

求解一类可分离凸规划的对偶显式模型 DP-EM 方法¹⁾

隋允康^{*,2)} 彭细荣^{†,3)}

^{*}(北京工业大学工程数值模拟中心, 北京 100022)

[†](湖南城市学院土木工程学院, 湖南益阳 413000)

摘要 推导对偶目标函数的精确显式表达式, 可选用更多成熟高效的求解方法, 从而进一步提高了非线性规划对偶理论求解结构拓扑优化问题的效率. 研究工作来源于非线性凸规划同其对偶规划的间隙为零, 可以等价转化为对偶问题求解, 通常可以大大地缩小问题的规模, 可是二者不具有显式关系却影响了对偶解法的应用. 所幸的是, 结构优化当中一大类问题包括连续体结构拓扑优化问题, 不仅具有凸性, 而且具有变量可分离性, 于是原变量和对偶变量之间有了显式关系, 因此, 对偶解法成了 38 年来被应用的有效方法之一. 然而长期以来, 对偶问题的目标函数并不是显式, 这缘于含参数的极小化问题导致目标函数为隐式表达, 常见的显式化方法是进行二阶近似. 本文突破了对偶问题难以显式化只能采用近似显式的定势, 将我们提出的“对偶规划-显式模型”(DP-EM) 方法应用于连续体结构拓扑优化, 并与对偶序列二次规划 (DSQP) 算法及移动渐近线 (MMA) 算法为求解器的方法进行计算效率对比, 结果显示: (1) MMA 算法比 DP-EM 算法和 DSQP 算法的外部迭代次数均多; (2) DP-EM 算法与 DSQP 算法外循环次数相同, 而内循环数显著减少. 说明了 DP-EM 算法具有显式对偶函数的优势.

关键词 对偶目标显式模型化, 可分离凸规划, 结构拓扑优化, 对偶序列二次规划方法, 移动渐近线方法

中图分类号: O343.1 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-17-176

A DUAL EXPLICIT MODEL BASED DP-EM METHOD FOR SOLVING A CLASS OF SEPARABLE CONVEX PROGRAMMING¹⁾

Sui Yunkang^{*,2)} Peng Xirong^{†,3)}

^{*}(Numerical Simulation Center for Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

[†](School of Civil Engineering, Hunan City University, Yiyang 413000, Hunan, China)

Abstract An explicit exact formula is derived for the objective function of the dual model of a class of separable convex programming problems. It makes more mature and efficient methods can be chose to solve the dual model. Therefore, the advantage of applying the duality theory of nonlinear programming to efficiently solve structural topology optimization problems is fully exploited. The research work is rooted in that the gap of a nonlinear convex programming with its dual programming is zero. Solving original programming can be equivalently transformed into solving its dual programming.

2017-05-13 收稿, 2017-08-15 录用, 2017-08-17 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (11672103) 和湖南省自然科学基金 (2016JJ6016) 资助项目.

2) 隋允康, 教授, 主要研究方向: 结构优化. E-mail: ysui@bjut.edu.cn

3) 彭细荣, 副教授, 主要研究方向: 结构优化. E-mail: pxx568@163.com

引用格式: 隋允康, 彭细荣. 求解一类可分离凸规划的对偶显式模型 DP-EM 方法. 力学学报, 2017, 49(5): 1135-1144

Sui Yunkang, Peng Xirong. A dual explicit model based DP-EM method for solving a class of separable convex programming. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(5): 1135-1144

The scale of the solved programming can usually be reduced greatly. But an explicit relationship is not existed between the original programming and dual programming has affected the application of the dual solution algorithm. Fortunately, the programming models of a large class of structural optimization problems, including the continuum topology optimization, are convex and separable. And an explicit relationship between the original variables and their dual variables is existed; therefore, the dual solution algorithm has become one of the effective methods for 38 years. However, the objective function of the dual problem is not explicit for a long time. It is because the dual problem is a parametric minimization problem which leads to the objective function is expressed as an implicit expression. The common explicit expression for the dual objective function is a two-order approximation. The regular thinking tendency that the dual problem is too difficult to be expressed explicitly and can only be expressed approximately is breakthrough. A dual programming explicit model (DP-EM) method is put forward for the topology optimization of continuum structures. Comparison of computational efficiency among the DP-EM method, the dual sequential quadratic program (DSQP) method and the method of moving asymptotes (MMA) is presented. The results showed that: (1) more external iterations are needed for the MMA algorithm than the DP-EM algorithm and DSQP algorithm; (2) same external iterations are needed for the DP-EM algorithm and DSQP algorithm, but internal iterations is less for the DP-EM method. It shows the advantage of the DP-EM algorithm due to its explicit dual function.

Key words explicit dual objective function, separable convex programming, structural topology optimization, dual sequential quadratic program method, method of moving asymptotes

引言

结构拓扑优化已经提出了大量的研究方法,比如均匀化方法^[1]、变密度法^[2]、ICM法^[3]、进化结构优化方法^[4]、水平集法^[5]、相场法^[6]及拓扑导数法^[7-8]等,综述文献可参考 Sigmund等^[9]及 Joshua等^[10],专著有 Bendsoe等^[11]的变密度法及隋允康等^[12]的 ICM法等.从优化模型的角度看,多数方法建立的数学模型归结为非线性规划问题,可以采用基于非线性规划理论的各种求解算法,其中也包括数学规划对偶理论的相关解法^[13].早在结构拓扑优化之前的结构截面优化研究中,对偶规划解法就已经被关注,最典型的是 1979 年 Fleury 发表的工作,把凸规划的对偶规划解法作为新方法介绍到结构优化领域,并且用于求解桁架截面优化问题^[14].

