

# 双频 1:2 激励下修正蔡氏振子两尺度耦合行为<sup>1)</sup>

夏雨 毕勤胜<sup>2)</sup> 罗超 张晓芳

(江苏大学土木工程与力学学院, 江苏镇江 212013)

**摘要** 不同尺度耦合系统存在的复杂振荡及其分岔机理一直是当前国内外研究的热点课题之一. 目前相关工作大都是针对单频周期激励频域两尺度系统, 而对于含有两个或两个以上周期激励系统尺度效应的研究则相对较少. 为深入揭示多频激励系统的不同尺度效应, 本文以修正的四维蔡氏电路为例, 通过引入两个频率不同的周期电流源, 建立了双频 1:2 周期激励两尺度动力学模型. 当两激励频率之间存在严格共振关系, 且周期激励频率远小于系统的固有频率时, 可以将两周期激励项转换为单一周期激励项的函数形式. 将该单一周期激励项视为慢变参数, 给出了不同激励幅值下快子系统随慢变参数变化的平衡曲线及其分岔行为的演化过程, 重点考察了 3 种较为典型的不同的外激励幅值下系统的簇发振荡行为. 结合转换相图, 揭示了各种簇发振荡的产生机理. 系统的轨线会随慢变参数的变化, 沿相应的稳定平衡曲线运动, 而 fold 分岔会导致轨迹在不同稳定平衡曲线上的跳跃, 产生相应的激发态. 激发态可以用从分岔点向相应稳定平衡曲线的暂态过程来近似, 其振荡幅值的变化和振荡频率也可用相应平衡点特征值的实部和虚部来描述, 并进一步指出随着外激励幅值的改变, 导致系统参与簇发振荡的平衡曲线分岔点越多, 其相应簇发振荡吸引子的结构也越复杂.

**关键词** 多频激励, 频域两尺度, 簇发振荡, 分岔机理

中图分类号: O322 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-18-017

## BEHAVIORS OF MODIFIED CHUA'S OSCILLATOR TWO TIME SCALES UNDER TWO EXCITATIONS WITH FREQUENCY RATIO AT 1:2<sup>1)</sup>

Xia Yu Bi Qinsheng<sup>2)</sup> Luo Chao Zhang Xiaofang

(Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, Jiangsu, China)

**Abstract** The complicated behaviors as well as the bifurcation mechanism of the dynamical systems with different time scales have become one of the hot subjects at home and abroad, since they often behave in bursting attractors characterized by the combinations between large-amplitude oscillations and small-amplitude oscillations. Since the slow-fast analysis was employed to investigate the mechanism of the special forms of movements, a lot of results related to the bursting oscillations in autonomous systems with two scales in time domain have been obtained. Recently, based on the transformed phase portraits, different types of bursting oscillations as well as the mechanism in the vector fields with single periodic excitation have been presented. However, few works has been published related to the systems with multiple periodic excitations, the dynamics of which still remains an open problem. The main purpose of the manuscript is to explore effect of the multiple scales in such systems. As a example, based on a relatively simple four-dimensional Chua's circuit, by introducing two periodically changed electric sources, when the two exciting frequencies are strictly

2018-01-13 收稿, 2018-03-12 录用, 2018-03-12 网络版发表.

1) 国家自然科学基金重点项目 (11632008) 和国家自然科学基金项目 (11472115, 11472116) 资助.

2) 毕勤胜, 教授, 主要研究方向: 动力学与控制. E-mail: qbi@ujs.edu.cn

**引用格式:** 夏雨, 毕勤胜, 罗超, 张晓芳. 双频 1:2 激励下修正蔡氏振子两尺度耦合行为. 力学学报, 2018, 50(2): 362-372

Xia Yu, Bi Qinsheng, Luo Chao, Zhang Xiaofang. Behaviors of modified Chua's oscillator two time scales under two excitations with frequency ratio at 1:2. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, 50(2): 362-372

resonant, both of which are far less than the natural frequency of the system, a dynamical model with scales under two periodic excitations is established. Note that the combination of the two exciting terms can be transformed as a function of a periodic term with single frequency, which can be regarded as a slow-varying parameter. The equilibrium branches as well as the associated bifurcations with the variation of the slow-varying parameter can be derived by employing the characteristics analysis of the equilibrium points. It is found that the distribution of the equilibrium branches as well as the bifurcation details may changed with the variation the amplitudes of the excitations, which may influence the attractors of the whole dynamical system. Three typical cases corresponding to the different situations of the equilibrium branches are considered, in which different forms of bursting oscillations are observed. Based on the transformed phase portraits, the bifurcation mechanism of the bursting oscillations has been presented. It is found that the trajectory may move almost strictly along one of the stable equilibrium branches, while jumping to another stable equilibrium branch may occur at the fold bifurcation points, the transient process of which leads to the large-amplitude oscillations corresponding to spiking states. Furthermore, it is pointed out that when more fold bifurcation points involve the behaviors of the system, more complicated bursting oscillations may appear.

**Key words** multi-frequency excitation, two scales in frequency domain, bursting oscillations, bifurcation mechanism

## 引言

许多工程及科学问题都会涉及到不同尺度之间的耦合<sup>[1-2]</sup>. 这些不同尺度可以是时间上的快慢, 如在生物细胞中, 快速的代谢过程与很慢的遗传变化<sup>[3]</sup> 以及化学反应中存在不同量级的反应速率<sup>[4]</sup> 等; 可以是空间结构上的尺度效应<sup>[5]</sup>, 如飞行器中高速转动和相对低速平动之间的相互作用<sup>[6]</sup> 以及声振耦合模型中存在的微尺度效应<sup>[7]</sup> 等, 也可以是时空尺度混合的<sup>[8]</sup>. 其动力学行为通常会表现为大幅振荡与微幅振荡之间的耦合. 当状态变量处在微幅振荡或几乎不变时, 称为沉寂态或静息态 (quiescent state, QS), 而大幅振荡则称为激发态 (spiking state, SP), 系统在沉寂态和激发态之间来回变化时, 会呈现为簇发振荡<sup>[9-10]</sup>. 簇发振荡的研究最早可以追溯到 Poincaré 研究行星轨迹时建立的奇异方程组<sup>[11]</sup>, 但是直到诺贝尔奖获得者 Hodgkin 和 Huxley 建立了两快一慢的三维模型, 成功再现了神经元的簇发放电行为以后, 不同尺度耦合系统的复杂行为才受到学术界的广泛关注<sup>[12-13]</sup>. 然而, 由于缺乏有效分析方法, 相关工作主要围绕耦合系统的近似求解<sup>[14]</sup>、数值仿真和实验分析<sup>[15-16]</sup>. 2000 年, Izhikevich 等<sup>[17]</sup> 引入了 Rinzel 的快慢分析法, 才将相关研究提升到机理分析的层次. 其中心思想是, 将不同尺度耦合系统分解为相互耦合的快慢两子系统, 通过对快子系统的平衡态及其分岔分析, 得到沉寂态和激发态之间相互转化的分岔机制, 从而揭示相应簇发振荡的产生机理<sup>[18]</sup>. 由于快慢分析法仅对于含有单一慢变

量的自治系统有效<sup>[19-20]</sup>, 加上高维非线性系统的复杂性, 相关工作大多停留在含单慢变量的低维耦合自治系统上<sup>[21-22]</sup>.

