.282	0.1429	2.2456	0.0038	0.3170	1.0033
SEB		0.40~0.80	1.956	0.0772	1.1578	-0.0359	0.3691	1.0535
SENT		0.45~0.70	2.491	0.8910	2.8260	-0.0442	0.8135	1.0353
DECT		0.40~0.70	0.491	0.3426	3.2730	0.0044	0.3730	0.9988
CIET		0.30~0.75	2.176	0.0374	1.5280	-0.0118	0.2110	1.0137
RCT		0.40~0.75	2.245	0.1223	2.0530	-0.0114	0.3149	1.0111



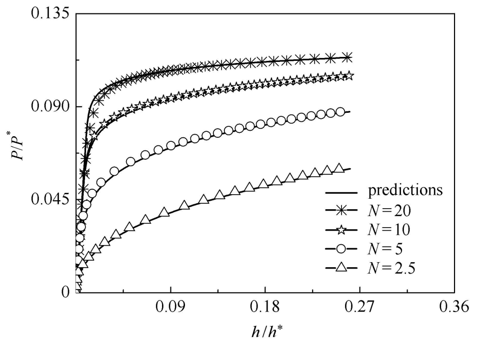
(a) CT (b) SENT

图 6 式 (19) 预测的弹塑性条件下载荷位移曲线与有限元比较

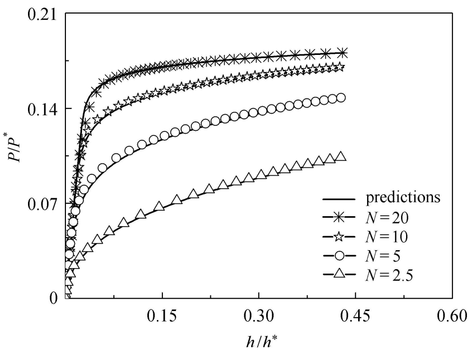
Fig.6 Comparison of elastoplastic load-displacement curves predicted by Eq.(19) with those from FEA



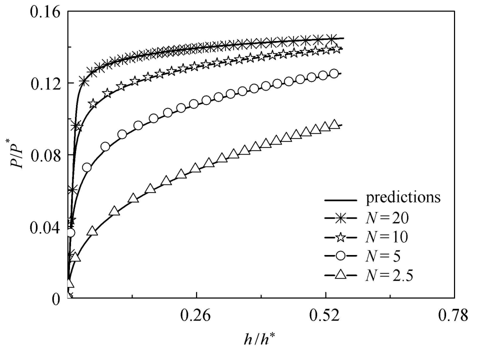
(c) SEB



(d) DECT



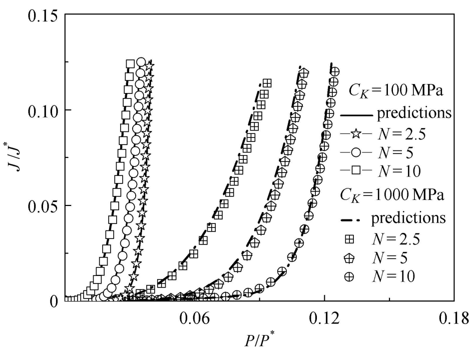
(e) CIET



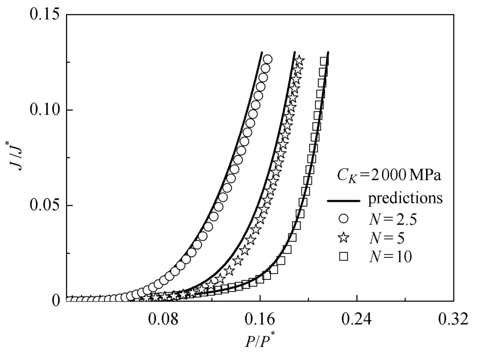
(f) RCT

图 6　式 (19) 预测的弹塑性条件下载荷位移曲线与有限元比较 (续)

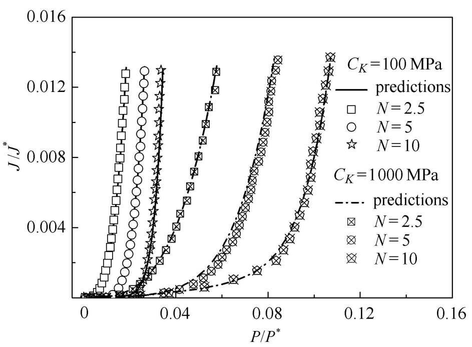
Fig.6　Comparison of elastoplastic load-displacement curves predicted by Eq.(19) with those from FEA (continued)