较之含很多约束条件的原问题,对偶问题只含有非负对偶变量条件,称为拟无约束规划,只要稍微修正一下,无约束规划的寻优算法就可以应用,这是该方法的优势.美中不足的是,对偶目标函数只是隐函数形式,然而,却可以求出其一阶导数和二阶导数的数值表达式.因此, Fleury 在文献 [14] 中介绍了寻优的一阶算法和二阶算法,二者都是无约束规划寻优的“上升算法”(即反向的“下降算法”).

钱令希团队于 1980 年就论证了求解结构桁架截面优化原问题和对偶问题的等价性^[15],并且指出:

由于对偶问题变量的维数等于原问题的约束个数,通常会大大地缩小优化的规模,因此建议按对偶问题求解,然后通过 Kuhn-Tucker 条件建立原变量与对偶变量之间的显式关系,得到原问题的最优解.在对偶问题求解时,用 Lemke 算法或其他算法直接求解拟无约束的二次规划形式的对偶问题,较之 Fleury 采用的“上升算法”,二次规划算法简洁、方便和可靠.

在钱令希团队的一系列工作^[3,15-20]中,文献 [15-17] 阐发了桁架结构优化运用对偶问题求解的理论和方法,文献 [18] 将截面优化问题的对偶解法从文献 [14-17] 的杆单元推广到杆、膜、梁单元的组合格式,文献 [3] 则进一步推广到杆、膜、板、壳、梁单元的复杂组合格式,而且文献 [18] 和文献 [3] 分别把只适合杆单元^[14-17]的对偶函数的二阶导数公式做了相应的推广,文献 [19-20] 聚焦在二次规划,介绍了该团队的一系列工作:原问题的二次化、对偶问题的二次化、正定几何规划的二次化和缩并几何规划二次化.

隋允康从 1995 年就指导博士生和硕士生开始了结构拓扑优化 ICM 法的研究,限于篇幅,本文只列出相关的 4 篇文献^[21-24],其他研究者如龙凯等也用过 ICM 法^[25].ICM 方法建立优化模型后,都是将原问题转为对偶问题求解.原因在于:对偶变量的个

数是原问题的有效约束数目, 因而对偶问题的设计变量维数极大地降低, 以连续体多位移约束的结构拓扑优化为例, 假如有 10 000 个单元, 4 个载荷工况下 3 点位移约束, 实际有效约束最多只有 12 个, 亦即最多 12 个对偶变量, 而原问题却有 10 000 个原变量. 其中的奥妙就在于 Kuhn-Tucker 条件成为原变量与对偶变量之间显式关系的桥梁, 从而大幅度地提高了求解效率.

基于 ICM 方法建立的优化模型, 同结构截面优化的研究类似, 难以求解出对偶目标函数的显式表达式, 只得转而求其一阶导数和二阶导数, 进而建立二次近似函数形式的对偶目标函数, 形成对偶序列二次规划 (DSQP) 方法的求解算法^[3,12], 取得了很好的求解效率. 由于长期以来采用 DSQP 方法求解, 加上对偶目标函数依然是一个含参数的极小化问题, 因而形成了不求对偶问题的目标函数显式的定势.

本文从结构优化所建立的数学规划模型的特点出发, 针对一大类常见的变量可分离的凸规划问题, 突破了只是停留在对偶目标二阶近似的定势, 推导得出了显式的对偶目标函数. 在这一研究的基础上, 提出了便捷求解的 DP-EM(dual programming - explicit model) 方法, 并将其应用于求解连续体结构的拓扑优化问题. 本文将 DP-EM 方法与基于 DSQP 算法及 MMA 算法^[26]的方法进行计算效率对比, 结果显示 DP-EM 方法具有更高的求解效率.

1 对偶目标函数的显式化导致 DP-EM 方法

对于下列非线性规划

$$\left. \begin{array}{l} \text{Find } \mathbf{x} \in E^N \\ \text{Make } F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N a_i x_i^\alpha \rightarrow \min \\ \text{s.t. } G_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N b_{ij} x_i^{-\beta} - \bar{g}_j \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, M \\ \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \alpha, \beta \geq 1 \end{array} \right\} \quad (1)$$

满足凸规划的条件. $\mathbf{x}$ 为设计变量向量, N 为设计变量数目, $F(\mathbf{x})$ 为目标函数, $G_j(\mathbf{x})$ 为不等式约束函数, M 为约束数目, $\underline{x}_i$ 及 $\bar{x}_i$ 为设计变量上下限, a_i , b_{ij} , α 及 β 分别为目标函数及约束函数中的系数及指数.

