

轴向移动悬臂梁高效动力学建模及频率响应分析¹⁾

华洪良 廖振强²⁾ 张相炎

(南京理工大学机械工程学院, 南京 210094)

摘要 轴向移动梁动力学问题具有广泛的工程应用背景, 如: 机械手、机床主轴、武器身管等. 计算轴向移动梁动力学响应是评估结构动力学性能以及最终指导结构设计的一个重要手段. 采用 Rayleigh-Ritz 法、拉格朗日方程推导了轴向移动悬臂梁时变动力学方程. 选取幂级数函数构造试函数对轴向移动系统动力问题进行求解. 幂级数函数良好的积分与微分性能, 使得推导容易以矩阵的形式快速进行, 便于符号运算软件直接生成 MATLAB 程序. 由于 MATLAB 基本数据单位为矩阵, 符号软件生成的程序只需经过简单修改便可进行动力学计算. 大大缩短了轴向移动梁从建模到动力学分析的时间, 过程十分高效. 通过四组算例, 将本文方法计算得到的动力学响应与文献数据进行对比, 对该方法准确性进行了验证, 并给出了幂级数函数拟合阶数的选取原则. 以此为基础, 研究了轴向移动梁的频率响应特性. 分为考虑重力与忽略重力两种情况, 讨论了轴向振动幅度对其频率响应特性的影响.

关键词 计算动力学, 幂级数基函数, 频响分析, 轴向移动梁

中图分类号: O313 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-17-182

AN EFFICIENT DYNAMIC MODELING METHOD OF AN AXIALLY MOVING CANTILEVER BEAM AND FREQUENCY RESPONSE ANALYSIS¹⁾

Hua Hongliang Liao Zhenqiang²⁾ Zhang Xiangyan

(School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract The dynamics of the axially moving beam has wide application in engineering, such as robot manipulators, machine tools and gun barrel, et al. Computing the dynamic response of axially moving beam is an important method to evaluate the dynamic performance and finally the structure design. The time-varying motion equations of the axially moving cantilever beam are derived using the Rayleigh-Ritz method and Lagrange's equation. The power series function is used to construct the trial function to solve the dynamic problem. Due to the good integral and differential performance of power series function, the derivation is easy to be carried out in the form of matrix. In this way, the symbolic computation software can generate the MATLAB program directly. And the generated MATLAB program can be used to conduct the dynamic computation with few modifications, because the basic data unit of MATLAB is matrix. The overall process is efficiency and the time from dynamic modeling to computation is greatly reduced. Through four sets of numerical examples, the computational accuracy of the presented method is validated by comparing the dynamic responses with those from previous literatures. Then, the effects of fitting order of the power series function on computational accuracy are discussed. And the principle to select the fitting order of the power series function to achieve good convergence

2017-05-16 收稿, 2017-08-07 录用, 2017-08-10 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (51375241).

2) 廖振强, 教授, 主要研究方向: 自动武器发射动力学. E-mail: huahl123@126.com

引用格式: 华洪良, 廖振强, 张相炎. 轴向移动悬臂梁高效动力学建模及频率响应分析. 力学学报, 2017, 49(6): 1390-1398

Hua Hongliang, Liao Zhenqiang, Zhang Xiangyan. An efficient dynamic modeling method of an axially moving cantilever beam and frequency response analysis. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(6): 1390-1398

and computational accuracy is given. Based on the dynamic model, the effects of axial motion frequency on transverse vibration are studied. The effects of axial vibration amplitude on the frequency response characteristic are explored. And the difference between considering gravity and neglecting gravity effect are compared.

Key words computational dynamics, power series basis function, frequency response analysis, axially moving beam

引言

轴向移动动力系统具有广泛的工程应用背景, 常见的有: 机械手、机床主轴、武器身管^[1-3]、传送带^[4-6]、卫星结构等. 近年来, 轴向移动系统动力学是一研究热点. 由于动力响应在评估结构动力学性能以及最终结构设计中不可或缺, 因此, 一种快速、准确的建模与响应分析方法在轴向移动系统动力学研究过程中至关重要.

在轴向移动系统动力学研究中, 通常将轴向移动系统简化为轴向移动弦或轴向移动梁. 根据已有文献, 目前轴向移动系统动力学研究主要集中于如下几类问题: 轴向移动弹性梁与旋转刚性支撑的耦合动力学^[7-9], 轴向移动黏弹性梁 (或弦)^[10-14]、外流体轴向移动梁^[19-22]、含有摩擦边界的轴向移动梁^[23-24]、轴向移动梁的参数振动^[25-26]、轴向移动梁横向振动抑制技术研究^[27-28]、轴向与横向耦合振动研究^[29-31]等.

在轴向移动系统动力学建模过程中, 主要有两种方法. 第一种为分析力学方法^[7-10,29-30,32-35], 并且应用最为广泛的分析力学方法为第二类拉格朗日方程. 在该方法中, 首先采用能量法对系统进行能量分析, 得到相应的拉格朗日函数, 经离散后采用拉格朗日方程推导得到其运动方程. 第二种为弹性力学方法^[12,14-24,26-28,31,34,37]. 采用该方法时, 首先对研究对象取分离体进行受力分析, 得到其控制方程, 经离散后直接得到其运动方程.

