固体力学

半无限板边缘裂纹的权函数解法与评价[1)]

童第华　吴学仁[2)]　胡本润　陈　勃

(北京航空材料研究院，北京 100095)

摘要　权函数法是求解裂纹体在任意受载条件下的应力强度因子和裂纹面位移等断裂力学参量的高效、高精度方法，与有限元等数值方法相比, 在求解效率和可靠性方面均具有明显优势. 针对半无限板边缘裂纹，系统分析了在国际断裂力学界较有代表性的 Wu-Carlsson、Glinka-Shen 和 Fett-Munz 三种解析形式的权函数法，进而以在远端均匀加载下的半无限板边缘裂纹面位移 Wigglesworth 解析解导得的权函数及其对应的格林函数解 (即裂纹面受一对单位集中力作用下的应力强度因子) 为基准，沿整个裂纹长度对 3 种权函数的精度逐点进行比较，并与文献中基于其他方法求得的权函数做了广泛对比，包括 Bueckner, Hartranft-Sih 以及 Wigglesworth 利用不同解析方法推导出的高精度的权函数. 研究了 3 种参考载荷 (均布/正反向线性分布应力、集中力) 及其不同组合，以及裂纹嘴位移的几何条件对权函数精度的影响. 结果表明，基于一种参考载荷下的裂纹面张开位移比基于两种参考载荷下的应力强度因子所得到的权函数具有更高的精度，而且后一种方法的精度明显受到所选参考载荷组合的影响；裂纹面位移在裂纹嘴处三阶导数等于零的条件对基于一个参考解的权函数精度的改进效果较小. 最后给出了利用各种权函数方法计算得到的 4 种载荷条件下的应力强度因子，并对结果进行了比较.

关键词　半无限板, 边缘裂纹, 权函数法, 格林函数, 应力强度因子

中图分类号：V215　　**文献标识码**：A　　doi：10.6052/0459-1879-17-024

WEIGHT FUNCTION METHODS AND ASSESSMENT FOR AN EDGE CRACK IN A SEMI-INFINITE PLATE [1)]

Tong Dihua　Wu Xueren[2)]　Hu Benrun　Chen Bo

(*Beijing Institute of Aeronautical Materials*，*Beijing* 100095，*China*)

Abstract　Weight function method (WFM) is highly efficient and accurate for the determination of stress intensity factors (SIFs) and crack opening displacements (CODs) of cracked bodies under arbitrary load conditions. Comparing to the numerical methods such as the finite element method, WFMs have distinct advantage in terms of computational efficiency and reliability. This paper makes systematic analyses and comparisons of three WF approaches by Wu-Carlsson, Glinka-Shen and Fett-Munz, respectively, which are representative in the international fracture mechanics community. By employing the Wigglesworth analytical solutions to CODs of an edge crack in a semi-infinite plate under uniform tension, the WF and corresponding Green's function (SIF for a pair of point forces acting at an arbitrary location along the crack) are derived and used as the base for point-to-point comparison. The results are also compared with other existing WFs in the literature, including those by Bueckner, Hartranft-Sih and Wigglesworth using different analytical approaches. The study also includes the influence of selection of three reference load cases, including uniform, linear and reverse-linear

2017–01–20 收稿，2017–04–07 录用, 2017–04–07 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11402249).

1) 吴学仁，研究员，主要研究方向：材料与结构的疲劳与断裂. E-mail: xrwu621@163.com

引用格式：童第华, 吴学仁, 胡本润, 陈勃. 半无限板边缘裂纹的权函数解法与评价. 力学学报, 2017, 49(4): 848-857
Tong Dihua, Wu Xueren, Hu Benrun, Chen Bo. Weight function methods and assessment for an edge crack in a semi-infinite plate. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(4): 848-857

stress distributions and their combinations, and geometric conditions related to CODs on the WF accuracy. Results show that the WF based on COD analytical expression for one reference load case are more accurate than that based on two SIFs due to two reference load cases. Furthermore, solution accuracy of the later approach is considerably affected by the selected reference load case(s). The geometric condition that the third derivative of COD vanishes at crack mouth has little effect on the accuracy of one-reference-load-case-based weight function. Finally, SIFs for four load cases calculated by using various WFMs are presented and compared.

Key words semi-infinite plate，edge crack，weight function method，Green’s function，stress intensity factor

引 言

承受各种载荷作用下的裂纹应力强度因子 (K) 计算是断裂力学分析中的关键环节. 利用有限元法 (FEM) 或边界元法 (BEM) 等数值方法计算各种载荷情况和不同长度裂纹的应力强度因子，则往往要付出大量时间，例如高梯度的应力集中、热应力、残余应力和基于塑性诱发的裂纹闭合问题等.