式 (1) 的拉格朗日函数为

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^N a_i x_i^\alpha + \sum_{j=1}^M \lambda_j \left(\sum_{i=1}^N b_{ij} x_i^{-\beta} - \bar{g}_j \right) \quad (2)$$

其中 λ_j 为拉格朗日乘子. 原问题 (1) 的对偶问题为

$$\left. \begin{array}{l} \text{Find } \boldsymbol{\lambda} \in E^M \\ \text{make } \varphi(\boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max \\ \text{s.t. } \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, M \end{array} \right\} \quad (3)$$

其中

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i} (L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})) \quad (4)$$

式 (4) 的 Kuhn-Tucker 条件为

$$\left. \begin{array}{l} \alpha a_i x_i^{\alpha-1} - \beta \sum_{j=1}^M \lambda_j b_{ij} x_i^{-\beta-1} \\ \left\{ \begin{array}{l} < 0 & (x_i^* = \bar{x}_i) \\ = 0 & (\underline{x}_i < x_i^* < \bar{x}_i) \\ > 0 & (x_i^* = \underline{x}_i) \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (5)$$

上式中 3 种情况的变量集合分别为上被动变量集 $\bar{I}_a$ 、主动变量集 I_a 和下被动变量集 $\underline{I}_a$. 由式 (5) 解出

$$x_i^* = \begin{cases} \bar{x}_i & (i \in \bar{I}_a) \\ \left(\frac{\beta}{\alpha a_i} \sum_{j=1}^M \lambda_j b_{ij} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} & (i \in I_a) \\ \underline{x}_i & (i \in \underline{I}_a) \end{cases} \quad (6)$$

将式 (6) 代入式 (4) 得

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^N a_i (x_i^*)^\alpha + \sum_{j=1}^M \lambda_j \left(\sum_{i=1}^N b_{ij} (x_i^*)^{-\beta} - \bar{g}_j \right) \quad (7)$$

下面的工作是设法将式 (7) 的表达式适当转化, 从而将 $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ 显式化. 为此, 将式 (6) 代入式 (5), 其中, 主动变量有下式

$$\frac{\alpha}{\beta} a_i (x_i^*)^\alpha \equiv \sum_{j=1}^M \lambda_j b_{ij} (x_i^*)^{-\beta} \quad (i \in I_a) \quad (8)$$

对于 $i \in I_a$ 求和, 得

$$\frac{\alpha}{\beta} \sum_{i \in I_a} a_i (x_i^*)^\alpha \equiv \sum_{i \in I_a} \sum_{j=1}^M \lambda_j b_{ij} (x_i^*)^{-\beta} \quad (9)$$

由式(9)可得

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \lambda_j b_{ij} (x_i^*)^{-\beta} - \sum_{i \in \bar{I}_a} \sum_{j=1}^M \lambda_j b_{ij} (\bar{x}_i)^{-\beta} - \sum_{i \in \bar{I}_a} \sum_{j=1}^M \lambda_j b_{ij} (\underline{x}_i)^{-\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i \in \bar{I}_a} a_i (x_i^*)^\alpha \quad (10)$$

亦即

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \lambda_j b_{ij} (x_i^*)^{-\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i \in \bar{I}_a} a_i (x_i^*)^\alpha + \sum_{i \in \bar{I}_a} \sum_{j=1}^M \lambda_j b_{ij} (\bar{x}_i)^{-\beta} + \sum_{i \in \bar{I}_a} \sum_{j=1}^M \lambda_j b_{ij} (\underline{x}_i)^{-\beta} \quad (11)$$

将式(11)代入式(7),得

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) = L(x^*, \lambda) = & \sum_{i \in \bar{I}_a} a_i (x_i^*)^\alpha + \sum_{i \in \bar{I}_a} a_i (\bar{x}_i)^\alpha + \sum_{i \in \bar{I}_a} a_i (\underline{x}_i)^\alpha + \\ & \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i \in \bar{I}_a} a_i (x_i^*)^\alpha + \sum_{i \in \bar{I}_a} \sum_{j=1}^M \lambda_j b_{ij} (\bar{x}_i)^{-\beta} + \\ & \sum_{i \in \bar{I}_a} \sum_{j=1}^M \lambda_j b_{ij} (\underline{x}_i)^{-\beta} - \sum_{j=1}^M \lambda_j \bar{g}_j = \\ & -\psi(\lambda) + \text{const} \end{aligned} \quad (12)$$

其中, x_i^* 按式(6)用 λ 表达, 于是有

$$\psi(\lambda) = \sum_{j=1}^M \lambda_j \left(\bar{g}_j - \sum_{i \in \bar{I}_a} b_{ij} (\bar{x}_i)^{-\beta} - \sum_{i \in \bar{I}_a} b_{ij} (\underline{x}_i)^{-\beta} \right) - \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i \in \bar{I}_a} a_i \left(\frac{\beta}{\alpha a_i} \sum_{j=1}^M \lambda_j b_{ij} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \quad (13)$$

$$\sum_{i \in \bar{I}_a} a_i (\bar{x}_i)^\alpha + \sum_{i \in \bar{I}_a} a_i (\underline{x}_i)^\alpha = \text{const} \quad (14)$$

根据式(12), 对偶规划式(3)可以转化为等价的如下规划

$$\left. \begin{aligned} & \text{Find } \lambda \in E^M \\ & \text{make } \psi(\lambda) \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

注意式(15)具有显式目标函数式(13), 此规划在联合式(6)的情况下, 可以在原问题的凸规则的前提下, 得到原问题(1)的解. 上述在理论上是完整的,

用于结构优化的实际问题, 只是多了一个建立优化模型的工作.