在离散过程中, 两种主要的离散技术为有限单元法^[8-9,32-33,38]与假设模态法^[34-37]. 在假设模态法中, 需要一系列满足所有 (或者部分) 边界条件的基函数来构造一个试函数对原函数进行逼近. 在轴向移动梁控制方程离散过程中, 通常选取其振型函数来构造试函数. 梁的振型函数由一系列三角函数与双曲函数构成, 形式复杂, 其复杂程度取决于其具体边界条件. 在常见的边界条件中, 只有简支边界梁的振型函数相对简单, 而固支边界、自由边界、悬臂边界等梁的振型函数较复杂. 在建模过程中, 通常需要采用振型函数之间的正交性对方程进行解耦. 然

而, 由于梁的轴向运动, 在其动力学建模过程中会产生诸多不同于定常结构的陀螺项, 利用目前已知的模态函数正交性条件尚无法使这些陀螺项完全解耦^[39], 因此轴向移动梁动力学建模尚无统一方法.

基于上述因素, 本文尝试采用幂级数作为基函数构造试函数对轴向移动系统动力问题进行求解. 由于幂级数基函数具有较好的积分与微分性能, 更重要的是对任何两个基函数之间的正交性并不敏感. 这一特点, 使得积分演算变得非常迅速, 并且对于不同问题均很容易以矩阵的形式进行推导, 推导过程更为简洁. 采用矩阵形式的最主要优势在于: 能够采用符号运算软件推导并直接生成 MATLAB 程序. 由于 MATLAB 基本数据单位为矩阵, 符号软件生成的程序只需经过简单修改便可进行动力学计算. 这样大大缩短了轴向移动梁从建模到动力学分析的时间, 提高了效率.

本文主要工作:

(1) 基于欧拉梁理论, 首先推导了轴向移动梁动能与势能函数, 考虑时变轴向移动速度. 随后, 采用 Rayleigh-Ritz 法与幂级数基函数对系统动能与势能函数进行离散, 并通过拉格朗日方程推导得到系统运动方程.

(2) 将本文计算得到的动力学响应与相关文献数据进行比较, 对本文方法与模型的准确性进行验证. 并给出幂级数函数拟合阶数的选取原则.

(3) 研究轴向往复运动频率对横向振动的影响, 即频率响应分析 (身管武器应用背景). 分为考虑重力与忽略重力两种情况进行讨论.

1 动力学建模

考虑一轴向移动悬臂梁模型, 如图 1. 梁总长 L_B , 悬臂长 $L(t)$. 杨氏模量、惯性矩、密度、截面积分别为 E, I, ρ, A . 梁横向位移采用 $w(x(t), t)$ 进行描述.

梁上任意一点发生变形后, 其位移矢量为

$$\mathbf{R} = \begin{cases} [x(t) \ 0]^T, & x \in [-L_c(t), 0] \\ [x(t) \ w(x(t), t)]^T, & x \in [0, L(t)] \end{cases} \quad (1)$$

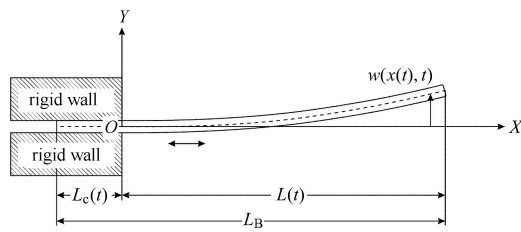


图 1 轴向移动悬臂梁
Fig. 1 Axially moving cantilever beam

将式 (1) 对时间求导得到速度矢量

$$\dot{\mathbf{R}} = \begin{cases} [\dot{x} \ 0]^T, & x \in [-L_c(t), 0] \\ [\dot{x} \ w'\dot{x} + \dot{w}]^T, & x \in [0, L(t)] \end{cases} \quad (2)$$

式中, 点和撇分别表示对时间、空间求偏导. 根据式 (2), 系统动能为

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_{-L_c}^L \dot{\mathbf{R}}^T \dot{\mathbf{R}} dx \quad (3)$$

梁弯曲变形产生的应变能为

$$U_s = \frac{1}{2} EI \int_0^L w''^2 dx \quad (4)$$

考虑梁轴向运动存在加速度, 其轴向惯性力产生的拉伸应变能为

$$U_a = -\frac{1}{2} \rho A \int_0^L (L-x) \ddot{x} w^2 dx \quad (5)$$

根据式 (3) ~ 式 (5), 得到系统拉格朗日函数

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho A \int_{-L_c}^L \dot{\mathbf{R}}^T \dot{\mathbf{R}} dx - \frac{1}{2} EI \int_0^L w''^2 dx - \frac{1}{2} \rho A \int_0^L (L-x) \ddot{x} w^2 dx \quad (6)$$

2 离散与运动方程

首先构造试函数

$$w = \mathbf{N}(x(t), t) \mathbf{q}(t) \quad (7)$$

对梁的横向位移进行离散. 式中

$$\mathbf{N}(x(t), t) = [N_1, N_2, \dots, N_n] \quad (8)$$

$$\mathbf{q}(t) = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \quad (9)$$

在式 (8) 中

$$N_i = \sum_{j=1}^{n_1+1} \alpha_{ji} x^{j-1}, \quad i \in [0, n] \quad (10)$$

为满足悬臂梁边界条件的幂级数函数. 式中, n_1 为幂级数函数阶数; α_{ji} 为幂级数函数系数, 确定 α_{ji} 的一个简易方法就是对悬臂梁振型函数进行拟合. 在拟合前, 首先将悬臂梁振型函数

$$\Phi_i = \frac{\cos \lambda_i + \text{ch} \lambda_i}{2 \text{sh} \lambda_i \sin \lambda_i} [\text{ch} \lambda_i x - \cos \lambda_i x - \frac{\text{sh} \lambda_i - \sin \lambda_i}{\text{ch} \lambda_i + \cos \lambda_i} (\text{sh} \lambda_i x - \sin \lambda_i x)] \quad (11)$$