近些年, 我们围绕周期参激和外激系统的尺度效应开展了一系列工作<sup>[23-24]</sup>. 当周期激励频率远小于系统的固有频率时, 可以将整个激励项视为慢变参数, 从而得到广义自治系统<sup>[25]</sup>, 通过对广义自治系统的平衡态及其分岔行为的分析, 进而利用转换相图, 得到了多种簇发振荡模式及其相应的分岔机制<sup>[26]</sup>. 这些工作均是针对单项激励开展的, 而实际系统往往存在着多种激励共存的现象, 因此, 开展多种激励联合作用下系统尺度效应的研究有一定的科学价值.

基于此, 本文以修正的四维蔡氏电路为基础, 通过引入两频率不同的周期电流源, 适当取定参数, 建立了相对简单的双频激励电路模型. 以此模型为例, 给出了各种类型的簇发振荡行为, 结合相应的分岔分析, 得到了不同类型簇发振荡及其动力学演化机理.

## 1 数学模型

四维修正蔡氏电路中存在着丰富的动力学行为<sup>[27]</sup>, 在该电路的基础上, 引入两频率不同的周期电流源  $i_G = I_{G_1} \cos(\Omega_1 t) + I_{G_2} \cos(\Omega_2 t)$ , 如图 1 所示, 其中非线性阻尼的伏安特性方程为  $g(V_1) = \Delta_1 V_1 + \Delta_2 V_1^3 + \Delta_3 V_1^5$ ,  $\Delta_1$  为无量纲参数,  $\Delta_2$  和  $\Delta_3$  量纲分别为  $(V^{-2})$  和  $(V^{-4})$ . 其相应的动力学方程可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} [G_1(V_2 - V_1) - G_1g(V_1) + i_G] \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} [G_1(V_1 - V_2) + i_{L_1} + i_{L_2}] \\ \frac{di_{L_1}}{dt} &= -\frac{1}{L_1} (V_2 - R_2i_{L_2}) \\ \frac{di_{L_2}}{dt} &= -\frac{1}{L_2} V_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

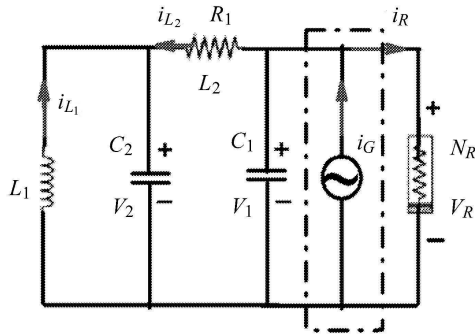


图1 双频外激励电路模型

Fig. 1 Circuit model with two periodic excitations related to different frequencies

其中  $G_1 = 1/R_1$ ,  $G_2 = 1/R_2$ . 引入变换  $V_1 = E_{10}x$ ,  $V_2 = E_{20}y$ ,  $i_{L_1} = E_{20}u/R_1$ ,  $i_{L_2} = E_{20}v/R_1$ ,  $t = R_1C_2\tau$ , 取定  $R_2 = L_1/R_1C_2$ , 式(1)可以表示为如下无量纲化形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha[y - \delta(x + bx^3 + cx^5)] + w \\ \frac{dy}{d\tau} &= \kappa x - y + u + v \\ \frac{du}{d\tau} &= -\gamma y + v \\ \frac{dv}{d\tau} &= -\beta y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中,  $\alpha = C_2E_{20}/C_1E_{10}$ ,  $\beta = R_1^2C_2/L_2$ ,  $\gamma = R_1^2C_2/L_1$ ,  $\delta = E_{10}(1 + \Delta_1)/E_{20}$ ,  $\kappa = E_{10}/E_{20}$ ,  $b = \Delta_2E_{10}^2/(1 + \Delta_1)$ ,  $c = \Delta_3E_{10}^4/(1 + \Delta_1)$ .  $E_{10}$  和  $E_{20}$  为参考电位. 激励项  $w = A_1 \cos(\omega_1\tau) + A_2 \cos(\omega_2\tau)$ , 其中  $A_1 = I_{G_1}R_1C_2/C_1E_{10}$ ,  $A_2 = I_{G_2}R_1C_2/C_1E_{10}$ ,  $\omega_i = \Omega_iR_1C_2$  ( $i = 1, 2$ ).

当两外激励项不存在时, 系统会由平衡点失稳进入周期振荡, 进而进入混沌, 而对于某些参数条件, 存在着对应于两个正 Lyapunov 指数<sup>[28]</sup>. 周期外激励的存在, 同样会导致系统由周期振荡进入混沌. 假设外激励为零, 可以计算系统的固有频率, 而非线性系统的固有频率与系统的运动状态有关, 如当系统逐渐稳定于某一焦点时, 其固有频率为该焦点雅可比矩阵的一对共轭复根的虚部值, 而当系统表现为周期振荡时, 其固有频率为该振荡的频率. 在此取

$\omega_1 = 0.01$ ,  $\omega_2 = 0.005$ , 其他参数取常规量时, 外激励频率与系统的固有频率之间会存在量级差距. 显然, 状态变量主要按照系统的固有频率振荡, 而两激励项则按照其激励频率振荡, 导致不同尺度之间的耦合, 从而产生诸如簇发等类型的特殊振荡模式.

### 2 分岔分析

由于两外激励频率处于严格的共振关系, 假设  $W = \cos(0.005\tau)$ , 则两慢变项可以表示为  $w = A_1 \cos(\omega_1\tau) + A_2 \cos(\omega_2\tau) = A_1(2W^2 - 1) + A_2W$ . 同时, 由于激励频率远小于系统的固有频率, 因此, 可以将  $W$  视为慢变参数, 即慢子系统, 从而得到相应的广义自治系统, 即快子系统, 进而将整个系统看作快慢两子系统的耦合. 也即快子系统为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha[y - \delta(x + bx^3 + cx^5)] + \\ &A_1(2W^2 - 1) + A_2W \\ \frac{dy}{d\tau} &= \kappa x - y + u + v \\ \frac{du}{d\tau} &= -\gamma y + v \\ \frac{dv}{d\tau} &= -\beta y \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

而慢子系统为  $W = \cos(0.005\tau)$ . 为揭示快慢耦合复杂行为的产生机制, 首先分析快子系统的分岔行为. 其平衡点可以表示为  $E_0(x, y, u, v) = (X_0, 0, -\kappa X_0, 0)$ , 其中  $X_0$  满足

$$-\alpha\delta(X_0 + bX_0^3 + cX_0^5) + A_1(2W^2 - 1) + A_2W = 0 \quad (4)$$

其相应的特征方程为

$$\lambda^4 + h_1\lambda^3 + h_2\lambda^2 + h_3\lambda + h_4 = 0 \quad (5)$$

式中,  $h_1 = 1 + \alpha\delta\Lambda$ ,  $h_2 = \beta + \gamma - \alpha\kappa + \alpha\delta\Lambda$ ,  $h_3 = \beta + \alpha\beta\delta\Lambda + \alpha\gamma\delta\Lambda$ ,  $h_4 = \alpha\beta\delta\Lambda$ , 其中  $\Lambda = 1 + 3bX_0^2 + 5cX_0^4$ . 当参数满足  $h_1 > 0$ ,  $h_1h_2 - h_3 > 0$ ,  $h_1h_2h_3 - h_1^2h_4 - h_3^2 > 0$ ,  $h_4 > 0$  时,  $E_0$  为稳定的. 当参数满足  $h_4 = 0$ , 也即 FB

$$\left. \begin{aligned} 1 + 3bX_0^2 + 5cX_0^4 &= 0 \\ -\alpha\delta(X_0 + bX_0^3 + cX_0^5) + A_1(2W^2 - 1) + A_2W &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