权函数法 [1-2] 是一种求解裂纹在任意载荷条件下的应力强度因子和裂纹面位移等断裂力学参量的高效、高精度方法. 自 Bueckner[1] 和 Rice[2] 提出权函数法以来，许多学者对其作了深入的研究 [3-13]. 权函数解法的独特优势在于，把影响裂纹尖端应力强度因子和裂纹面位移的两个因素 (载荷和几何) 作了变量分离. 权函数本身仅包含裂纹的几何特征和载荷/位移边界条件，而与载荷无关. 一经确定，权函数就成为一个独立于载荷而仅与裂纹几何特性及边界条件有关的函数，可用来不受限制地求解裂纹在任意载荷条件下的应力强度因子. 文献 [11-12] 系统论述了权函数法，并用它求解了大量裂纹问题.

许多学者提出了确定权函数的不同方法. 以半无限板边缘裂纹为例，最具代表性的有 3 种：一是 Wu-Carlsson[4] 根据假设的裂纹面张开位移的级数展开式，利用裂纹尖端场的特点、自洽条件、裂纹嘴位移和裂纹面位移在裂纹嘴处二阶导数为零的条件推导权函数；二是 Glinka-Shen[8] 根据假定的权函数表达式形式，利用两种参考载荷情况下的应力强度因子和裂纹面位移在裂纹嘴处二阶导数为零的条件推导权函数系数；三是 Fett-Munz[12] 根据解析极限情况、一种参考应力强度因子解和裂纹面位移在裂纹嘴处 1~3 阶导数都等于零的条件推导权函数. 在工程实际应用中，具体方法的选择取决于确定权函数的复杂程度和计算精度. 本文系统推导了半无限板边缘裂纹的以上 3 种权函数，对计算精度进行了深入分析. 在此基础上与文献中的结果进行了广泛对比，包括 Bueckner [14]、Hartranft-Sih [15]，以及 Wigglesworth[16] 利用解析手段推导出的高精度的权函数.

Wu-Carlsson 权函数法 [11] 只需要一种参考载荷情况的应力强度因子解和裂纹嘴位移. 而 Glinka-Shen[8] 提出的确定权函数的方法则需要两种参考载荷情况的应力强度因子解. 裂纹面均布载荷是最简单的加载形式，一般将其选为第 1 种参考载荷，而关于第 2 种参考载荷选取对权函数精度的影响问题，文献中鲜见报道. 本文针对半无限板边缘裂纹情况，选择正向线性分布载荷和反向线性分布载荷作为第 2 种参考载荷，研究其选取对权函数精度的影响. 此外还分析了裂纹面位移在裂纹嘴处三阶导数等于零的条件对提高权函数精度的作用.

在上述研究的基础上，选择了 4 种相对复杂的加载形式 (不同次数的幂函数加载和裂纹面受反向线性载荷作用)，利用以上 3 种权函数法求解其应力强度因子，并对结果进行了比较分析.

1 边缘裂纹问题的各种权函数解法

根据权函数理论，应力强度因子可以根据权函数 $m(a,x)$ 和无裂纹情况下假想裂纹处的应力分布 $\sigma_s(x)$ 乘积的积分求得

$$K_s = \int_0^a \sigma_s(x) m(a,x) \mathrm{d}x \tag{1}$$

式中，a 和 x 分别是裂纹长度和沿裂纹面的坐标；K_s 为载荷情况为 s 的应力强度因子；$\sigma_s(x)$ 为载荷情况为 s 的假想裂纹处的应力分布. 式 (1) 的权函数 $m(a,x)$ 可以表达为

$$m(a,x) = \frac{E'}{2K_\mathrm{r}} \frac{\partial u_\mathrm{r}}{\partial a} \tag{2}$$

式中，K_r 和 u_r 分别为参考应力作用下的应力强度因子和裂纹面位移；$E' = E$(平面应力)，$E' = \dfrac{E}{1-\upsilon^2}$(平面应变)，其中 E 为弹性模量，υ 为泊松比.

利用式 (2) 的权函数求解 K，首先需要确定不同裂纹几何的裂纹面位移 u_r 与裂纹长度 a 和坐标 x 之间的函数关系，而 u_r 很难用解析式表示. 下面以半无限板边缘裂纹为例 (如图 1 所示)，讨论较有代表性的 3 种方法，即 Wu-Carlsson[11]、Glinka-Shen[8] 和 Fett-Munz 权函数法 [6].

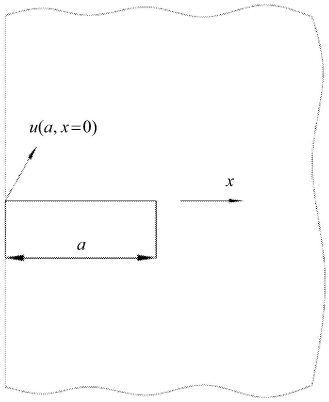


图 1 半无限板边缘裂纹

Fig. 1 An edge crack in a semi-infinite plate

1.1 Wu-Carlsson 权函数

对于受多项式分布应力作用下的边缘裂纹，设裂纹面位移的级数展开形式为 [11,13]

$$u_{\rm r}(a,x)=\frac{\sigma a}{\sqrt{2}E'}\sum_{j=1}^{J}F_j(a)\Big(1-\frac{x}{a}\Big)^{j-\frac{1}{2}} \tag{3}$$