映射至 1-1 空间. 式中, $\cos \lambda_i + \text{ch} \lambda_i / 2 \text{sh} \lambda_i \sin \lambda_i$ 为一系列幅值映射系数; λ_i 为特征方程 $\cos \lambda_i \text{ch} \lambda_i + 1 = 0$ 的根. 经过该映射后, 梁长度与自由端横向位移均被无量纲化为 1. 将梁长度映射为 1 后, 有利于后续缩放为梁实际悬臂长度进行动力学计算. 将梁自由端横向位移映射为 1 后, 结果后处理将变得十分简单, 梁自由端真实的横向位移即为各基函数坐标的和.

式 (10) 中幂级数系数可根据式 (11) 拟合得到. 对于自适应任意悬臂长度的基函数可以将式 (10) 沿 X 轴缩放得到

$$N_i = \sum_{j=1}^{n_1+1} \alpha_{ji} \left(\frac{x}{L(t)} \right)^{j-1} \quad (12)$$

将式 (7) 代入式 (6), 并将结果代入拉格朗日方程, 把重力作为广义力考虑, 得到系统运动方程

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = -\mathbf{f}_g \quad (13)$$

式中

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}_1 \quad (14)$$

$$\mathbf{C} = \dot{\mathbf{m}}_1 - \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \quad (15)$$

$$\mathbf{K} = \dot{\mathbf{c}}_2 - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 \quad (16)$$

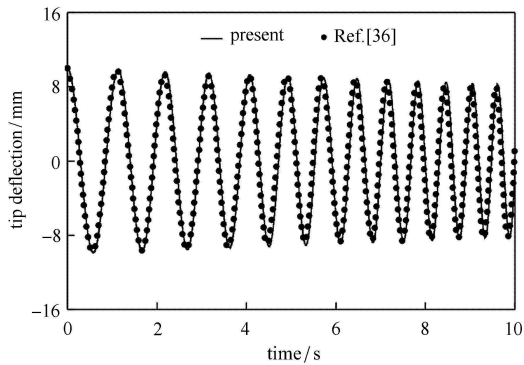
$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m}_1 &= \rho A \int_0^L (\mathbf{N}^T \mathbf{N}) dx \\ \mathbf{c}_1 &= \rho A \int_0^L (V_x \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}} + \dot{\mathbf{N}}^T \mathbf{N}) dx \\ \mathbf{c}_2 &= \rho A \int_0^L (V_x \mathbf{N}^T \mathbf{N}' + \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}}) dx \\ \mathbf{k}_1 &= \rho A \int_0^L (V_x^2 \mathbf{N}^T \mathbf{N}' + V_x \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{N}} + V_x \dot{\mathbf{N}}^T \mathbf{N}' + \dot{\mathbf{N}}^T \dot{\mathbf{N}}) dx \\ \mathbf{k}_2 &= EI \int_0^L (\mathbf{N}''^T \mathbf{N}'') dx \\ \mathbf{k}_3 &= \rho A \int_0^L (L-x) A_x \mathbf{N}^T \mathbf{N}' dx \\ -\mathbf{f}_g &= \rho A g \int_0^L \mathbf{N}^T dx \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

值得一提的是, 式 (13) 中 C 为梁弯曲变形与轴向运动产生的陀螺项, 而非结构阻尼. 并且, $V_x = \dot{x}$ 与 $A_x = \ddot{x}$ 分别为梁轴向运动速度与加速度. $V_x = V_0 + A_x t$, V_0 为初始速度. 由于式 (17) 为一系列幂级数函数乘积的积分运算, 很容易采用符号运算软件进行推导得到其代数格式, 并自动生成 MATLAB 程序.

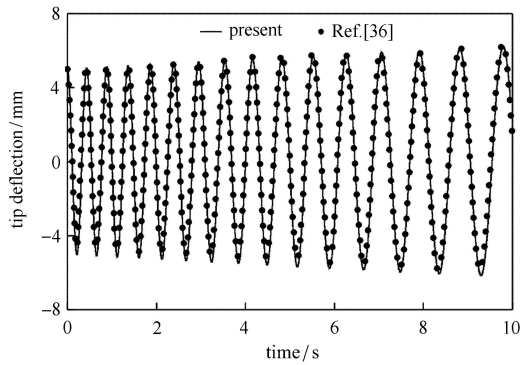
3 模型验证

本节采用 4 个算例对本文方法准确性进行验证. 前两个算例源于文献 [36], 在该算例中, 梁作轴向匀速运动. 后两个算例源于文献 [29], 算例中梁作轴向匀加速运动. 4 个算例中, 梁截面积、杨氏模型、惯性矩、密度均一致, 分别为 $1.4661 \times 10^{-3} \text{m}^2$, 6.8335N/m^2 , $1.1073 \times 10^{-8} \text{m}^4$, 2738.6kg/m^3 . 其余参数设置见表 1.