可能会产生 fold 分岔, 导致不同平衡点之间的跳跃. 而当参数满足 HB ( $h_1 > 0, h_4 > 0, h_1h_2 - h_3 > 0$ )

$$h_1h_2h_3 - h_1^2h_4 - h_3^2 = 0 \quad (7)$$

则  $E_0$  可能会由 Hopf 分岔失稳, 导致频率为  $\Omega_H^2 = h_3/h_1$  的周期振荡, 在这两分岔集的交点处, 也即 FHB

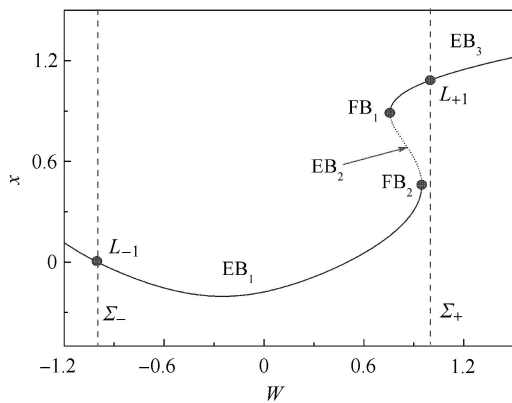
$$\left. \begin{aligned} 1 + 3bX_0^2 + 5cX_0^4 &= 0 \\ -\alpha\delta(X_0 + bX_0^3 + cX_0^5) + \\ A_1(2W^2 - 1) + A_2W &= 0 \\ \alpha\kappa - \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

可能会产生余维二 fold-Hopf 分岔, 导致平衡点向远离该平衡点所在平衡曲线的极限环的跳跃.

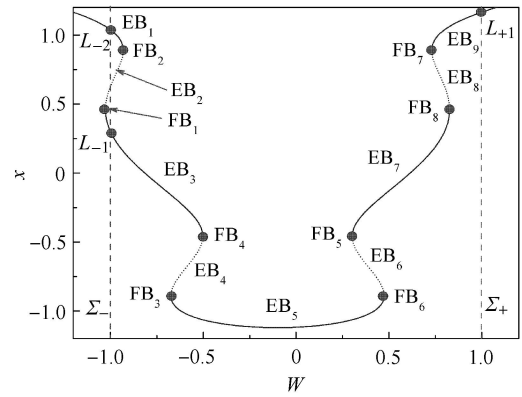
固定参数  $\alpha = 8.0, \beta = 0.5, \gamma = 8.0, \delta = 0.15, \kappa = 0.5, b = -2.0, c = 1.2, A_2 = 0.2$ . 图 2 分别给出了  $A_1 = 0.2, A_1 = 0.5$  和  $A_1 = 2.0$  时 3 种典型的不同的外激励幅值下的平衡曲线及其分岔图. 从图 2(d) 中可以看出, 整个外激励项  $A_1(2W^2 - 1) + A_2W$  的变化并不关于  $W$  对称, 从而导致图 2(a) ~ 图 2(c) 中的平衡曲线也不关于  $W$  对称. 同时, 从图 2(d) 中发现, 3 种不同情形下的整个外激励项变化曲线  $S_1, S_2$  和  $S_3$  均通过  $G_1$  和  $G_2$  点, 说明 3 种情形下在该两点存在相同的平衡点分布. 由于 3 条变化曲线所对应的值在右端变化范围大, 表明在平衡曲线图中右端存在着更多的平衡点, 这也可以由图 2(a) ~ 图 2(c) 中的平衡曲线得到证实.

由于  $W = \cos(0.005\tau)$ , 因此  $W \in [-1.0, +1.0]$ , 也即  $W$  的变化存在两极值边界  $W = \pm 1.0$ , 分别用  $\Sigma_{\pm}$  表示. 在  $A_1 = 0.2$  时, 由图 2(a) 可知, 平衡曲线由 3 段组成, 其中  $EB_1$  和  $EB_3$  是稳定的,  $EB_2$  是不稳定的, 分别由 fold 分岔点  $FB_1$  和  $FB_2$  连接.

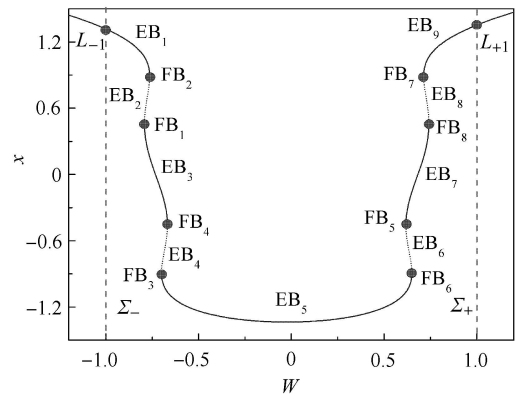
随着  $A_1$  的增大, 当  $A_1 = 0.5$  和  $A_1 = 2.0$  时, 整个外激励项的变化范围增大, 导致随  $W$  变化, 平衡



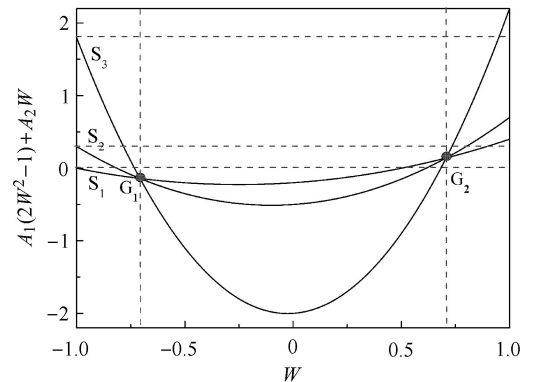
(a)  $A_1 = 0.2$



(b)  $A_1 = 0.5$



(c)  $A_1 = 2.0$



(d)  $W$  和  $w$  的关系图

(d) The relationship between  $W$  and  $w$

图 2 平衡曲线及其分岔图

Fig. 2 The equilibrium branches as well as bifurcation points

点数目发生改变, 其相应的平衡曲线可以分为 9 段, 分别由  $EB_i (i = 1, 2, \dots, 9)$  表示, 其中当  $i$  为奇数时, 相应的平衡曲线是稳定的, 而当  $i$  为偶数时, 其所对应的平衡曲线是不稳定的, 分别由 8 个 fold 分岔点  $FB_i (i = 1, 2, \dots, 8)$  连接, 参见图 2(b) 和

图 2(c).

必须指出的是, 图 2(b) 与图 2(c) 的平衡曲线虽然在  $W$  变化区间的大部分均定性相同, 但在  $W = -1.0$  附近, 由于  $W \in [-1.0, +1.0]$ , 平衡曲线  $EB_1$ ,  $EB_2$  的全部和  $EB_3$  的一部分在  $A_1 = 0.5$  时不存在, 而在  $A_1 = 2.0$  时则全部存在. 另外, 由于参数取值所限, 在各平衡曲线上不存在 Hopf 分岔点, 系统中所有平衡曲线均由 fold 分岔导致其在稳定和不稳定之间变化.

### 3 尺度效应及其机理分析

由于快子系统不仅决定系统的沉寂态和激发态的形式, 同时也决定着它们之间的转化方式, 因此 3 种情形下的平衡曲线及其分岔点的分布会导致系统产生不同的动力学行为, 下面我们分别考察其相应的簇发振荡模式及其产生机制.