式中, 下标 r 代表参考载荷情况；多项式级数展开的最大项数 J 取决于可以利用的力学条件数量. 对于本文讨论的边缘裂纹问题，所用的 4 个条件为：(1) 裂纹尖端区的裂纹面位移和 K 的比例关系；(2) 自洽条件；(3) 裂纹面位移在裂纹嘴处的二阶导数为零；(4) 参考载荷作用下裂纹嘴处的位移. 上述条件可表达为

条件 1

$$F_1(a)=4f_{\rm r},\quad f_{\rm r}=\frac{K_{\rm r}}{\sigma\sqrt{\pi a}} \tag{4}$$

条件 2

$$\sum_{j=1}^{J}F_j(a)E_j(a)=\sqrt{2}\pi\phi(a) \tag{5}$$

式中

$$\phi(a)=\frac{1}{a^2}\int_0^a sf_{\rm r}^2(s){\rm d}s \tag{6}$$

$$E_j(a)=\sum_{n=0}^{N}\frac{2^{n+1}n!S_na^n}{\prod_{k=0}^{n}(1+2j+2k)} \tag{7}$$

式中，S_n 为参考应力分布 $\sigma_{\rm r}(x)=\sum\limits_{n=0}^{N}S_na^n$ 的多项式系数.

条件 3

$$\sum_{j=1}^{J}(2j-3)(2j-1)F_j(a)=0 \tag{8}$$

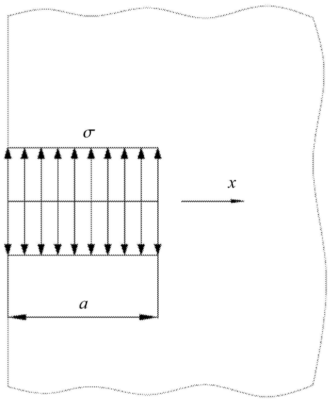
条件 4

$$\sum_{j=1}^{J}F_j(a)=\sqrt{2}V_{\rm r}(a),V_{\rm r}(a)=\frac{E'u_{\rm r}(a,x=0)}{\sigma a} \tag{9}$$

$F_1(a)\sim F_4(a)$ 的表达式为 [11,13]

$$\left.\begin{aligned}&F_1(a)=4f_{\rm r}(a)\\&F_2(a)=\{20\sqrt{2}\pi\phi(a)-\sqrt{2}[35E_3(a)-15E_4(a)]V_r(a)-\\&\qquad[20E_1(a)-36E_3(a)+16E_4(a)]F_1(a)\}/\\&\qquad[20E_2(a)-32E_3(a)+12E_4(a)]\\&F_3(a)=[35\sqrt{2}V_{\rm r}(a)-36F_1(a)-32F_2(a)]/20\\&F_4(a)=\sqrt{2}V_{\rm r}(a)-[F_1(a)+F_2(a)+F_3(a)]\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

对于半无限板边缘裂纹，选取裂纹面均布应力做为参考载荷 (如图 2(a) 所示)，其无量纲应力强度因子和无量纲裂纹嘴位移的精确解分别为 $f_{\rm r}=1.121\,5$，$V_{\rm r}=2.908\,6$，且 $n=0$, $S_0=1$, 于是简化