计算得到的梁自由端动力学响应与文献 [36] 和文献 [29] 对比见图 2 和图 3. 本文计算结果与文献结果吻合较好, 说明本文采取的方法以及建立的模型



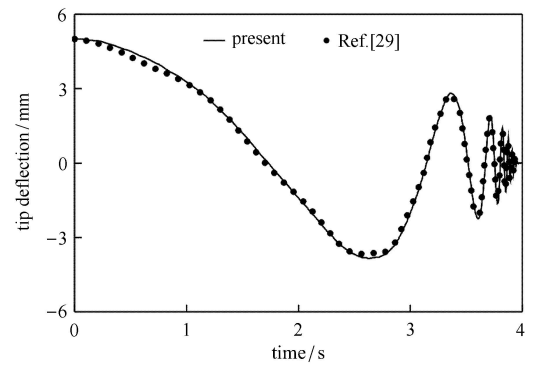
(a) 收缩运动
(a) Retracting motion



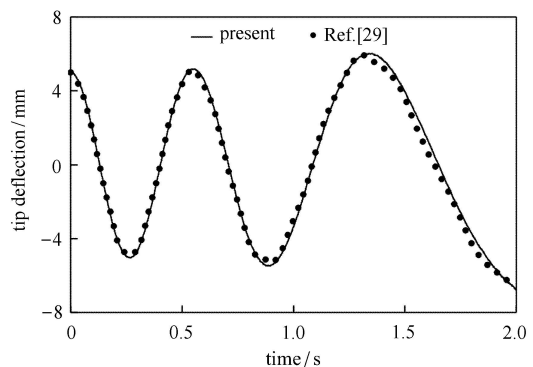
(b) 伸展运动
(b) Extruding motion

图 2 匀速收缩、伸展运动

Fig. 2 The retracting and extruding motion with constant velocity



(a) 收缩运动
(a) Retracting motion



(b) 伸展运动
(b) Extruding motion

图 3 匀加速收缩、伸展运动

Fig. 3 The retracting and extruding motion with constant acceleration

表 1 验证算例物理参数

Table 1 Physical parameters of the verification examples

Example No.	$V_0/$ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	$A_x/$ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)	$L_B/$ m	$L_0/$ m	$v(L_0, 0)/$ m	Figure No.
1	-0.1	0	3.657	3	10×10^{-3}	2(a)
2	0.1	0	3.657	1.8	5×10^{-3}	2(b)
3	0	-1	10	8	5×10^{-3}	3(a)
4	0	1	10	2	5×10^{-3}	3(b)

准确可靠.

4 幂级数基函数拟合阶数的影响

第 2 节中, 幂级数函数拟合阶数 n_1 的大小将直接决定幂级数基函数的拟合精度, 并最终影响到动力学计算精度. 本节主要讨论幂级数拟合阶数对动力学计算精度的影响.

根据式 (11), 采用 MATLAB 软件编程, 在计算域内对各振型函数均匀采样, 本文采用 500 个样本点. 然后根据得到的样本点以及给定的拟合阶数, 采

用 polyfit 函数便可拟合得到幂级数函数系数 α_{ji} . 为了给出拟合阶数的选取原则, 采用幂级数函数的最大相对拟合误差作为量化指标

$$e = \frac{\max |N_i - \Phi_i|}{|\Phi_i|} \times 100 \quad (18)$$

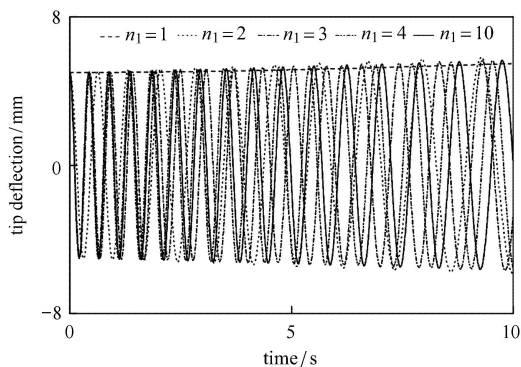
需要说明的是, 笔者在研究过程中发现在多数情况下, 细长悬臂梁结构动力响应主要取决于其一阶模态. 因此, 本节只讨论第一阶模态拟合阶数对动力学计算精度的影响. 通过计算, 在表 2 中给出了拟合阶数为 1 至 10 范围内的最大相对拟合误差. 对比发现, 随着拟合阶数的增大, 幂级数函数的最大相对拟合误差逐渐减小.

表 2 最大相对拟合误差

Table 2 The maximum relative fitting error

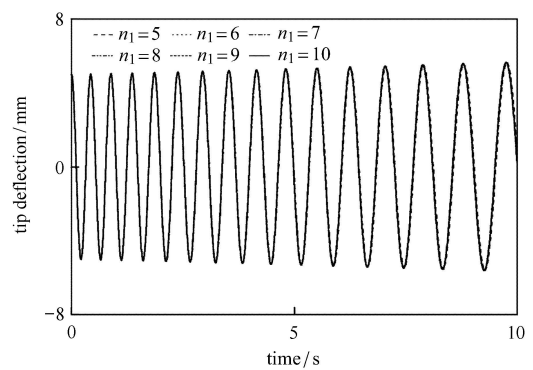
Fitting order	The maximum relative fitting error/%
1	19.539 000 000
2	6.317 500 000
3	0.335 000 000
4	0.087 900 000
5	0.003 400 000
6	0.000 523 080
7	0.000 012 523
8	0.000 001 726
9	0.000 000 036
10	0.000 000 004