由于上述的平衡点及分岔分析均是基于将  $W$  作为参数得到的, 也即给出的是不同  $W$  值下的平衡点位置及其分岔行为. 而传统的相图给出的是不同状态变化之间的关系, 如对应 (3), 其相图可定义为

$$\Pi : \{[x(\tau), y(\tau), u(\tau), v(\tau)], \forall \tau \in R\}$$

为揭示状态变量与  $W$  之间的关系, 在此引入转换相图的概念, 定义广义轨迹为

$$\Pi_G : \{[x(\tau), y(\tau), u(\tau), v(\tau), W(\tau)], \forall \tau \in R\}$$

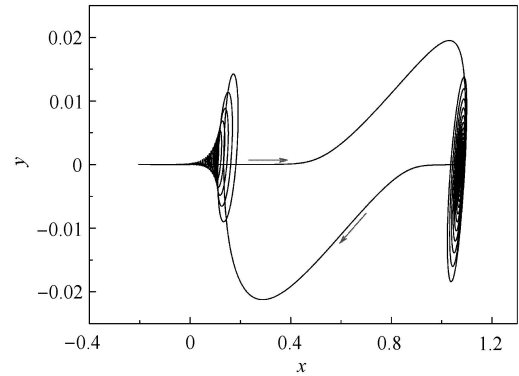
其中  $W = \cos(0.005\tau)$ , 称该轨迹在广义空间或其  $W$  相关的广义子空间中的投影为转换相图, 能够描述状态变量与  $W$  之间的相互关系. 借助转换相图, 以及快子系统的分岔分析, 可以得到不同平衡态及其分岔对振荡行为的影响, 从而揭示各种簇发振荡的产生机制.

#### 3.1 情形一: $A_1 = 0.2$

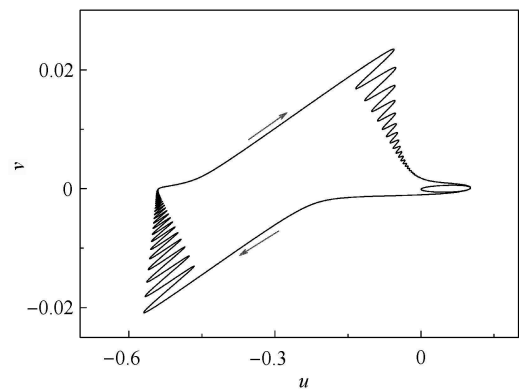
图 3 分别给出了  $A_1 = 0.2$  时系统在  $(x, y)$  和  $(u, v)$  平面上的相图. 显然, 系统轨迹围绕着两不同的平衡点来回周期振荡, 大致可以分为 4 个部分, 也即两围绕平衡点的大幅振荡部分, 其振荡幅值逐渐减小, 直至抵达平衡点, 而后由两平衡点之间相互跳跃的部分连接.

为揭示此振荡的复杂机理, 图 4 给出了  $A_1 = 0.2$  时系统在  $(W, x)$  平面上的转换相图及其与快子系统平衡曲线的叠加图. 从图 4(a) 可以看出, 系统轨迹在转换相图上表现为具有滞后环状的周期运动.

假设轨迹从图 4(b) 的  $L_{-1}$  点出发, 对应于  $W$  取最小值  $W = -1.0$ , 轨迹几乎严格沿焦点型稳定平衡曲线  $EB_1$  运动, 表现为沉寂态  $QS_1$  (参见图 4(c)),



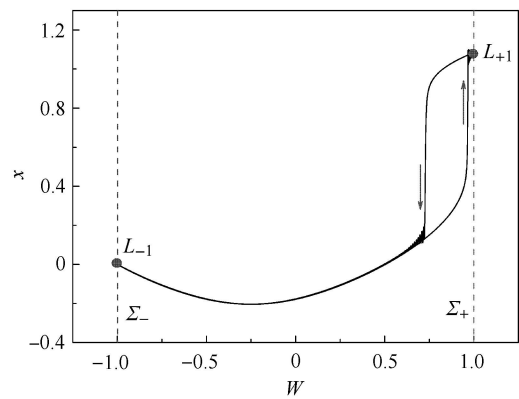
(a)



(b)

图 3  $A_1 = 0.2$  时的相图 (a)  $(x, y)$  平面; (b)  $(u, v)$  平面

Fig. 3 Phase portrait for  $A_1 = 0.2$ : (a)  $(x, y)$  plane and (b)  $(u, v)$  plane

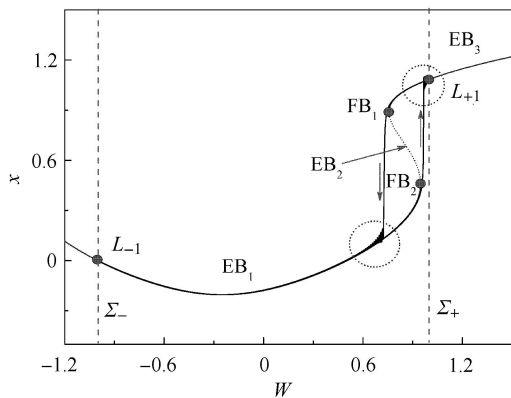


(a)  $(W, x)$  平面上的转换相图

(a) Transformed phase portrait on the  $(W, x)$  plane

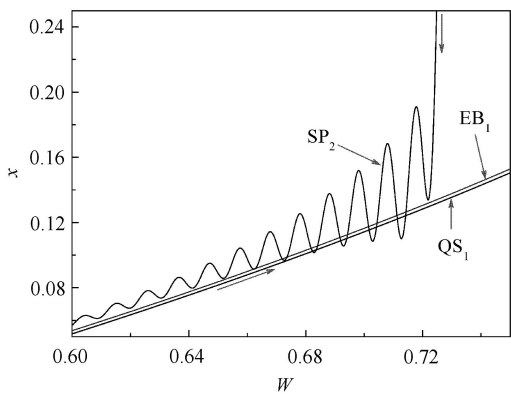
图 4  $A_1 = 0.2$  时的簇发振荡

Fig. 4 Bursting oscillations for  $A_1 = 0.2$



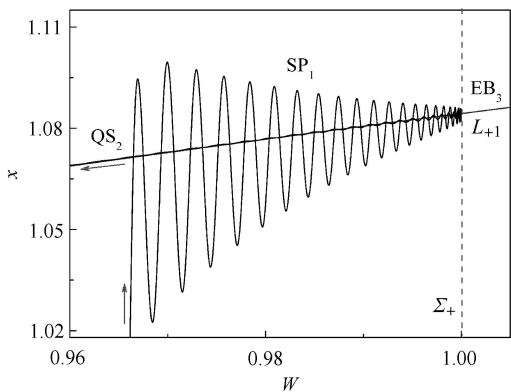
(b) 转换相图与平衡曲线的叠加图

(b) The overlap of equilibrium branches and transformed phase portrait on The  $(W, x)$  plane for  $A_1 = 0.2$



(c)  $A_1 = 0.2$  时叠加图的局部放大图 1

(c) Locally enlarged parts one of the overlap for  $A_1 = 0.2$



(d)  $A_1 = 0.2$  时叠加图的局部放大图 2

(d) Locally enlarged parts two of the overlap for  $A_1 = 0.2$

图 4  $A_1 = 0.2$  时的簇发振荡 (续)

Fig. 4 Bursting oscillations for  $A_1 = 0.2$  (continued)

直到抵达  $FB_2$ , 产生 fold 分岔, 轨迹跳跃到另一支稳定平衡曲线  $EB_3$ , 由于跳跃点与焦点型稳定平衡曲线  $EB_3$  之间存在一定的距离, 形成围绕  $EB_3$  的大幅

振荡, 表现为激发态  $SP_1$ (参见图 4(d)). 随着  $W$  的继续增大, 振荡幅值逐渐减小, 轨线逐渐收敛到平衡曲线  $EB_3$  上.