由于结构优化模型是近似的, 建模伴随着求解, 是一个大循环的迭代过程. 另外, 式(6)依赖于上被动变量集 $\bar{I}_a$ 、主动变量集 I_a 和下被动变量集 $\underline{I}_a$, 在式(15)与式(6)的交替计算中, 若变量集有变动, 则每一轮大循环中出现小循环的过程.

鉴于每轮建模中, 结构分析与敏度分析的昂贵, 与建模得到 b_{ij} ($i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M$) 构造式(13), 然后求解规划(15), 代回式(6)得到一个解, 而不做小循环相比, 采用小循环要好得多, 可以充分利用好昂贵的模型.

至于规划(15)在显式(13)下的求解方法, 比以往规划的SQP解法可以有更多的选择, 不仅二次规划方法, 还可以利用其他无约束优化方法, 例如最速下降法、共轭梯度法、牛顿法、拟牛顿法(变尺度法)、信赖域法等等. 尽管存在一个对偶变量非负约束, 每次算出的 λ_j 只要为负值, 就可以修正为0. 此文中采用了MATLAB优化工具箱中的fmincon函数求解规划(15).

上述是针对一类变量可分离凸规划问题的建立模型和求解算法, 为了便于表述, 称之为“对偶规划-显式模型”(dual programming-explicit model, DP-EM)方法.

2 DP-EM方法对于连续体结构拓扑优化的应用

以重量极小化受位移约束的连续体结构拓扑优化为例, 应用ICM法建立拓扑优化模型, 采用幂函数形式的过滤函数, 单元重量及单元刚度用过滤函数识别

$$w_i = (t_i)^\alpha w_i^0, \quad k_i = (t_i)^\beta k_i^0 \quad (16)$$

其中, w_i 及 k_i 为单元重量及单元刚度阵, w_i^0 及 k_i^0 为单元固有重量及单元固有刚度阵. $f_w(t_i) = (t_i)^\alpha$ 及 $f_k(t_i) = (t_i)^\beta$ 分别为单元重量及单元刚度的幂函数形式过滤函数, 本文取 $\alpha = 1$ 及 $\beta = 3$.

结构总重量可表达为

$$w_i = \sum_{i=1}^N (t_i)^\alpha w_i^0 \quad (17)$$

其中 N 表示单元拓扑设计变量的总数.

利用莫尔定理位移可表达为

$$u_j = \sum_{i=1}^N \frac{(t_i^{(k)})^\beta}{(t_i)^\beta} [(u_{ij}^V)^T F_i^R]^{(k)} = \sum_{i=1}^N \frac{(t_i^{(k)})^\beta A_{ij}}{(t_i)^\beta} = \sum_{i=1}^N \frac{c_{ij}}{(t_i)^\beta} \quad (18)$$

其中 $t_i^{(k)}$ 为第 k 步迭代时单元 i 对应的拓扑变量值, u_{ij}^V 及 F_i^R 为单元 i 在第 j 个位移对应单位虚工况下的单元节点位移向量及在实工况下的单元节点力向量, $j = 1, 2, \dots, J$, $J = L \times R$ 为优化模型中位移约束条件总数, L 为工况数, R 为定义的位移约束总数. $A_{ij} = [(u_{ij}^V)^T F_i^R]^{(k)}$ 定义为第 k 次迭代时单元 i 对位移 j 的贡献系数, $c_{ij} = (t_i^{(k)})^\beta A_{ij}$ 为位移 j 的约束近似方程系数.

用 ICM 法建立的拓扑优化模型表示为

$$\left. \begin{aligned} & \text{Find } \mathbf{t} \in E^N \\ & \text{Make } W = \sum_{i=1}^N (t_i)^\alpha w_i^0 \rightarrow \min \\ & \text{s.t. } \sum_{i=1}^N \frac{c_{ji}}{(t_i)^\beta} \leq \bar{u}_j \\ & \quad \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, J) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_N)^T$ 是单元拓扑设计变量向量 $\bar{u}_j$ 表示第 j 号位移约束的上限. 此模型与式 (1) 相同, 不同之处只是设计变量 $\mathbf{x}$ 用拓扑设计变量 $\mathbf{t}$ 表达而已.

3 程序实现和算例比较

式 (19) 的结构拓扑优化问题即式 (1) 形式的可分离变量非线性规划, 为了比较不同数学规划求解算法的效率, 编制了 3 种求解方法的程序: 本文提出的 DP-EM 方法对应的求解算法, 以往的 DSQP 算法和移动渐近线 (MMA) 算法. DP-EM 算法及 DSQP 算法采用自编的 MATLAB 函数, MMA 算法采用文献 [13] 所公布的 MATLAB 代码.

3 种算法的收敛准则采取连续二次迭代的最大设计变量差值小于设定的收敛精度

$$\Delta = \max(|t_i^{(k+1)} - t_i^{(k)}|) \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

其中收敛精度 ε 在此文中取 0.005.

连续体结构拓扑优化存在棋盘格现象及网格依赖等数值不稳定问题, 除此数值不稳定问题的一类典型方法是过滤法 [9]. 本文采用对位移贡献系数 A_{ij} 进行过滤处理的方法 [22].

为了验证本文方法的正确性, 采用网上公布的 88 行编码的连续体结构拓扑优化程序的优化结果, 作为算例进行比较 [27]. 不过, 文献 [27] 求解的是体积约束下结构柔顺度极小问题, 而本文求解的是位移约束下体积极小问题.