随后, 以第 3 节算例 2 为例, 分别采用不同拟合阶数的幂级数函数进行动力学计算, 得到梁自由端位移响应曲线对比如图 4. 以 10 阶拟合精度的幂级数函数计算得到的动力学响应曲线为参考进行对比研究. 图 4(a) 表明, 当拟合阶数在 1 至 4 阶范围内时, 动力学计算产生了较大的误差. 尤其是当拟合阶



(a) 1~4 阶响应比较

(a) Dynamic responses comparison of 1 to 4 order



(b) 5~9 阶响应比较

(b) Dynamic responses comparison of 5 to 9 order

图 4 幂级数函数拟合阶数对动力学计算精度的影响

Fig. 4 The effect of fitting order of the power series function on computational accuracy

数为 1 时, 计算得到的响应曲线根本无法反应梁的真实振动情况. 这是因为采用一阶幂级数函数时, 式 (17) 中 N'' 对空间 X 求导两次后为零, 相当于结构刚度消失. 当拟合阶数增加至 5 阶及其以上后, 响应曲线与 10 阶响应曲线基本吻合, 差异很小. 因此, 为了保证动力学计算精度, 应采用至少 5 阶幂级数函数进行拟合. 由表 2 可知, 5 阶幂级数函数对应的最大相对拟合误差为 0.003 4%. 因此, 笔者建议在选取幂级数函数拟合阶数时, 应将其最大相对拟合误差控制在千分之一以内.

5 频响分析

本节讨论轴向振动频率对梁横向振动的影响. 其工程应用背景为武器浮动身管. 很多身管武器在设计过程中, 为了减小后坐力, 经常将其身管设计为浮动形式, 使得身管在发射过程中能够沿着枪 (炮) 身做前后相对运动, 吸收一部分后坐动能. 武器连续发射过程中, 身管不停地做轴向往复运动, 使得膛口横向振动受到扰动. 由于身管的射击精度直接于弹头出膛口瞬时膛口的振动状态. 因此, 研究此类振动系统的频响特性对匹配身管武器系统动力学特性、避免结构共振具有重要意义.

在研究频响特性时, 使轴向移动梁做轴向简谐运动, 其悬臂长度、轴向速度、加速度由下式给出

$$\left. \begin{aligned} L(t) &= L_0 - A_{mp} \sin(2\pi\omega t) \\ V_x(t) &= -2\pi\omega A_{mp} \cos(2\pi\omega t) \\ A_x(t) &= 4\pi^2\omega^2 A_{mp} \sin(2\pi\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

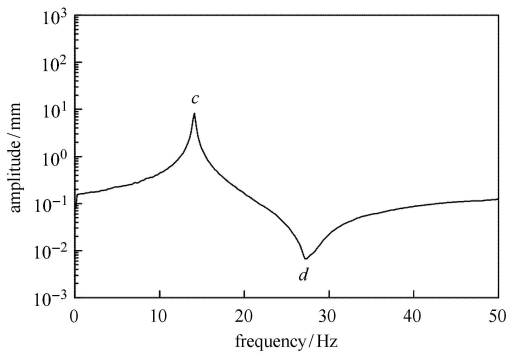
式中, L_0 表示梁平均悬臂长度; A_{mp} 和 ω 分别表示简谐运动幅值与频率. 算例所用参数设置如表 3.

表 3 算例参数
Table 3 Example parameters

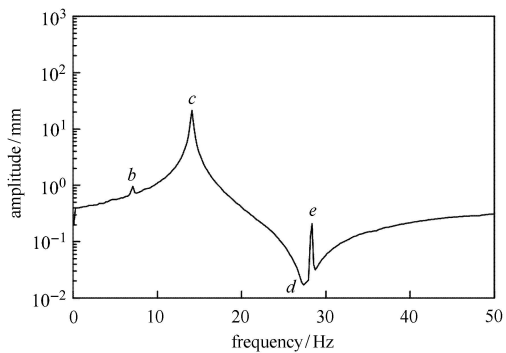
Physical parameters	Value
A/m^2	3.1416×10^{-4}
E/Pa	2×10^{11}
I/m^4	7.85×10^{-9}
$\rho/(kg \cdot m^{-3})$	7900
A_{mp}/mm	10/25/50/100
ω/Hz	0~50
L_0/m	1

5.1 考虑重力影响

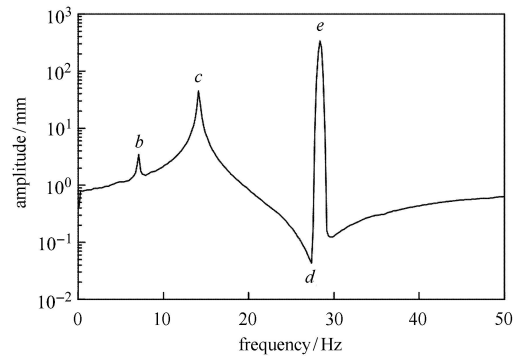
图 5 给出了不同轴向振动幅值下的梁自由端频率响应特性曲线. 从图 5 可以发现, 轴向振动幅值越大, 幅频响应曲线中特殊频率点越多. 当轴向运动幅值为 10 mm 时 (图 5(a)), 幅频响应曲线中只有 c 和 d 两个特殊频率点. 当轴向运动幅值增加至 100 mm 时, 幅频响应曲线中共出现了 5 个特殊频率响应点, 如图 5(d), 各频率值见表 4.