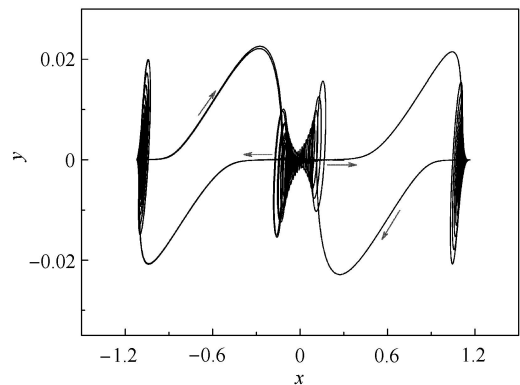
当  $W$  增大到  $W = +1.0$  时, 随着时间的继续延长,  $W$  将逐渐减小, 轨迹几乎严格沿稳定的平衡曲线  $EB_3$  运动, 表现为沉寂态  $QS_2$ (参见图 4(d)), 直到轨线抵达  $FB_1$ , 再次产生 fold 分岔, 轨迹跳向  $EB_1$ , 引起大幅振荡, 进入激发态  $SP_2$ (参见图 4(c)). 激发态的振荡幅值逐渐减小, 直到轨迹稳定于平衡曲线  $EB_1$ , 进入沉寂态  $QS_1$ , 轨迹几乎严格沿  $EB_1$  运动, 直到轨迹抵达出发点  $L_1$ , 完成一个周期的振荡.

显然, 簇发振荡的周期与  $W$  的变化周期完全一致, 同时轨迹将在两支稳定的平衡曲线  $EB_1$  和  $EB_3$  之间由 fold 分岔来回跳跃, 因此该簇发振荡可以称为周期 fold/fold 型簇发振荡, 其几何结构为点-点型.

### 3.2 情形二: $A_1 = 0.5$

增大激励幅值  $A_1$  至  $A_1 = 0.5$ , 从图 2(b) 的分岔图可以发现, 随  $W$  的变化, 快子系统可能存在多个稳定的平衡曲线及其相应的 fold 分岔点, 从而导致簇发振荡吸引子结构的改变. 图 5 给出了  $A_1 = 0.5$  系统在  $(x, y)$  和  $(u, v)$  平面上的相图, 显然, 簇发振荡的结构发生了很大的变化, 系统轨迹围绕 4 个平衡点振荡.

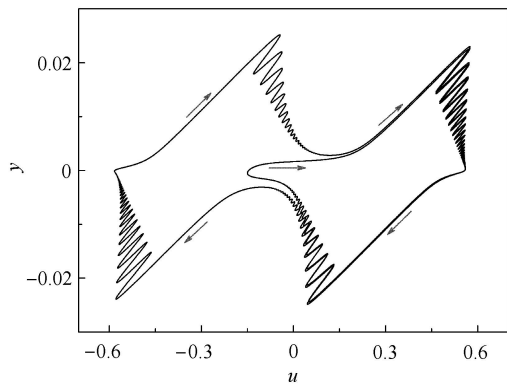
同时, 与  $A_1 = 0.2$  相比较, 当  $A_1 = 0.5$  时轨迹似乎在  $(x, y)$  的左半相平面和  $(u, v)$  的右半相平面复制了另一近似形状的结构. 值得指出的是, 系统轨迹在  $(x, y)$  的左半相平面和  $(u, v)$  的右半相平面多绕了一圈, 而在  $(x, y)$  的右半相平面和  $(u, v)$  的左半相平面依然保持几乎相同的结构.



(a)

图 5  $A_1 = 0.5$  时的相图 (a)  $(x, y)$  平面; (b)  $(u, v)$  平面

Fig. 5 Phase portrait for  $A_1 = 0.5$ : (a)  $(x, y)$  plane and (b)  $(u, v)$  plane



(b)

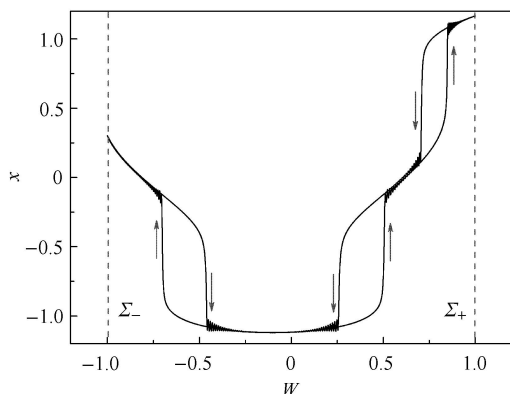
图 5  $A_1 = 0.5$  时的相图 (a)  $(x, y)$  平面; (b)  $(u, v)$  平面 (续)

Fig. 5 Phase portrait for  $A_1 = 0.5$ : (a)  $(x, y)$  plane and (b)  $(u, v)$  plane (continued)

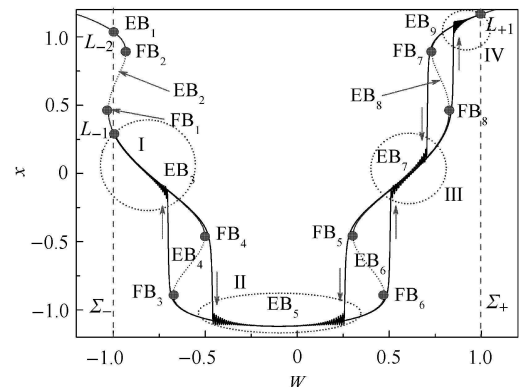
为揭示其相应的簇发振荡机制, 图 6 给出了在  $(W, x)$  平面上的转换相图及其与相应快子系统平衡曲线的叠加图. 与图 4(a) 相比, 图 6(a) 在  $(W, x)$  平面上形成了 3 个滞后环结构, 多条平衡曲线以及相应的分岔点参与了其簇发振荡的结构.

从图 6(b) 可以发现, 轨迹在一个周期运动中经历 6 个 fold 分岔, 分岔点将整个轨迹划分为 12 段, 分别对应着 6 种沉寂态和 6 种激发态.

依然假设轨迹从图 6(b) 的  $L_{-1}$  点出发, 对应于  $W$  取最小值  $W = -1.0$ , 轨迹几乎严格沿焦点型稳定平衡曲线  $EB_3$  运动, 表现为沉寂态  $QS_1$  (参见局部放大图 7(a)), 直到抵达  $FB_4$ , 产生 fold 分岔, 轨迹跳跃到另一支稳定平衡曲线  $EB_5$ , 由于跳跃点与焦点型稳定平衡曲线  $EB_5$  之间存在一定的距离, 形成围绕  $EB_5$  的大幅振荡, 表现为激发态  $SP_1$  (参见局部放大图 7(b)). 随着  $W$  的继续增大, 振荡幅值逐渐减小, 轨线在图 7(b) 的  $L_1$  点收敛到  $EB_5$ , 并几乎严格沿  $EB_5$  运



(a)



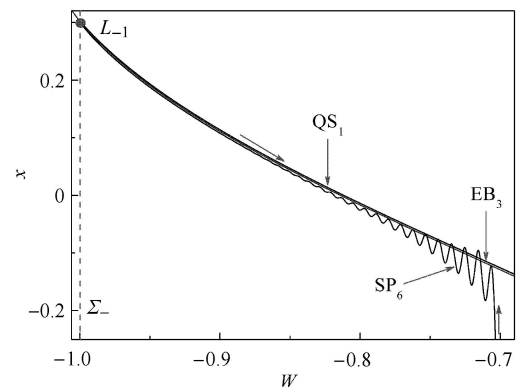
(b)