如何把 88 行程序的结果作为本文的算例? 首先用 88 行程序算出一个最优拓扑构型结果, 把其中拟作为位移约束点的位移作为算例的约束位移值, 然后用本文的三种方法进行计算; 最后把算例与文献 [27] 的结果对比看最后的拓扑构型是否相同.

算例 1: MBB 梁拓扑优化

MBB 梁拓扑优化, 基结构宽高比为 6:1, 无量纲集中载荷 $F=2$ 作用于跨中顶点, 左、右下角分别为铰支及滑动铰支约束, 材料无量纲弹性模量 $E=1$, 泊松比 0.3. 取一半结构进行分析, 计算简图如图 1 所示, 采用 60×20 , 150×50 及 300×100 三种网格进行计算.

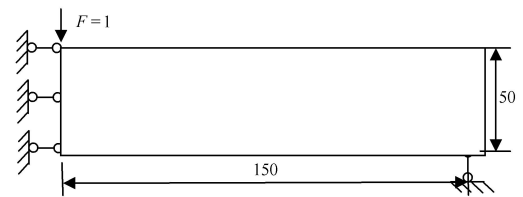


图 1 150×50 网格 MBB 梁问题取一半结构进行分析及优化时模型定义

Fig. 1 Half of structure for analysis and optimization of the MBB beam with 150×50 mesh

采用与文献 [27] 相同的数据, 保留体积比 0.5, 采用敏感度过滤, 过滤半径为基结构高度的 0.12 倍, SIMP 方法的惩罚因子取 $p=3$, 收敛精度分别取 0.01 及 0.005. 采用 150×50 网格按 88 行程序计算出来的体积约束下结构柔顺度极小化的最优拓扑图形如图 2 所示, 两种精度下得到的最优拓扑图形相同, 对应的最优目标函数值分别为 219.52 及 219.57, 相差很小. 其中收敛精度为 0.01 时的结果与文献 [27] 是相同的.

收敛精度为 0.005 时对应的最优结构在力作用方向的位移值为 219.57, 以此位移值作为此算例位移约束下重量极小化问题中的位移约束值.

(a) 收敛精度 0.01, 目标值 $c = 219.52$

(a) Convergence precision takes 0.01, the value of the objective function

 $c = 219.52$ (b) 收敛精度 0.005, 目标值 $c = 219.57$

(b) Convergence precision takes 0.005, the value of the objective function

 $c = 219.57$

图 2 150×50 网格时文献 [27] 中 88 行代码得到的最优拓扑

Fig. 2 Optimal topologies obtained by the 88 lines of codes in the reference [27] for 150×50 mesh

不取收敛精度 0.01 对应的位移值作为约束, 是考虑到 MMA 算法在此精度下得不到最优拓扑. 当收敛精度取 0.01 时, 不同方法得到的离散前的最优拓扑结构对比如表 1 所示, DP-EM 算法及 DSQP 算法得到的最优拓扑相同, 也与 88 行程序得到的最优拓扑相同, 但与 MMA 算法得到的最优拓扑不相同. 当收敛精度取 0.005 时, 三种方法得到的最优拓扑均相同, 如表 2 所示. 离散后最优拓扑如表 3 所示. MMA 算法需要设定更高的收敛精度才能得到最优拓扑, 其在收敛精度为 0.01 时得到的拓扑并不是最优拓扑, 而 DP-EM 算法及 DSQP 算法在低精度下即

表 1 算例 1 不同求解算法离散前的最优拓扑结构对比 (收敛精度 0.01)

Table 1 Comparison of optimal topologies obtained by different algorithms before discrete for the example 1 (convergence precision takes 0.01)

Mesh	DP-EM DSQP	MMA
60×20		
150×50		
300×100		

表 2 算例 1 不同求解算法离散前的最优拓扑结构对比 (收敛精度 0.005)

Table 2 Comparison of optimal topologies obtained by different algorithms before discrete for the example 1 (convergence precision takes 0.005)

Mesh	DP-EM DSQP	MMA
60×20		
150×50		
300×100		

表 3 算例 1 不同求解算法离散后的最优拓扑结构对比 (收敛精度 0.005)

Table 3 Comparison of optimal topologies obtained by different algorithms before discrete for the example 1 (convergence precision takes 0.005)

Mesh	DP-EM DSQP	MMA
60×20		
150×50		
300×100		

得到了最优拓扑, 表现出了算法有更好的寻优能力.

收敛精度为 0.005 时不同算法求解效率对比如表 4 所示. DP-EM 算法及 DSQP 算法外循环迭代次数相同, 均明显少于 MMA 算法, 如图 3 所示. 而内循环次数 DP-EM 算法比 DSQP 算法显著减少, DP-EM 每次内循环迭代 3 次或 4 次, 而 DSQP 算法每次内循环迭代 10 次左右, 如图 4 所示, 可见通过对偶函数的显式化, 可更快更好地得到对偶变量的最优解, 从而显著地减少内循环次数.

此外, MMA 算法随着单元数目 (即设计变量数目) 的增加, 迭代次数增加, 而 DP-EM 算法与 DSQP 算法则变化不大. 所以, 对大规模问题, DP-EM 算法与 DSQP 算法的效率比 MMA 算法显著提升.