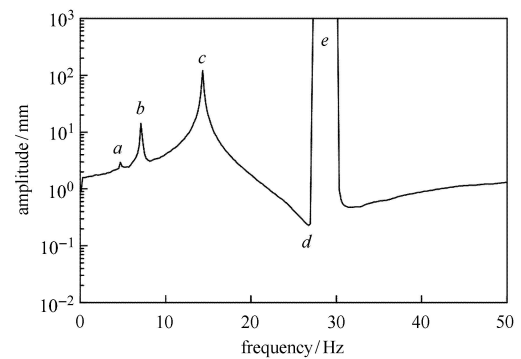
(a) $A_{mp} = 10$ mm



(b) $A_{mp} = 25$ mm



(c) $A_{mp} = 50$ mm



(d) $A_{mp} = 100$ mm

图 5 轴向移动梁频率响应特性 (考虑重力)

Fig. 5 Frequency response characteristic of the axially moving beam (considering gravity)

表 4 各频率响应点频率值 (Hz)

Table 4 Frequency of each response point (Hz)

Vibration amplitude/mm	Frequency response points				
	a	b	c	d	e
10	-	-	14.13	27.23	-
25	-	7.07	14.13	27.35	28.36
50	-	7.1	14.13	27.35	28.36
100	4.7	7.1	14.32	26.76	28.36

当梁轴向振动频率由频率点 c 向频率点 d 靠近过程中, 梁横向振动幅度逐渐减小, 并在频率点 d 达到最小值. 因此, 在往复轴向运动系统动力学设计过程中, 匹配其轴向振动频率使其尽可能接近 d 频率点, 能够有效减小横向振动, 改善系统动力性能.

然而, 需要注意的是 d 频率点会因梁轴向振动幅度而变得不稳定, 见图 5(b) ~ 图 5(d). 随着梁轴向振动幅度的增加, 在频率曲线中 d 频率点附近会出现 e 频率点, 该频率点为不稳定频率点. 当梁在 e 频率点做轴向振动时, 梁横向振动幅度迅速增加并失稳, 如图 5(d). 并且, e 频率点频带宽度会随着梁横

向振动幅度的增大而增大,对梁的横向振动十分不利.避免 e 频率点出现的一个有效方法就是调整梁轴向振动幅度.

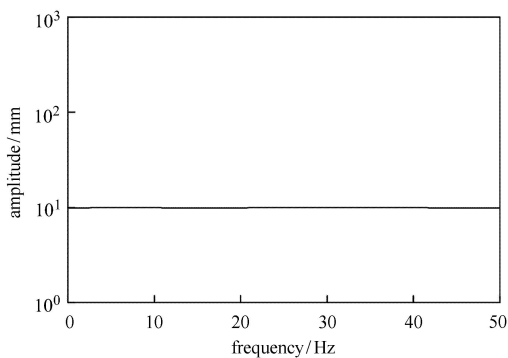
笔者发现,在重力作用下,各频率点频率值分布有一定规律性:梁平均悬臂长度对应的第一阶模态频率为 14.07 Hz, a, b, e 频率点频率值分别分布在梁第一阶模态频率的 1/3, 1/2, 2 倍处附近.因此,在轴向运动系统动力学设计过程中,不仅要使轴向振动频率避开一阶模态频率.在轴向振动幅值较大的情况下,避开一阶模态频率的 1/3, 1/2, 2 倍频率值也是必要的.

5.2 忽略重力影响

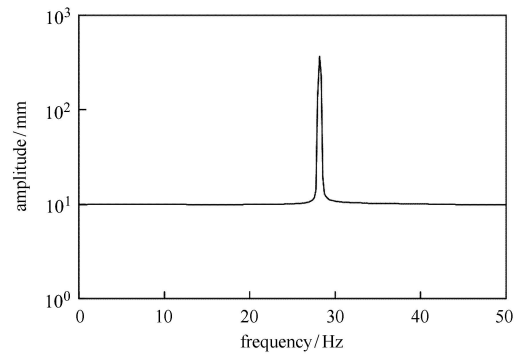
将重力加速度 g 设为 0,则可忽略重力对梁横向振动的影响.同样分析不同轴向振动幅值下的梁频率响应特性,结果见图 6.

对比图 5 与图 6 可以发现,忽略重力影响后,梁的频率响应特性变得相对简单.当梁轴向振动幅度较小时,轴向运动频率对梁的横向振动影响很小,如图 6(a).随着梁轴向振动幅度的增大,频响曲线在 28.36 Hz 附近出现共振峰(即 5.1 节中 e 频率点),使系统失稳.梁轴向振动幅度越大, e 频率点共振带宽越大,这一现象与文献 [33] 得出的结论一致.

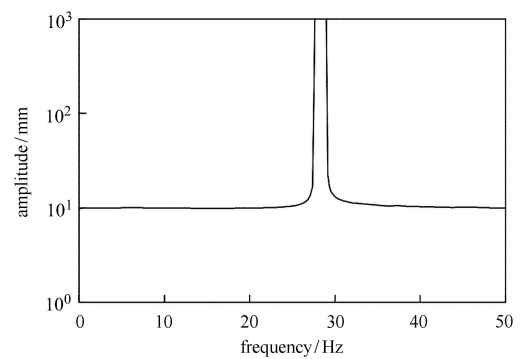
关于轴向运动梁的稳定性,主要是由于式 (15) 中的 C 为一陀螺项,其符号受到梁运动方向的影响,即:梁做伸展运动时, C 符号为正,具有阻尼效应,能够耗散系统能量使系统获得稳定.当梁做收缩运动时, C 符号为负,收缩运动过程中梁会从固定边界处吸收能量,使系统处于不稳定运动状态,甚至失稳.关于轴向运动梁的稳定性详细讨论,可参考文献 [32].