图 6  $A_1 = 0.5$  时 (a)  $(W, x)$  平面上的转换相图; (b) 转换相图与平衡曲线的叠加图

Fig. 6 (a) Transformed phase portrait on the  $(W, x)$  plane; (b) The overlap of equilibrium branches and transformed phase portrait on the  $(W, x)$  plane for  $A_1 = 0.5$

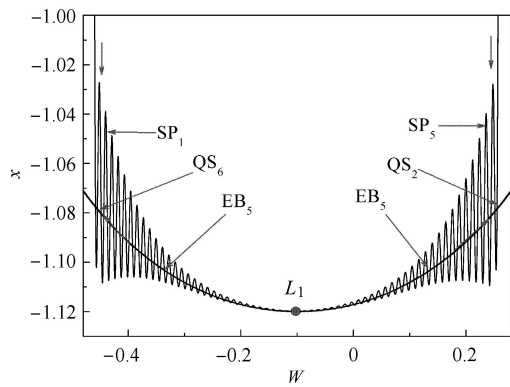
动, 进入沉寂态  $QS_2$  (参见局部放大图 7(b)).

当轨迹沿  $EB_5$  运行到分岔点  $FB_6$  时, 由 fold 分岔跳跃到稳定平衡曲线  $EB_7$  (参见图 6(b)), 导致大幅振荡的激发态  $SP_2$  (参见局部放大图 7(c)), 其振荡幅值逐渐趋向零, 导致轨迹几乎严格按照  $EB_7$  运动, 进入沉寂态  $QS_3$  (参见图 7(c)), 直到轨迹抵达分岔点  $FB_8$  (参见图 6(b)), fold 分岔导致跳跃现象, 引起轨迹产生围绕稳定平衡曲线  $EB_9$  的大幅振荡, 产生激发态  $SP_3$ , (参见局部放大图 7(d)). 随着  $W$  的增大, 轨迹逐渐趋向并稳定于平衡曲线  $EB_9$ .

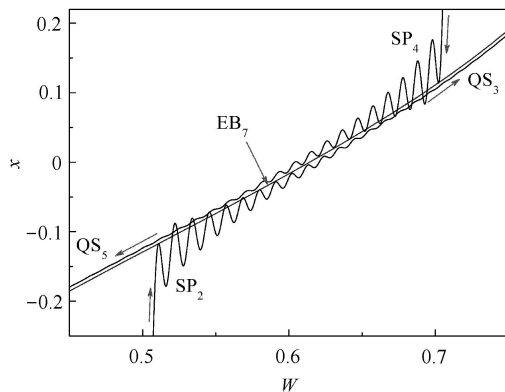


(a) I

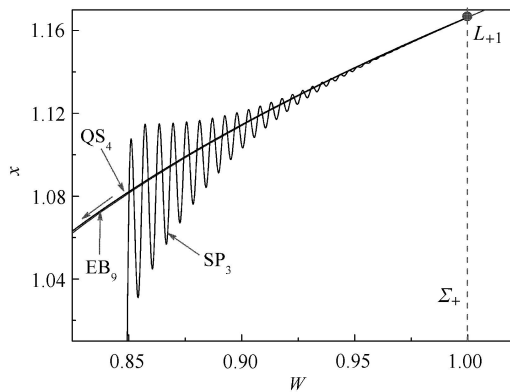
图 7 图 6(b) 中叠加图 I, II, III, IV 处的局部放大图  
Fig. 7 Locally enlarged parts I, II, III and IV of the overlap in Fig. 6(b)



(b) II



(c) III



(d) IV

图 7 图 6(b) 中叠加图 I, II, III, IV 处的局部放大图 (续)

Fig. 7 Locally enlarged parts I, II, III and IV of the overlap in Fig.6(b) (continued)

当  $W$  增大到  $+1.0$  时, 也即轨迹到达  $L_{+1}$  点, 随着时间的继续延长,  $W$  将逐渐减小, 轨迹几乎严格沿稳定的平衡曲线  $EB_9$  反向运动, 表现为沉寂态  $QS_4$  (参见图 7(d)), 直到轨线抵达  $FB_7$ , 产生 fold 分岔 (参见图 6(b)), 轨迹跳向  $EB_7$ , 引起大幅振荡, 进入激发

态  $SP_4$  (参见图 7(c)). 激发态的振荡幅值逐渐减小, 直到轨迹稳定于平衡曲线  $EB_7$ , 进入沉寂态  $QS_5$  (参见图 7(c)), 轨迹几乎严格沿  $EB_7$  运动, 直到轨迹抵达分岔点  $FB_5$ , fold 分岔导致轨迹产生围绕  $EB_5$  振荡的激发态  $SP_5$  (参见图 7(b)), 其振荡幅值在  $L_1$  点趋于零, 导致轨迹几乎严格沿  $EB_5$  运动, 进入沉寂态  $QS_6$  (参见图 7(b)).

当轨迹运行到图 6(b) 中的  $FB_3$  时, fold 分岔使得轨迹跳向稳定平衡曲线  $EB_3$ , 产生激发态  $SP_6$  (参见图 7(a)). 随着  $W$  的继续减小, 其振荡幅值也逐渐减小, 直到逐渐稳定于平衡曲线  $EB_3$  上. 当轨迹几乎严格沿  $EB_3$  运动到出发点  $L_1$  时, 轨迹完成了一个周期的运动.

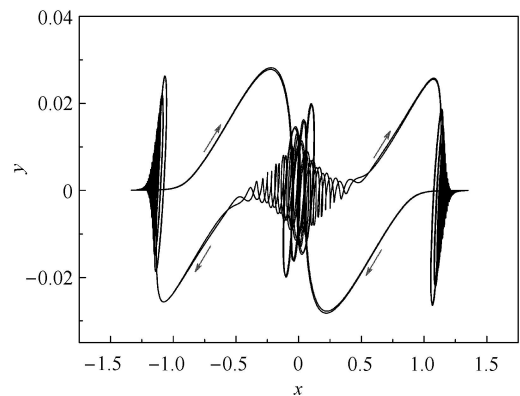
同样, 簇发振荡的周期与  $W$  的变化周期完全一致, 同时轨迹将在四支稳定的平衡曲线  $EB_3$ ,  $EB_5$ ,  $EB_7$  和  $EB_9$  之间由 fold 分岔来回跳跃, 因此该簇发振荡则称为周期 6-fold 型簇发振荡, 其几何结构为点-点-点-点型.

参与振荡的稳定平衡曲线的增加, 不仅导致簇发振荡中不同形式沉寂态和激发态数目的变化, 也会使得其簇发振荡的结构在空间中的扩张.

### 3.3 情形三: $A_1 = 2.0$

继续增加激励幅值至  $A_1 = 2.0$ , 由图 2(c) 可知, 此时所有稳定平衡曲线及其分岔行为均可能对系统轨迹产生影响, 从而进一步改变簇发振荡的吸引子结构. 图 8 分别给出了系统在  $(x, y)$  和  $(u, v)$  平面上的相图.