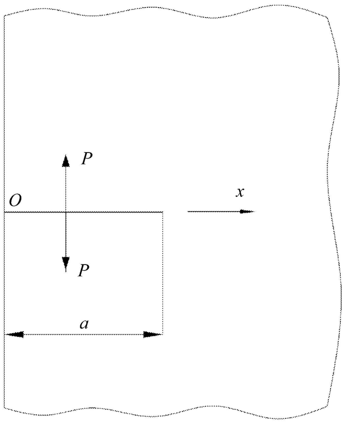


(a) 裂纹面受均布载荷

(a) Crack surface subjected to uniform stress

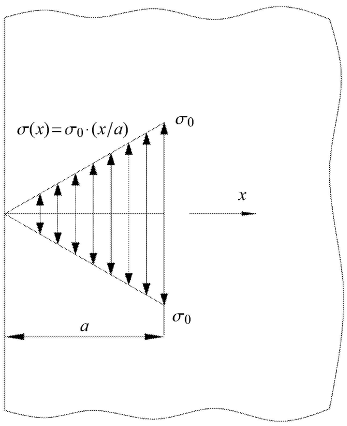
图 2 半无限板边缘裂纹受不同的载荷作用

Fig. 2 An edge in a semi-infinite plate subjected to various loading cases



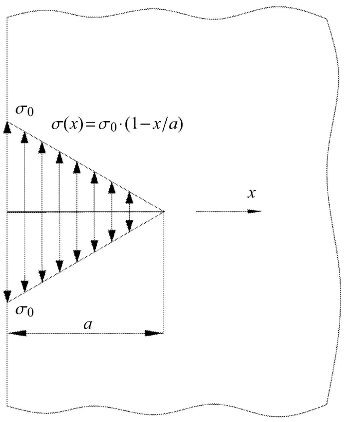
(b) 裂纹面受集中力作用

(b) Crack surface with concentrated force



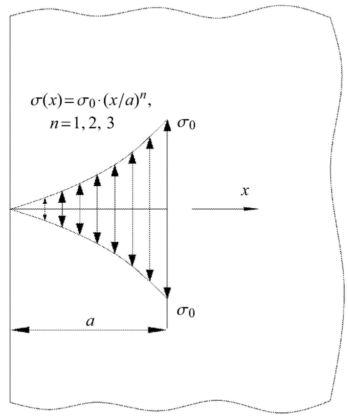
(c) 裂纹面受正向线性分布载荷

(c) Crack surfaces subjected to positive linearly distributed load



(d) 裂纹面受反向线性分布载荷

(d) Crack surfaces subjected to reverse linearly distributed load



(e) 裂纹面受幂函数载荷作用

(e) Crack surfaces subjected to power function load

图 2　半无限板边缘裂纹受不同的载荷作用

Fig. 2　An edge in a semi-infinite plate subjected to various loading cases

为 $E_j = 2/(2j+1)$. 将它们代入式 (10)，得到：$F_1 = 4.4860$，$F_2 = -0.7635$，$F_3 = 0.3453$，$F_4 = 0.0456$.

将 $F_1 \sim F_4$ 代入式 (3)，得到半无限板边缘裂纹的裂纹面位移表达式. 基于此表达式和式 (2) 可以直接确定权函数，其结果可以表示为 [11,13]

$$m(a,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \sum_{i=1}^{J+1} \beta_i \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{i-3/2} \tag{11}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
\beta_1 &= F_1/(2f_{\rm r}) = 2.0\\
\beta_2 &= (4af_{\rm r}' + 2f_{\rm r} + \frac{3}{2}F_2)/f_{\rm r} = 0.9788\\
\beta_3 &= \left[aF_2' + \frac{1}{2}(5F_3 - F_2)\right]/f_{\rm r} = 1.1101\\
\beta_4 &= \left[aF_3' + \frac{1}{2}(7F_4 - 3F_3)\right]/f_{\rm r} = -0.3194\\
\beta_5 &= \left(a'F_4 - \frac{5}{2}F_4\right)/f_{\rm r} = -0.1017
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

1.2　Glinka-Shen 权函数

Glinka-Shen[8] 直接假设权函数的一般表达式为

$$m(a,x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi(a-x)}}\left[1 + M_1\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1/2} + M_2\left(1-\frac{x}{a}\right) + M_3\left(1-\frac{x}{a}\right)^{3/2} + \cdots + M_n\left(1-\frac{x}{a}\right)^{n/2}\right] \tag{13}$$

Glinka-Shen[8] 认为，对于大部分裂纹几何，式 (13) 一般取 4 项即可保证精度. 在 4 项的权函数表达式中有 3 个待定参数 M_1, M_2 和 M_3. 采用 3 种不同参考应力强度因子或两种不同参考应力强度因子

加上边缘裂纹的裂纹面位移在裂纹嘴处二阶导数为零来确定未知参数 M_1, M_2 和 M_3. 对于大部分裂纹几何，3 种不同参考应力强度因子的获取难度要远大于第 2 种组合条件，因此大多选用第 2 种组合条件 (见式 (14)~ 式 (17)) 来确定上述 3 个未知参数.

条件 1

$$K_{r1} = \int_0^a \sigma_{r1} \frac{2}{\sqrt{2\pi(a-x)}}\left[1 + M_1\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1/2} + M_2\left(1-\frac{x}{a}\right) + M_3\left(1-\frac{x}{a}\right)^{3/2}\right]\mathrm{d}x \tag{14}$$

式中, σ_{r1} 为第一种参考载荷情况下假想裂纹处的应力分布；K_{r1} 为载荷 σ_{r1} 作用下的应力强度因子.

条件 2

$$K_{r2} = \int_0^a \sigma_{r2} \frac{2}{\sqrt{2\pi(a-x)}}\left[1 + M_1\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1/2} + M_2\left(1-\frac{x}{a}\right) + M_3\left(1-\frac{x}{a}\right)^{3/2}\right]\mathrm{d}x \tag{15}$$

式中, σ_{r2} 为第二种参考载荷情况下假想裂纹处的应力分布；K_{r2} 为载荷 σ_{r2} 作用下的应力强度因子.