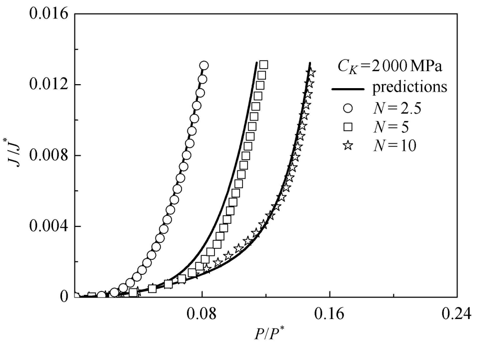
(a) CT



(b) CT



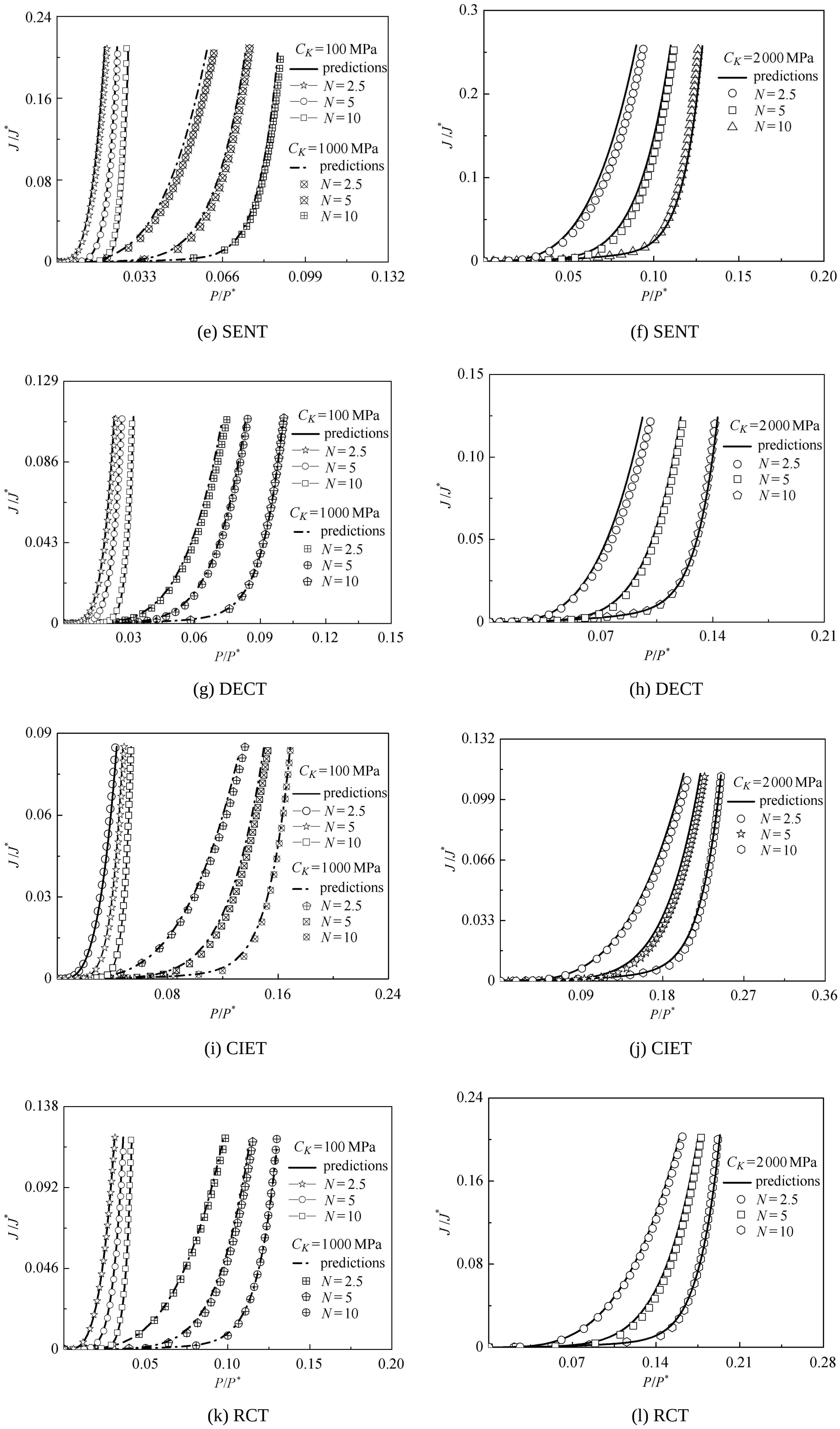
(c) SEB



(d) SEB

图 7　式 (23) 预测的 J 积分与有限元结果比较

Fig. 7　Comparison of J-integral predicted by Eq.(23) with those from FEA



(e) SENT (f) SENT

(g) DECT (h) DECT

(i) CIET (j) CIET

(k) RCT (l) RCT

图 7 式 (23) 预测的 J 积分与有限元结果比较 (续)

Fig. 7 Comparison of J-integral predicted by Eq.(23) with those from FEA (continued)

准试样和非标准试样可以较易实现获得 J 积分半解析的表达式，以便用于测试和断裂问题的理性分析.

(2) 对于 6 种 I 型裂纹构元，通过有限元的计算给出了 J 积分–载荷和载荷–位移统一公式的参数；依靠 J 积分统一公式预测的 J 积分结果相较有限元结果都吻合较好.

参 考 文 献

1 胡海岩, 赵永辉, 黄锐. 飞机结构气动弹性分析与控制研究. 力学学报, 2016, 48(1): 1-27(Hu Haiyan, Zhao Yonghui, Huang Rui. Studies on aeroelastic analysis and control of aircraft structures. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(1): 1-27 (in Chinese))

2 柳占立, 庄茁, 孟庆国等. 页岩气高效开采的力学问题与挑战. 力学学报, 2017, 49(3): 507-516(Liu Zhanli, Zhuang Zhuo, Meng Qingguo, et al. Problems and challenges of mechanics in shale gas efficient exploitation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(3): 507-516 (in Chinese))

3 Kumar V, German MD, Shih CF. Engineering Approach for Elastic-plastic Fracture Analysis. General Electric Co., Schenectady, New York: Corporate Research and Development Dept., 1981

4 Kumar V, German MDWWW. Development on Elastic-plastic Fracture Analysis (EPRI NP-3607). Palo Alto, California: Research & Development Center of EPRI, 1984

5 Zahoor A. Ductile Fracture Handbook. vols 1-3, EPRI NP-6301-D/N14- 1, Novetech Corp. and Electric Power Research Institute (Palo Alto, CA), 1989, 1990, 1991