与图 5 中的相图不同, 系统轨迹分别在左右两子平面上绕行两圈, 但是不是周期倍化行为, 这也可

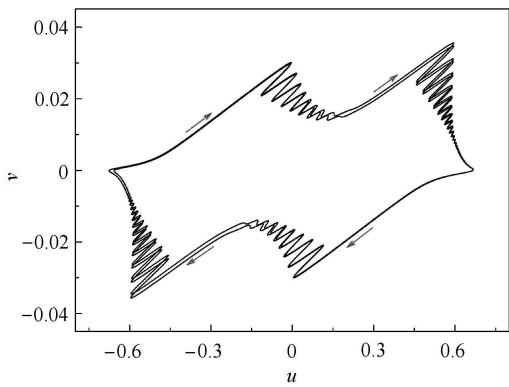


(a)

图 8  $A_1 = 2.0$  时的相图 (a)  $(x, y)$  平面; (b)  $(u, v)$  平面

Fig. 8 Phase portrait for  $A_1 = 2.0$ : (a)  $(x, y)$  plane and (b)  $(u, v)$  plane





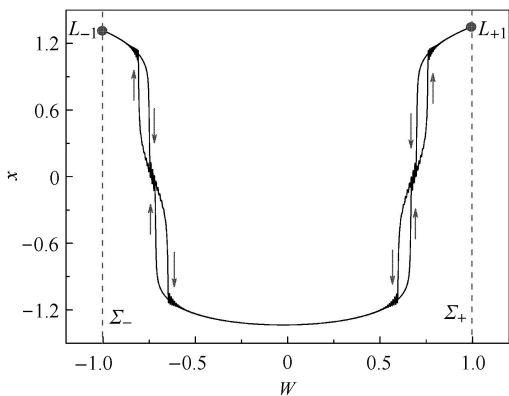
(b)

图 8  $A_1 = 2.0$  时的相图 (a)  $(x, y)$  平面; (b)  $(u, v)$  平面 (续)

Fig. 8 Phase portrait for  $A_1 = 2.0$ : (a)  $(x, y)$  plane and (b)  $(u, v)$  plane (continued)

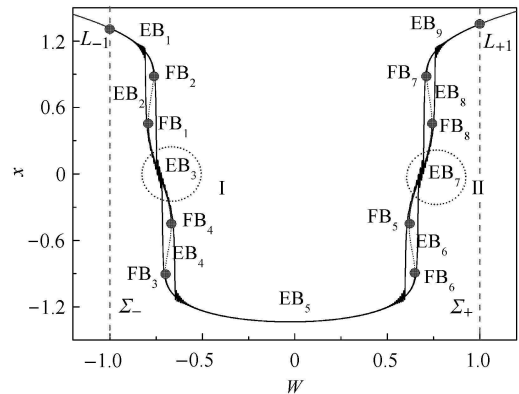
以从下文中的转换相图中得到证实. 比较图 5 和图 8 中  $(u, v)$  平面上的相图可以发现, 在  $A_1=0.5$  时, 轨迹存在 6 种大幅振荡, 也即分别对应着 6 种形式的激发态, 而在  $A_1=2.0$  时, 轨迹存在 8 种形式的大幅振荡也即 8 种激发态. 为进一步说明两种簇发振荡之间的区别及图 8 簇发振荡机制, 图 9 给出了在  $(W, x)$  平面上的转换相图及其与相应快子系统平衡曲线的叠加图.

在慢变参数  $W$  的一个周期内, 由图 9(a) 可知轨迹也会运行一个周期, 说明两者之间的周期是一致的. 同时, 每一周期内的轨迹在  $(W, x)$  平面上组成 4 个滞后环, 分别由因 fold 分岔导致的跳跃轨迹与相关的平衡曲线围成. 说明在轨迹的每一周期内产生 8 个 fold 分岔, (参见图 9(b)), 从而导致 8 种相对大幅振荡的激发态, 同时, 轨迹的激发态均逐渐收敛于稳定平衡曲线, 并几乎严格沿其运动, 产生 8 种沉



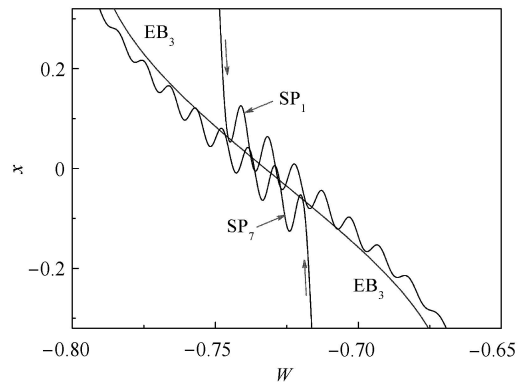
(a)  $(W, x)$  平面上的转换相图

(a) Transformed phase portrait on the  $(W, x)$  plane



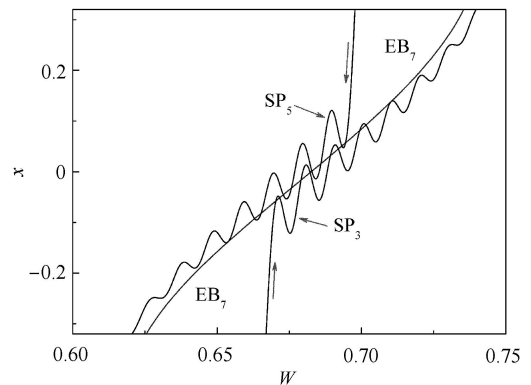
(b) 转换相图与平衡曲线的叠加图

(b) The overlap of equilibrium branches and transformed phase portrait on the  $(W, x)$  plane for  $A_1 = 2.0$



(c) (b) 中 I 处的局部放大图

(c) Locally enlarged part I of (b)



(d) (b) 中 II 处的局部放大图

(d) Locally enlarged part II of (b)

图 9  $A_1 = 2.0$  时的簇发振荡

Fig. 9 Bursting oscillations for  $A_1 = 2.0$

寂态. 也即该簇发振荡会分别在稳定平衡曲线  $EB_1, EB_3, EB_5, EB_7$  和  $EB_9$  上运动, 并由 fold 分岔引起轨迹在不同稳定平衡曲线之间的跳跃, 与  $A_1=0.5$  相

比, 此时稳定平衡曲线  $EB_1$  也参与簇发振荡的吸引子结构, 从而导致两者之间的差异. 同样地, 我们可以称该运动为周期 8-fold 型簇发振荡, 其几何结构为点-点-点-点-点型.

同时, 从图 9(c) 和图 9(d) 局部放大图中可以发现, 随着  $A_1$  的增大, 其在相应平衡曲线上的振荡时间延长, 经计算发现, 位于两相应稳定平衡曲线上平衡点特征值实部随  $A_1$  的增大会减小, 导致其向稳定平衡曲线的收敛速度减小. 另外, 由 fold 分岔导致的激发态可以用从分岔点向相应稳定平衡曲线的暂态过程来近似, 其振荡幅值的变化和振荡频率也可用相应平衡点特征值的实部和虚部来描述.

## 4 结 论

对于严格共振的多频激励系统, 可以通过适当变换, 将所有激励项表示为某一激励项的代数表达. 当激励频率远小于系统的固有频率时, 可以将该激励项作为慢变参数, 从而建立相应的快子系统和单一慢变量的慢子系统. 通过对快子系统的平衡点及分岔分析, 结合转换相图, 可以揭示不同簇发振荡的产生机制. 基于相对简单的模型, 本文应用上述方法得到了 3 种典型的簇发振荡, 并给出了其相应的产生机制. 由于快子系统的平衡曲线上仅存在 fold 分岔, 发现整个系统的轨线会随参数的不同, 沿不同稳定平衡曲线运动, 而 fold 分岔会导致轨迹在不同平衡曲线上的跳跃, 产生相应的激发态. 激发态可以用从分岔点向相应稳定平衡曲线的暂态过程来近似, 其振荡幅值的变化和振荡频率也可用相应平衡点特征值的实部和虚部来描述. 参与簇发振荡的平衡曲线分岔点越多, 其相应簇发振荡吸引子的结构也越复杂.