条件 3

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,a)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0 \tag{16}$$

由于裂纹面位移 $u(x,a)$ 和权函数 $m(a,x)$ 存在式 (2) 的关系，因此条件 3 也可写为

$$\left.\frac{\partial^2 m(a,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0 \tag{17}$$

对于半无限板边缘裂纹，Glinka-Shen[8] 选取的第一种参考载荷情况为裂纹面受均布载荷作用 (如图 2(a) 所示)，第 2 种参考载荷情况为裂纹嘴受集中力作用 (如图 2(b) 所示，$x = 0$)，对应的应力强度因子分别为

$$K_{r1} = 1.1215 \cdot \sigma\sqrt{\pi a} \tag{18}$$

$$K_{r2} = 1.2970 \cdot \frac{2P}{\sqrt{\pi a}} \tag{19}$$

将式 (18) 和式 (19) 代入式 (14)、式 (15) 和式 (17) 可以求得式 (13) 权函数系数：$M_1 = -0.851\,54$, $M_2 = 3.000\,00$ 和 $M_3 = -1.314\,22$.

1.3 Fett-Munz 权函数

Fett-Munz[12] 假定权函数的一般表达式为

$$m(a,x) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}}\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-1/2} + \sum_{n=0}^{5} D_n\left(1-\frac{x}{a}\right)^{n+1/2}\right] \tag{20}$$

利用以下 5 个条件确定半无限板边缘裂纹权函数的系数 $D_0 \sim D_5$. 分别为解析极限情况、一种参考应力强度因子解和边缘裂纹的裂纹面位移在裂纹嘴处一阶、二阶和三阶导数都等于零的条件 (见式 (16) 和式 (17) 的关系)，上述 5 个条件表示为

条件 1

$$m(a,x)_{x=0} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2-4}}\frac{2}{\sqrt{\pi a}} \tag{21}$$

条件 2

$$\int_0^a m(a,x)\mathrm{d}x = 1.121\,52\sqrt{\pi a} \tag{22}$$

条件 3~ 条件 5

$$m'(a,x) = m''(a,x) = m'''(a,x) = 0,\quad x = 0 \tag{23}$$

根据上述 5 个条件，确定了半无限板边缘裂纹权函数的系数 [12] $D_0 \sim D_5$: $D_0 = 0.588\,52$, $D_1 = 0.031\,854$, $D_2 = 0.463\,397$, $D_3 = 0.227\,211$, $D_4 = -0.828\,528$, $D_5 = 0.351\,383$.

1.4 权函数精度评价 —— 格林函数法

由以上所确定的权函数计算给定应力分布下的应力强度因子，并与已知的高精度应力强度因子解对比，是评估权函数准确性的一种常用方式. 但这种方式实际上并不能准确地评价权函数精度, 因为由权函数计算应力强度因子，需要对权函数与无裂纹体假想裂纹面应力分布的乘积沿整个裂纹面做积分. 由于积分具有平均效应，所以由积分计算得到的应力强度因子，并不能真实体现权函数本身的准确性. 一般而言，当应力分布不发生符号改变时，由于平均效应，应力强度因子的结果误差将小于权函数的最大误差，而当应力分布沿裂纹面有剧烈变化，甚至多次改变应力方向时，应力强度因子的结果误差可能会显著地大于权函数最大误差，有些情况甚至会有数量级的差别. 所以，评价权函数本身精度的最佳方法是对权函数沿裂纹面逐点进行比较 [11]，即比较格林函数. 这种比较方式不会引入任何误差.

格林函数 $G(a,x)$ 又被称为影响函数，它代表裂纹面在任意位置 x 受一对单位集中力作用时 (图 2(b)) 的无量纲应力强度因子 (式 (24)). 格林函数与裂纹面受一对单位集中力作用下的应力强度因子是逐点对应的，与权函数 $m(a,x)$ 的关系见式 (25). 本文采用格林函数评价各种权函数法结果的准确性.

$$K=\frac{P}{\sqrt{\pi a}}G(a,x) \tag{24}$$

$$G(a,x)=m(a,x)\cdot\sqrt{\pi a} \tag{25}$$

2 半无限板边缘裂纹格林函数解

除上述 3 种最为常见的权函数解法外，其他学者也用不同的方法给出了半无限板边缘裂纹的格林函数解，例如 Bueckner[14] (见式 (26)) 和 Hartranft-Sih[15](见式 (27))(Tada 手册 [17] 中采用的格林函数公式). 为了对比上述 5 种半无限板边缘裂纹格林函数解的精度，以 Wigglesworth[16] 的半无限板边缘裂纹在远端均匀加载下的高精度裂纹面位移解析表达式推导出的格林函数解做为基础 (见式 (28)) 进行比较，结果见图 3.

$$G_{\text{Bueckner}}=\sqrt{\frac{2}{1-(x/a)}}\cdot\left[1+0.6147\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right)+\right.$$
$$\left.0.2502\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\right] \tag{26}$$

$$G_{\text{Hartranft-Sih}}=\frac{2}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\cdot\left[1.297-0.297\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^{5/4}\right] \tag{27}$$

$$G_{\text{Wigglesworth}}=\sqrt{2}\cdot\sum_{n=0}^{13}D_n\left(1-\frac{x}{a}\right)^{n-1/2} \tag{28}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&D_0=1\\&D_n=-(2n-3)C_{n-1}+(2n+1)C_n,\quad 0<n\leqslant 12\\&D_{13}=-23C_{12}\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