表 4 算例 1 不同求解算法求解效率对比 (收敛精度 0.005)

Table 4 Comparison of the solution efficiencies of different algorithms for the example 1 (convergence precision takes 0.005)

Mesh	Algorithms	V/V0	Displacement constraint	Iteration
60×20	DP-EM	42.08%	219.477	193 (963)
	DSQP	42.08%	219.477	193 (2313)
	MMA	42.17%	219.283	445
150×50	DP-EM	42.33%	219.468	197 (985)
	DSQP	42.33%	219.468	197 (2364)
	MMA	42.45%	219.300	517
300×100	DP-EM	42.65%	219.532	196 (1016)
	DSQP	42.65%	219.532	196 (2352)
	MMA	42.52%	219.443	1259

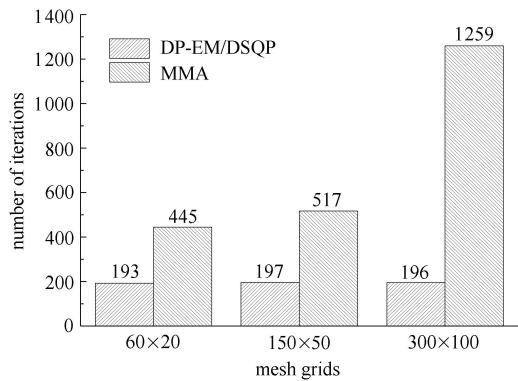


图 3 DP-EM 及 DSQP 与 MMA 迭代次数比较

Fig. 3 Comparison of the iterations for DP-EM, DSQP and MMA

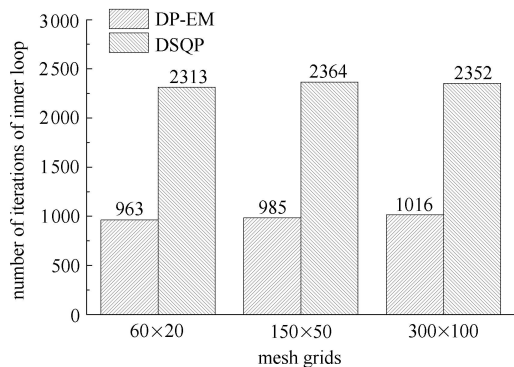


图 4 DP-EM 与 DSQP 内循环迭代次数比较

Fig. 4 Comparison of the iterations of the internal loops for the DP-EM and DSQP

算例 2：多工况多位移约束拓扑优化问题^[27]

一正方形平板结构如图 5 所示，载荷工况有 2 种，工况 1 为一集中载荷 $F_1 = 1$ 竖直向上作用于右上角；工况 2 为一集中载荷 $F_2 = 1$ 竖直向下作用于右下角。平板左边界固定约束，材料弹性模量 $E = 1$ ，泊松比 0.3。采用 75×75 、 150×150 及 300×300 三种网格进行计算。

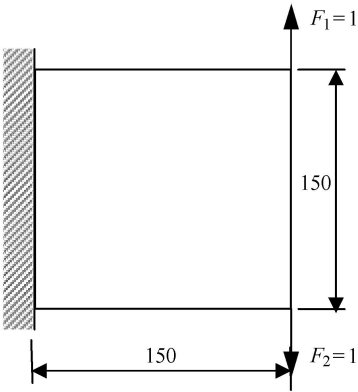
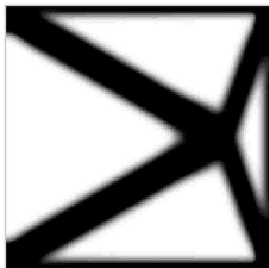


图 5 150×150 网格正方形平板拓扑优化问题定义

Fig. 5 Definition of the topology optimization problem of a square plate with 150×150 mesh

采用与文献 [27] 相同的数据，两个工况柔顺度采用 0.5 的权重进行加权组合成单一柔顺度目标，保留体积比 0.4，采用敏度过滤，过滤半径为基结构设计的 0.04 倍，SIMP 方法的惩罚因子取 $p = 3$ ，收敛精度分别取 0.01 及 0.005。采用 150×150 网格按 88 行程序计算出来的体积约束下结构柔顺度极小化的最优拓扑图形如图 6 所示，两种精度下得到的最优拓扑图形不相同，对应的最优目标函数值分别为 69.20 及 68.83，目标函数值相差很小，但拓扑图形相差很大。其中收敛精度为 0.01 时的结果与文献 [27] 是相同的，但显然，这一精度下得到的并非最优拓扑图形。因而，此算例的比较对象取收敛精度为 0.005 时的结果，对应的最优结构在两工况下集中力作用方向的位移值均为 34.42，以此位移值作为此算例重量极小化问题中的位移约束值，即位移约束 F_1 及 F_2 作用方向位移小于 34.42。

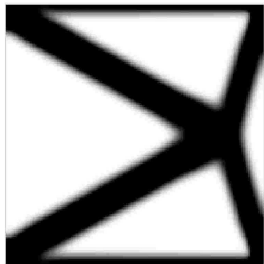
三种求解算法在收敛精度为 0.005 时得到的最优拓扑相同，与 88 行程序计算在收敛精度 0.005 时的最优拓扑形式相同，如表 5 所示。不同算法求解效率对比如表 6、图 7 及图 8 所示，外循环迭代次数 DP-EM 算法及 DSQP 算法相同，均比 MMA 算法少，