6 Rice JR. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1968, 35(2): 379-386

7 Zhu XK, Joyce JA. Review of fracture toughness (G, K, J, CTOD, CTOA) testing and standardization. *Engineering Fracture Mechanics*, 2012, 85: 1-46

8 嵇醒. 断裂力学判据的评述. 力学学报, 2016, 48(4): 741-753(Ji Xing. A critical review on criteria of fracture mechanics. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(4): 741-753 (in Chinese))

9 GB/T 21143-2014. 金属材料准静态断裂韧度的统一试验方法. 北京：中国标准出版社，2015 (GB/T 21143-2014. Metallic materials-unified method of test for determination of quasistatic fracture toughness. Beijing：Standards Press of China, 2015 (in Chinese))

10 ASTM E399-09. Standard test methods for linear-elastic plane-strain fracture toughness K_{IC} of metallic materials. Annual Book of ASTM Standards: Vol.3.01. PhiladelPhia, PA: Ameriean Society for Testing and Materials, 2009

11 ASTM E1820-09. Standard test methods for measurement of fracture toughness//Annual Book of ASTM Standards: Vol.3.01. PhiladelPhia, PA: Ameriean Society for Testing and Materials, 2009

12 Sun PJ, Wang GZ, Xuan FZ, et al. Three-dimensional numerical analysis of out-of-plane creep crack-tip constraint in compact tension specimens. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2012, 96: 78-89

13 Traore Y, Paddea S, Bouchard PJ, et al. Measurement of the residual stress tensor in a compact tension weld specimen. *Experimental Mechanics*, 2013, 53(4): 605-618