式 (29) 中, $C_0\sim C_{12}$ 分别为

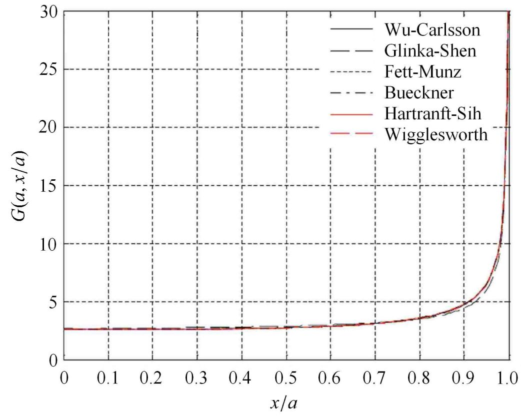
1.000 000, −0.143 719, 0.019 965, 0.019 665,

0.011 856, 0.006 254, 0.002 993, 0.001 256,

0.000 390, −0.000 010, −0.000 172, −0.000 213,

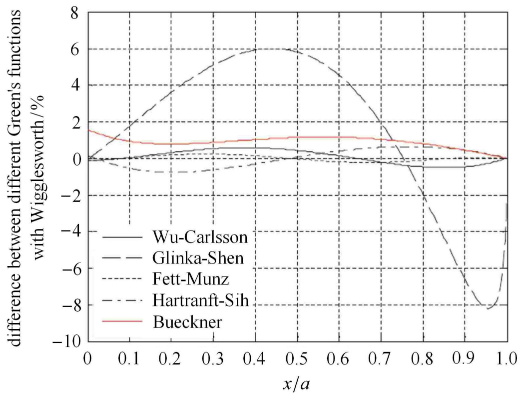
−0.000 212

图 3 表明，以 Wigglesworth 格林函数 [16] 为基准，各种格林函数最大相对差别分别如下: Bueckner[14] 为 1.57%, Wu-Carlsson[11] 为 0.56%, Fett-Munz[12] 为 0.23%, Hartranft-Sih[15] 为 0.78%, Glinka-Shen[8] 为 8.21%.



(a) 半无限板边缘裂纹不同方法求得的格林函数

(a) Green’s functions of an edge crack in a semi-infinite plate from different methods



(b) 不同权函数计算结果与 Wigglesworth[16] 之间的相对误差

(b) Percentage difference between different Green’s functions with Wigglesworth[16]

图 3 半无限板边缘裂纹不同权函数方法求得的格林函数

Fig. 3 Green’s functions for an edge crack in a semi-infinite plate derived from different weight function methods

3 参考载荷的选取对 Glinka-Shen 权函数法和 Wu-Carlsson 权函数法的影响

Glinka-Shen 的通用权函数法 [8] 需要两种参考载荷情况的应力强度因子解作为已知条件来推导权函数，而 Wu-Carlsson 权函数法 [11] 只需要一种参考载荷情况的应力强度因子解和裂纹嘴位移. 裂纹面受均布应力作用 (如图 2(a) 所示) 作为最简单的载荷情况被 Glinka-Shen[8] 和 Wu-Carlsson[11] 选用为一种参考载荷情况. Glinka-Shen[8] 选用的另一种载荷情况是裂纹嘴受集中力作用 (如图 2(b) 所示，x=0). 为了考察文献 [8] 的方法中参考载荷的选取对权函数精度的影响，本文选取以下 3 种参考载荷情况的组合

来分析参考载荷的选取对权函数精度的影响，分别为：(1) 裂纹面受均布应力作用和裂纹嘴受集中力作用 (见 1.2 节)；(2) 裂纹面受均布应力和正向线性变化的载荷 (如图 2(a) 和图 2(c) 所示)；(3) 裂纹面受均布应力和反向线性变化的载荷 (如图 2(a) 和图 2(d) 所示). 对于 Wu-Carlsson 权函数法 [11]，分别选取了裂纹面受均布应力 (如图 2(a) 所示)、正向线性变化 (如图 2(c) 所示) 和反向线性变化 (如图 2(d) 所示) 作为参考载荷情况.