(a) 收敛精度 0.01, 目标值 $c = 69.20$

(a) Convergence precision takes 0.01, the value of the objective

function $c = 69.20$



(b) 收敛精度 0.005, 目标值 $c = 68.83$

(b) Convergence precision takes 0.005, the value of the objective

function $c = 68.83$

图 6 150×150 网格时文献 [27] 中 88 行代码得到的最优拓扑
Fig. 6 Optimal topologies obtained by the 88 lines of codes in the Ref.
[27] for 150×150 mesh

表 5 算例 2 不同求解算法最优拓扑结构对比
Table 5 Comparison of optimal topologies obtained by different
algorithms for the example 2

Mesh	DP-EM DSQP	MMA
75×75		
150×150		
300×300		

表 6 算例 2 不同求解算法求解效率对比

Table 6 Comparison of the solution efficiencies of different
algorithms for the example 2

Mesh	Algorithms	V/V0	Displacement constraint	Iteration
75×75	DP-EM	33.64%	34.403 -34.403	111 (638)
	DSQP	33.64%	34.403 -34.403	111 (1314)
	MMA	33.64%	34.414 -34.414	202
150×150	DP-EM	35.06%	34.396 -34.396	106 (612)
	DSQP	35.06%	34.396 -34.396	106 (1261)
	MMA	34.96%	34.395 -34.395	166
300×300	DP-EM	36.74%	34.386 -34.386	112 (652)
	DSQP	36.74%	34.386 -34.386	112 (1335)
	MMA	36.71%	34.396 -34.396	197

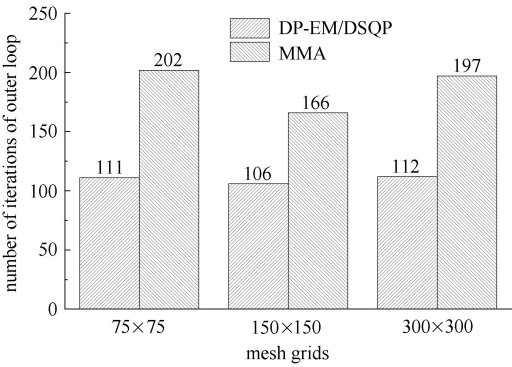


图 7 DP-EM 及 DSQP 与 MMA 迭代次数比较

Fig. 7 Comparison of the iterations for DP-EM, DSQP and MMA

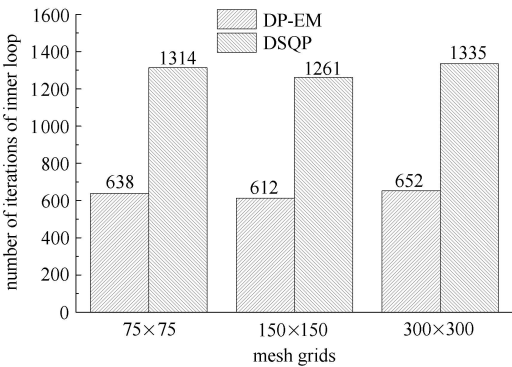


图 8 DP-EM 与 DSQP 内循环迭代次数比较

Fig. 8 Comparison of the iterations of the internal loops for the DP-EM
and DSQP

但没有算例 1 中差别那么大. 而内循环次数 DP-EM 算法明显比 DSQP 算法少.

4 结 论

针对可分离变量的凸规划问题, 本文推导了其对应目标函数的显式表达式, 并提出了对应的 DP-EM 方法及其求解算法, 付诸连续体结构拓扑优化问题, 取多工况位移约束下重量目标极小化问题编程, 将 DP-EM 算法与 DSQP 算法及 MMA 算法进行了效率对比.

(1) 在所有算例的计算中, 三种算法皆与文献 [15] 的最后构型相同, 表明本文的方法及其程序通过了验证.

(2) DP-EM 算法与 DSQP 算法相比外循环次数相同, 是由于其求解的是同一数学规划模型, 只是优化求解器不同. DP-EM 算法的内循环数显著少于 DSQP 算法, 显示了 DP-EM 算法得到显式对偶函数的优势, 而 DSQP 算法应用二阶近似迭代逼近的目标函数, 故计算效率逊色.

(3) MMA 算法比 DP-EM 算法和 DSQP 算法的外部迭代次数亦即结构分析次数多, 是因为 MMA 算法仅利用了原优化模型的目标函数及约束函数的一阶敏度信息, 近似程度比较低.

(4) 从科学研究方法论看, 获得准确的显式模型优于近似的逼近模型, 而能够做到的首要条件是突破“不可能做”的思维定势, 从而别开生面地走出自己的路径. 进一步拓宽 DP-EM 方法的工作正在进行, 研究结果将会陆续发表.