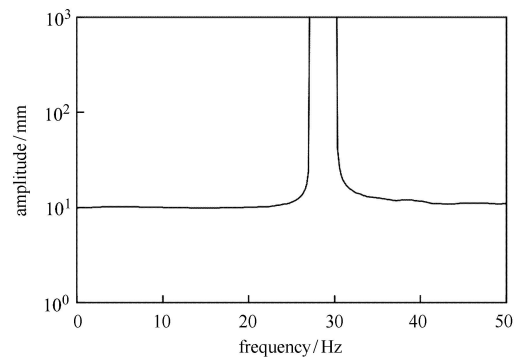
(a) $A_{mp} = 10 \text{ mm}$



(b) $A_{mp} = 25 \text{ mm}$



(c) $A_{mp} = 50 \text{ mm}$



(d) $A_{mp} = 100 \text{ mm}$

图 6 轴向移动梁频率响应特性(忽略重力)

Fig. 6 Frequency response characteristic of the axially moving Beam (neglecting gravity)

6 结论

本文采用 Rayleigh-Ritz 法、拉格朗日方程推导了轴向移动悬臂梁时变动力学方程.与以往离散方法不同的是,本文选取幂级数函数构造试函数对轴向移动系统动力问题进行求解.由于幂级数基函数具有较好的积分与微分性能,这一特点使积分运算变得非常迅速,并且很容易以矩阵的形式进行推导,

并可以采用符号运算软件直接生成 MATLAB 程序。由于 MATLAB 基本数据单位为矩阵, 符号软件生成的程序只需经过简单修改便可进行动力学计算。这样大大缩短了轴向移动梁从建模到动力学分析的时间, 过程十分高效。相关算例对比表明, 本文采取的方法与建立的模型准确可靠。

通过建立的时变动力学方程对梁的轴向共振问题进行了研究, 得到如下结论:

(1) 在选取幂级数函数拟合阶数时, 应将其最大相对拟合误差控制在千分之一以内, 以保证较好的动力学计算精度。

(2) 轴向振动幅值越大, 幅频响应曲线中特殊频率点越多, 并且容易导致系统失稳。同时, 失稳频率宽度越大。

(3) 考虑重力影响时, 会在梁一阶模态频率值的 $1/3$ 、 $1/2$ 、 2 倍处附近产生共振峰。共振峰峰值随着轴向振动幅度的增加而增加。忽略重力影响, 即梁在水平面内的振动, 梁的频率响应特性相对简单, 只在梁一阶模态频率值的 2 倍处附近出现系统失稳。

参 考 文 献

- Gimm HI, Cha KU, Cho CK. Characterizations of gun barrel vibrations of during firing based on shock response analysis and short-time Fourier transform. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2012, 26(5): 1463-1470
- Hua HL, Liao ZQ, Song JE. Vibration reduction and firing accuracy improvement by natural frequency optimization of a machine gun system. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2015, 29(9): 3635-3643
- 刘宁, 杨国来. 移动质量作用下轴向运动悬臂梁振动特性分析. 振动与冲击, 2012, 31(3): 102-105 (Liu Ning, Yang Guolai. Vibration property analysis of an axially moving cantilever beam with the effect of a moving mass. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, 31(3): 102-105 (in Chinese))
- Suweken G, Van Horssen WT. On the transversal vibrations of a conveyor belt with a low and time-varying velocity. Part II: The beam-like case. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 267(5): 1007-1027
- Pakdemirli M, Oz HR. Infinite mode analysis and truncation to resonant modes of axially accelerated beam vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 311(3-5): 1052-1074
- Ponomareva SV, van Horssen WT. On the transversal vibrations of an axially moving continuum with a time-varying velocity: Transient from string to beam behavior. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 325(4): 959-973
- Al-Bedoor BO, Khulief YA. Vibrational motion of an elastic beam with prismatic and revolute joints. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 190(2): 195-206
- Al-Bedoor BO, Khulief YA. Finite element dynamic modeling of a translating and rotating flexible link. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 1996, 131(1): 173-189
- Al-Bedoor BO, Khulief YA. General planar dynamics of a sliding flexible link. *Journal of Sound & Vibration*, 1997, 206(5): 641-661
- Lee U, Oh H. Dynamics of an axially moving viscoelastic beam subject to axial tension. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(8): 2381-2398
- 丁虎, 陈立群. 轴向运动黏弹性梁平面耦合非线性受迫振动. 上海大学学报 (自然科学版), 2009, 15(6): 649-652, 658 (Ding Hu, Chen Liqun. Coupled forced response of nonlinear axially moving viscoelastic beam. *Journal of Shanghai University (Natural Science Edition)*, 2009, 15(6): 649-652, 658 (in Chinese))
- 丁虎, 胡超荣, 陈立群等. 轴向变速黏弹性 Rayleigh 梁非线性参数振动稳态响应. 振动与冲击, 2012, 31(5): 135-138 (Ding Hu, Hu Chaorong, Chen Liqun, et al. Steady state response of nonlinear vibration of an axially accelerating viscoelastic Rayleigh beam. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, 31(5): 135-138 (in Chinese))
- Marynowski K. Dynamic analysis of an axially moving sandwich beam with viscoelastic core. *Composite Structures*, 2012, 94(9): 2931-2936
- 唐有绮. 轴向变速黏弹性 Timoshenko 梁的非线性振动. 力学学报, 2013, 45(6): 965-973 (Tang Youqi. Nonlinear vibrations of axially accelerating viscoelastic Timoshenko beams. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 45(6): 965-973 (in Chinese))
- Zhao FQ, Wang MM. Vibration analysis of an axially moving viscoelastic beam. *Materials, Mechanical Engineering and Manufacture*, Pts 1-3, 2013, 268(270): 1177-1181
- 丁虎, 严巧赞, 陈立群等. 轴向加速运动黏弹性梁受迫振动中的混沌动力学. 物理学报, 2013, (20): 78-84 (Ding Hu, Yan Qiaoyun, Chen Liqun, et al. Chaotic dynamics in the forced nonlinear vibration of an axially accelerating viscoelastic beam. *Acta Physica Sinica*, 2013, (20): 78-84 (in Chinese))
- Lü HW, Li YH, Li L, et al. Transverse vibration of viscoelastic sandwich beam with time-dependent axial tension and axially varying moving velocity. *Applied Mathematical Modelling*, 2014, 38(9-10): 2558-2585
- 王冬梅, 张伟, 李慕荣等. 用微分求积法分析轴向移动黏弹性梁的非平面非线性振动. 动力学与控制学报, 2015, (1): 23-27 (Wang Dongmei, Zhang Wei, Li Murong, et al. Using DQM to analyze the nonplanar nonlinear vibrations of an axially moving viscoelastic beam. *Journal of Dynamics and Control*, 2015, (1): 23-27 (in Chinese))
- Lin W, Qiao N. Vibration and stability of an axially moving beam immersed in fluid. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45(5): 1445-1457
- Ni Q, Li MW, Tang M, et al. Free vibration and stability of a cantilever beam attached to an axially moving base immersed in fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(9): 2543-2555
- Li MW, Ni Q, Wang L. Nonlinear dynamics of an underwater slender beam with two axially moving supports. *Ocean Engineering*, 2015, 108: 402-415
- Yan H, Ni Q, Dai HL, et al. Dynamics and stability of an extending beam attached to an axially moving base immersed in dense fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 383: 364-383