对于裂纹面受正向线性变化载荷 (如图 2(c) 所示)，其应力强度因子和裂纹嘴位移 [17] 为

$$K_{r3} = 0.683 \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{\pi a} \tag{30}$$

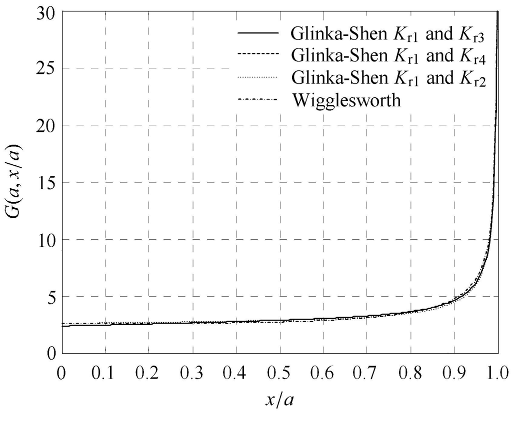
$$u_{r3}(x=0) = \frac{0.885}{E'} \cdot \sigma_0 \cdot a \tag{31}$$

对于裂纹面受反向线性变化载荷 (如图 2(d) 所示)，其应力强度因子和裂纹嘴位移 [17] 为

$$K_{r4} = 0.438\,5 \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{\pi a} \tag{32}$$

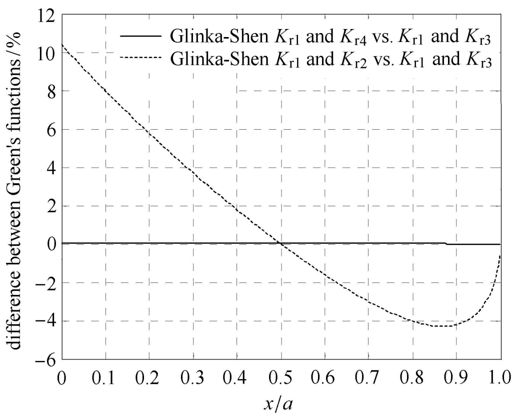
$$u_{r4}(x=0) = \frac{2.023\,6}{E'} \cdot \sigma_0 \cdot a \tag{33}$$

基于 Glinka-Shen 权函数法 [8]，将式 (18) 和式 (30) 代入式 (14) 和式 (15) 中，求得参考载荷为均布载荷和正向线性变化载荷情况下权函数式 (13) 的系数为 $M_1 = -0.679\,23$, $M_2 = 3.000\,0$ 和 $M_3 = -1.658\,85$. 将式 (18) 和式 (32) 代入式 (14) 和式 (15) 中，可以求出参考载荷为均布载荷和反向线性变化载荷情况下权函数式 (13) 系数为 $M_1 = -0.679\,24$, $M_2 = 3.000\,0$ 和 $M_3 = -1.658\,74$, 其相应的格林函数如图 4(a) 所示. 1.2 节中参考载荷为均布载荷和裂纹嘴集中力情况下的格林函数也在图 4(a) 中给出 ($M_1 = -0.851\,54$, $M_2 = 3.000\,00$ 和 $M_3 = -1.314\,22$).



(a) 选取不同的参考载荷对 Glinka-Shen 格林函数解的影响

(a) The influence of different reference loading cases on Glinka-Shen Green's functions



(b) 基于不同参考载荷情况获得的 Glinka-Shen 的两个格林函数解之间的相对差别

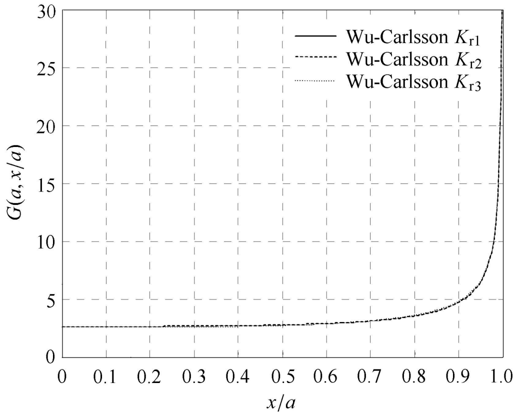
(b) Percentage difference between different reference loading cases obtained two Glinka-Shen Green's functions

图 4 选取不同的参考载荷对 Glinka-Shen 格林函数解的影响

Fig. 4 The influence of different reference loading cases on Glinka-Shen Green's functions

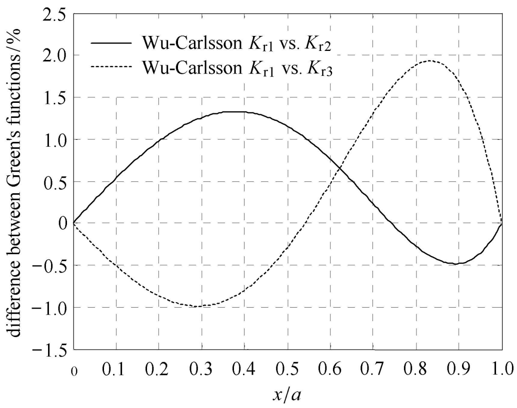
基于 Wu-Carlsson 权函数法 [11]，将式 (30) 和式 (31) 代入式 (10) 和式 (12) 中，可以求出参考解为正向线性变化载荷情况下式 (11) 的系数 $\beta_1 \sim \beta_5$ 分别为 2.0000，0.7914，2.1704，−1.6836 和 0.3867. 将式 (32) 和式 (33) 代入式 (10) 和式 (12) 中，可以求出参考解为反向线性变化载荷情况下式 (11) 的系数 $\beta_1 \sim \beta_5$ 分别为 2.0000，1.4864，−0.9096，2.0061 和 −0.9107，其相应的格林函数如图 5(a) 所示. 1.1 节中参考载荷为均布载荷情况下的格林函数也在图 5(a) 中给出.