参 考 文 献

- 1 Bendsoe MP, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 69: 197-224
- 2 Mlejnek HP. Some aspects of the genesis of structures. *Structural Optimization*, 1992, 5: 64-69
- 3 隋允康. 建模·变换·优化——结构综合方法新进展. 大连: 大连理工大学出版社, 1996 (Sui Yunkang. Modelling, Transformation, and Optimization – New Developments of Structural Synthesis Method. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1996 (in Chinese))
- 4 Xie YM, Steven GP. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Comput Struct*, 1993, 49: 885-896
- 5 Osher S, Sethian J. Fronts propagating with curvature dependent speed-algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J Comput Phys*, 1988, 79(1): 12-49
- 6 Bourdin B, Chambolle A. Design-dependent loads in topology optimization. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2003, 9(8): 19-48
- 7 Eschenauer HA, Kobelev VV, Schumacher A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization*, 1994, 8(1): 42-51
- 8 Norato J, Bendsoe M, Haber R, et al. A topological derivative method for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 33(4-5): 375-386
- 9 Sigmund O, Maute K. Topology optimization approaches—A comparative review. *Structural Multidisciplinary Optimization*, 2013, 48(6): 1031-1055
- 10 Joshua DD, Ramana VG. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: Post 2000. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, 49: 1-38
- 11 Bendsoe M P, Sigmund O. Topology Optimization: Theory, Methods and Applications. New York: Springer Berlin Heidelberg, 2003
- 12 隋允康, 叶红玲. 连续体结构拓扑优化的 ICM 方法. 北京: 科学出版社, 2013 (Sui Yunkang, Ye Hongling. Continuum Topology Optimization Methods ICM. Beijing: Science Press, 2013 (in Chinese))
- 13 Bazaraa MS, Shetty CM. Nonlinear Programming, Theory and Algorithms. [s.l.] John Wiley & Sons, 1979
- 14 Fleury C. Structural weight optimization dual method of convex programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1979, 14(12): 1761-1783
- 15 钱令希, 钟万勰, 隋允康等. 多单元、多工况、多约束的结构优化程序系统 DDDU. 大连工学院学报, 1980, 19 (4): 1-17 (Qian Lingxi, Zhong Wanxie, Sui Yunkang, Zhang Jindong. Optimum design of structures with multiple types of element under multiple loading cases and multiple constraints- program system DDDU. *Journal of Dalian Institute of Technology*, 1980, 19 (4): 1-17 (in Chinese))
- 16 Qian LX, Zhong WX, Sui YK, et al. Efficient optimum design of structures program DDDU. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1982, 30 (2): 209-224
- 17 钱令希. 工程结构优化设计. 北京: 水利电力出版社, 1983 (Qian Lingxi. Optimization Design for Engineering Structures. Beijing: Water Conservancy and Electric Power Press, 1983 (in Chinese))
- 18 隋允康, 钟万勰, 钱令希. 杆-膜-梁组合结构优化的 DDDU-2 程序系统. 大连工学院学报, 1983, 22 (1): 21-36 (Sui Yunkang, Zhong Wanxie, Qian Lingxi. Optimum design of structures composed of bars-membranes-beams program system DDDU-2. *Journal of Dalian Institute of Technology*, 1983, 1: 21-36 (in Chinese))
- 19 钱令希, 钟万勰, 程耿东等. 工程结构的序列二次规划. 固体力学学报, 1983, 22(4): 469-480 (Qian Lingxi, Zhong Wanxie, Cheng Gengdong, et al. Sequential quadratic programming approach in engineering structural optimization. *Acta Mechanica Sinica*, 1983, 22(4): 469-480 (in Chinese))
- 20 Qian LX, Zhong WX, Cheng GD, et al. An approach to structural optimization - SQP (sequential quadratic programming). *Engineering Optimization*, 1984, 1(8): 83-100
- 21 隋允康, 杨德庆, 孙焕纯. 统一骨架与连续体的结构拓扑优化的 ICM 理论与方法. 计算力学学报, 2000, 1(17): 28-33 (Sui Yunkang, Yang Deqing, Sun Huanchun. Uniform ICM theory and

- method on optimization of structural topology for skeletal and continuum structures. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2000, 1(17): 28-33 (in Chinese))
- 22 隋允康, 彭细荣. 结构拓扑优化 ICM 方法的改善. 力学学报, 2005, 37(2): 190-198 (Sui Yunkang, Peng Xirong. The improvement for the ICM method of structural topology optimization. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 37(2): 190-198 (in Chinese))
- 23 隋允康, 宣东海, 尚珍. 连续体结构拓扑优化的高精度逼近 ICM 方法. 力学学报, 2011, 43(4): 716-724 (Sui Yunkang, Xuan Donghai, Shang Zhen. ICM method with high accuracy approximation for topology optimization of continuum structures. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 43(4): 716-724 (in Chinese))
- 24 叶红玲, 沈静娴, 隋允康. 频率约束的三维连续体结构动力拓扑优化设计. 力学学报, 2012, 44(6): 1037-1045 (Ye Hongling, Shen Jingxian, Sui Yunkang. Dynamic topological optimal design of three-dimensional continuum structures with frequency constraints. *Acta Mechanica Sinica*, 2012, 44(6): 1037-1045 (in Chinese))
- 25 龙凯, 王选, 韩丹. 基于多相材料的稳态热传导结构轻量化设计. 力学学报, 2017, 49(2): 359-366 (Long Kai, Wang Xuan, Han Dan. Structural light design for steady heat conduction using multi-material. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(2): 359-366 (in Chinese))
- 26 Svanberg K. Method of moving asymptotes – a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(2): 359-373
- 27 Andreassen E, Clausen A, Lazarov BS, et al. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. *Structural Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43(1): 1-16