必须指出的是, 当系统中的各激励频率不存在严格共振关系, 同时激励频率远小于系统的固有频率时, 可以将激励频率与时间之积视为慢变量, 同样可以进行相关分析. 在这种情况下, 需要一系列的放大图才能将不同簇发振荡的机制描述清楚, 我们将另外讨论这种情形.

## 参 考 文 献

- Alexandrov DV, Bashkirtseva IA, Ryashko LB. Excitability, mixed-mode oscillations and transition to chaos in a stochastic ice ages model. *Physica D*, 2017, 343(15): 28-37
- 王帅, 于文浩, 陈巨辉等. 鼓泡流化床中流动特性的多尺度数值模拟. *力学学报*, 2016, 48(1): 585-592 (Wang Shuai, Yu Wenhao, Chen Juhui, et al. Multi-scale simulation on hydrodynamic characteristics in bubbling fluidized bed. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(1): 585-592 (in Chinese))
- Pereda E, Dm DLC, Mañas S, et al. Topography of EEG complexity in human neonates: effect of the postmenstrual age and the sleep state. *Neuroscience Letters*, 2006, 394(2): 152-157
- Bi QS. The mechanism of bursting phenomena in Belousov-Zhabotinsky (BZ) chemical reaction with multiple time scale. *Sci China-Technol Sci*, 2010, 53(1): 748-760
- 卓小翔, 刘辉, 楚锡华等. 非均质材料动力分析的广义多尺度有限元法. *力学学报*, 2016, 48(2): 378-386 (Zhuo Xiaoxiang, Liu Hui, Chu Xihua, et al. A generalized multiscale finite element method for dynamic analysis of heterogeneous material. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(2): 378-386 (in Chinese))
- Naidu DS. Analysis of non-dimensional forms of singular perturbation structures for hypersonic vehicles. *Acta Astronaut*, 2010, 66(1): 577-586
- 唐宇帆, 任树伟, 辛锋先等. MEMS 系统中微平板结构声振耦合性能研究. *力学学报*, 2016, 48(4): 907-916 (Tang Yufan, Ren Shuwei, Xin Fengxian, et al. Scale effect analysis for the vibroacoustic performance of a micro-plate. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(4): 907-916 (in Chinese))
- Sánchez AD, Izús GG, Dell'Erba MG, et al. A reduced gradient description of stochastic-resonant spatiotemporal patterns in a FitzHugh-Nagumo ring with electric inhibitory coupling. *Phys Lett A*, 2014, 378(22-23): 1579-1583
- 陈章耀, 张晓芳, 毕勤胜. 周期激励下 Hartley 模型的簇发及其分岔机制. *力学学报*, 2010, 42(4): 765-773 (Chen Zhangyao, Zhang Xiaofang, Bi Qinsheng. Bursting phenomena as well as the bifurcation mechanism in periodically excited Hartley model. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, 42(4): 765-773 (in Chinese))
- Butera Jr RJ, Rinzel J, Smith JC. Models of respiratory rhythm generation in the pre-Bötzinger complex. II. Populations of coupled pacemaker neurons. *J Neurophysiol*, 1999, 82(1): 398-415
- Cardin PT, Moraes JRD, Silva PRD. Persistence of periodic orbits with sliding or sewing by singular perturbation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, 423(2): 1166-1182
- Cao J, Huang DS, Qu Y. Global robust stability of recurrent neural networks. *Chaos Solitons and Fractals*, 2004, 23(1): 221-229
- Bear SM, Erneux T, Rinzel J. The slow passage through a Hopf bifurcation: delay, memory effects, and resonance. *SIAM J Appl Math*, 1989, 49(1): 55-71
- Ferrari FAS, Viana RL, Gomez F, et al. Macroscopic bursting in physiological networks: node or network property. *New Journal of Physics*, 2015, 17: 055024
- Rulkov NF. Regularization of synchronized chaotic bursts. *Phys Rev Lett*, 2001, 86(1): 183-186
- Wagenaar DA, Pine J, Potter SM. An extremely rich repertoire of bursting patterns during the development of cortical cultures. *BMC Neurosci*, 2006, 7(1): 1-18
- Izhikevich EM, Hoppensteadt F. Classification of bursting mapping. *Int J Bifurcat Chaos*, 2004, 14(11): 3847-3854

- 18 Simo H, Woaf P. Bursting oscillations in electromechanical systems. *Mechanics Research Communications*, 2011, 38(8): 537-547
- 19 Samoilenko AM, Parasyuk IO, Repeta BV. Dynamical bifurcation of multifrequency oscillations in a fast-slow system. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2015, 67(7): 1008-1037
- 20 Kingni ST, Keuninckx L, Woaf P, et al. Dissipative chaos, Shilnikov chaos and bursting oscillations in a three-dimensional autonomous system: theory and electronic implementation. *Nonlinear Dyn*, 2013, 73(1-2): 1111-1123
- 21 Tanaka H, Ushio T. Design of bursting in a two-dimensional discrete-time neuron model. *Phys Lett A*, 2004, 350(1): 228-231
- 22 张正娣, 毕勤胜. 自激作用下洛伦兹振子的簇发现象及其分岔机制. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43(4): 511-517 (Zhang Zhendi, Bi Qinsheng. Bursting phenomenon as well as the bifurcation mechanism of self-excited Lorenz system. *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2013, 43(4): 511-517 (in Chinese))
- 23 吴天一, 陈小可, 张正娣等. 非对称型簇发振荡吸引子结构及其机理分析. 物理学报, 2017, 66(11): 35-45 (Wu Tianyi, Chen Xiaoke, Zhang Zhengdi, et al. Structures of the asymmetrical bursting oscillation attractors and their bifurcation mechanisms. *Acta Phys Sin*, 2017, 66(11): 35-45 (in Chinese))
- 24 张晓芳, 陈小可, 毕勤胜. 快慢耦合振子的张弛簇发及其非光滑分岔机制. 力学学报, 2012, 44(1): 576-583 (Zhang Xiaofang, Chen Xiaoke, Bi Qinsheng. Relaxation bursting of a fast-slow coupled oscillation as well as the mechanism of non-smooth bifurcation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, 44(1): 576-583 (in Chinese))
- 25 Han XJ, Bi QS. Slow passage through canard explosion and mixed mode oscillations in the forced Van der Pol's equation. *Nonlinear Dyn*, 2012, 68(1-2): 275-283
- 26 邢雅清, 陈小可, 张正娣等. 多平衡态下簇发振荡产生机理及吸引子结构分析. 物理学报, 2016, 65(9): 1-9 (Xing Yaqing, Chen Xiaoke, Zhang Zhengdi, et al. Mechanism of bursting oscillations with multiple equilibrium states and the analysis of the structures of the attractors Structures of the asymmetrical bursting oscillation attractors and their bifurcation mechanisms. *Acta Phys Sin*, 2016, 65(9): 1-9 (in Chinese))
- 27 Mkaouar H, Boubaker O. Chaos synchronization for master slave piecewise linear systems: Application to Chua's circuit. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(1): 1292-1302
- 28 Dai H, Yue X, Xie D, et al. Chaos and chaotic transients in an aeroelastic system. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(26): 7267-7285