14 Quino G, El Yagoubi J, Lubineau G. Characterizing the toughness of an epoxy resin after wet aging using compact tension specimens with non-uniform moisture content. *Polymer Degradation and Stability*, 2014, 109: 319-326

15 Feddern G, Macherauch E. New specimen geometry for KIC measurements. Z. *Metallkunde*, 1973, 64(12): 882-884

16 Szkodo M, Bień A. Influence of laser processing of the low alloy medium carbon structural steel on the development of the fatigue crack. *Surface and Coatings Technology*, 2016, 296: 117-123

17 Klysz S, Lisiecki J, Leski A, et al. Least squares method modification applied to the NASGRO equation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 51(1): 3-13

18 Chiesa M, Nyhus B, Skallerud B, et al. Efficient fracture assessment of pipelines. A constraint-corrected SENT specimen approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 2001, 68(5): 527-547

19 Kingklang S, Uthaisangsuk V. Plastic deformation and fracture behavior of X65 pipeline steel: Experiments and modeling. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, 191: 82-101

20 Hertelé S, De Waele W, Verstraete M, et al. J-integral analysis of heterogeneous mismatched girth welds in clamped single-edge notched tension specimens. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2014, 119: 95-107

21 Bao C, Cai LX, Dan C. Estimation of fatigue crack growth behavior for small-sized C-shaped inside edge-notched tension (CIET) specimen using compliance technique. *International Journal of Fatigue*, 2015, 81: 202-212

22 但晨, 蔡力勋, 包陈等. 用于断裂韧度测试的 C 形环小试样的规则化方法与应用. 机械工程学报, 2015, 51(14): 54-65 (Dan Chen, Cai Lixun, Bao Chen, et al. Normalization method used to determine fracture toughness with C-ring small sized specimen and its application. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015，51(14)：54-65 (in Chinese))

23 Treifi M, Oyadiji SO, Tsang DKL. Computations of the stress intensity factors of double-edge and centre V-notched plates under tension and anti-plane shear by the fractal-like finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 2009, 76(13): 2091-2108

24 Bucci RJ, Paris PC, Landes JD, et al. J integral estimation procedures//Fracture Toughness: Part II. ASTM International, 1972

25 Ernst HA, Paris PC, Landes JD. Estimations on J-integral and tearing modulus T from a single specimen test record//Fracture Mechanics. ASTM International, 1981

26 Zahoor A. Fracture of circumferentially cracked pipes. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 1986, 108(4): 529-531

27 Zahoor A. Evaluation of *J*-integral estimation scheme for flawed throughwall pipes. *Nuclear Engineering and Design*, 1987, 100(1): 1-9

28 Goldman NL, Hutchinson JW. Fully plastic crack problems: the center-cracked strip under plane strain. *International Journal of Solids and Structures*, 1975, 11(5): 575-591

29 ASTM E1820-15: International. Standard test method for measurement of fracture toughness. ASTM International, 2015

30 Merkle JG, Corten HT. A J-integral analysis for the compact specimen, considering axial force as well as bending effects. Paper no. 74, PVP 33. American Society for Testing and Materials, 1974

31 包陈, 蔡力勋, 但晨等. 考虑裂尖约束效应的小尺寸 CIET 试样延性断裂行为. 机械工程学报, 2017, 53(2): 34-44 (Bao Chen, Cai Lixun, Dan Chen, et al. Ductile fracture behavior of small-sized CIET specimen considering crack front constraint effect. *Journal of Mechanical Engineering*, 2017, 53(2): 34-44 (in Chinese))

32 Rice JR. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1968, 35(2): 379-386

33 Chen H, Cai LX. Theoretical model for predicting uniaxial stress-strain relation by dual conical indentation based on equivalent energy principle. *Acta Materialia*, 2016, 121: 181-189

34 Chen H, Cai LX. Unified elastoplastic model based on strain energy equivalence principle. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 52: 664-671

35 Chen H, Cai LX. Unified ring-compression model for determining tensile properties of tubular materials. *Materials Today Communications*, 2017, 13: 210-220

36 Chen H, Cai LX. Theoretical conversions of different hardness and tensile strength for ductile materials based on stress-strain curves. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 2018, 49(4): 1090-1101