- 23 Spelsberg-Korspeter G, Kirillov ON, Hagedorn P. Modeling and stability analysis of an axially moving beam with frictional contact. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 2008, 75(3): 031001-10
- 24 Guo XX, Wang ZM. Thermoelastic Coupling vibration characteristics of the axially moving beam with frictional contact. *Journal of Vibration and Acoustics-Transactions of the ASME*, 2010, 132(5): 051010-7
- 25 Zheng P, Yang TZ, Yang XD, et al. An approximate analytical solution of an axially moving beam subjected to harmonic and parametric excitations simultaneously. *Proceedings of First International Conference of Modelling and Simulation*, 2008, 5: 340-345
- 26 Yan QY, Ding H, Chen LQ. Nonlinear dynamics of axially moving viscoelastic Timoshenko beam under parametric and external excitations. *Applied Mathematics and Mechanics-English Edition*, 2015, 36(8): 971-984
- 27 Wang L, Chen HH, He XD. Active H-infinity control of the vibration of an axially moving cantilever beam by magnetic force. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, 25(8): 2863-2878
- 28 Zhang YW, Zhang Z, Chen LQ, et al. Impulse-induced vibration suppression of an axially moving beam with parallel nonlinear energy sinks. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 82(1): 61-71
- 29 Ghayesh MH, Kazemirad S, Amabili M. Coupled longitudinal-transverse dynamics of an axially moving beam with an internal resonance. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 52: 18-34
- 30 Park S, Yoo HH, Chung J. Vibrations of an axially moving beam with deployment or retraction. *AIAA Journal*, 2013, 51(3): 686-696
- 31 Yang XD, Zhang W. Nonlinear dynamics of axially moving beam with coupled longitudinal-transversal vibrations. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(4): 2547-2556
- 32 Stylianou M, Tabarrok B. Finite element analysis of an axially moving beam, Part I: time integration. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 178(4): 433-453
- 33 Chang JR, Lin WJ, Huang CJ, et al. Vibration and stability of an axially moving Rayleigh beam. *Applied Mathematical Modelling*, 2010, 34(6): 1482-1497
- 34 Ghayesh MH, Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of an axially moving Timoshenko beam with an intermediate spring support. *Mechanism and Machine Theory*, 2013, 67: 1-16
- 35 Park S, Chung JT. Dynamic analysis of an axially moving finite-length beam with intermediate spring supports. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(24): 6742-6759
- 36 Oz HR, Pakdemirli M, Boyaci H. Non-linear vibrations and stability of an axially moving beam with time-dependent velocity. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2001, 36(1): 107-115
- 37 Al-Bedoor BO, Khulief YA. An approximate analytical solution of beam vibrations during axial motion. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 192(1): 159-171
- 38 Matsuzaki Y. Vibration of a cantilevered beam during deployment and retrieval: analysis and experiment. *Smart Materials & Structures*, 1998, 4(4): 334-339
- 39 Zhang H, Chen L. Vibration of an axially moving string supported by a viscoelastic foundation. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2016, 29(3): 221-231