图 4 表明，Glinka-Shen 格林函数 (基于均布载荷和正向线性变化载荷) 和 Glinka-Shen 格林函数 (基于均布载荷和反向线性变化载荷) 基本一致, 相对差别在 0.01% 以内；而均布载荷和裂纹嘴集中力进行组合得到的格林函数与均布载荷和正向线性变化进行组合得到的格林函数之间最大差别则为 10.1%. 图 5 表明，基于 Wu-Carlsson 权函数法，正向线性变化载荷作为参考解得到的格林函数与均布载荷情况下得到的格林函数之间最大差别为 1.76%; 反向线性变化载荷作为参考解得到的格林函数与均布载荷情况下得到的格林函数之间最大差别为 1.31%. 这说明 Glinka-Shen 利用两个参考解以及 $u'' = 0$ 的条件得到的格林函数精度明显受到所选参考载荷的影响，而不同参考载荷对 Wu-Carlsson 格林函数的影响则很小.



(a) 选取不同的参考载荷对 Wu-Carlsson 格林函数解的影响

(a) The influence of different reference loading cases on Wu-Carlsson Green's functions



(b) 基于不同参考载荷情况获得的 Wu-Carlsson 的两个格林函数解之间的相对差别

(b) Percentage difference between different reference loading cases obtained two Wu-Carlsson Green's functions

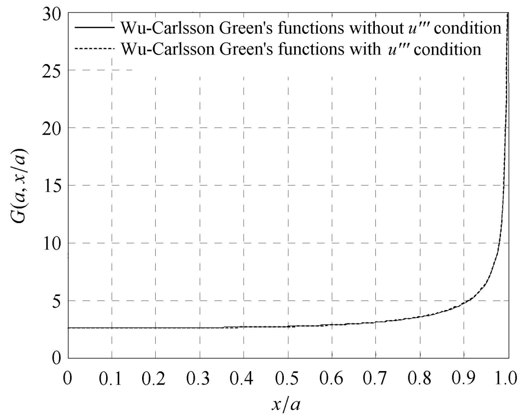
图 5　选取不同的参考载荷对 Wu-Carlsson 格林函数解的影响

Fig. 5　The influence of different reference loading case on Wu-Carlsson Green's functions

4　条件 $u''' = 0$ 对 **Wu-Carlsson** 权函数精度的影响

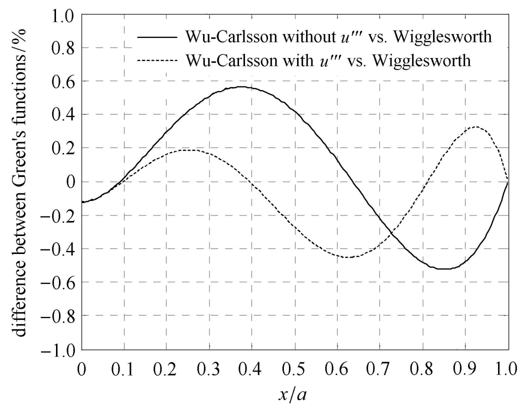
对于边缘裂纹情况，Fett 在文献 [18] 中推导了裂纹面位移在裂纹嘴处的三阶导数等于 0，即 $\left.\dfrac{\partial^3 u(x,a)}{\partial x^3}\right|_{x=0} = 0$，或 $u''' = 0$. 由于裂纹面位移 $u(x,a)$ 和权函数 $m(a,x)$ 存在式 (2) 的关系，上述条件也可写为 $\left.\dfrac{\partial^3 m(x,a)}{\partial x^3}\right|_{x=0} = 0$.

Wu-Carlsson 权函数法 [11] 只用了 1.1 节中的 4 个条件. 如果在这 4 个条件基础上再加条件 $u''' = 0$，则求得式 (3) 的系数为 $F_1 \sim F_5$ 分别为 4.486 0, −0.495 7, −0.672 6, 1.216 7 和 −0.421 0；式 (11) 的系数为 $\beta_1 \sim \beta_6$ 分别为 2.000 0, 1.337 0, −1.278 4, 4.696 7, −4.401 3 和 1.313 8. 考虑和不考虑 $u''' = 0$ 条件的格林函数如图 6 所示. 图 6 表明，未考虑该条件的 Wu-Carlsson 格林函数与 Wigglesworth 格林函数的最大差别为 0.56%，加入该条件后则为 0.45%. 可见 $u''' = 0$ 条件对 Wu-Carlsson 格林函数精度改进效果较小，因此可以舍弃.



(a) 考虑和不考虑三阶导数等于零条件的 Wu-Carlsson 格林函数

(a) Wu and Carlsson Green's functions with and without $u''' = 0$ condition



(b) 考虑和不考虑三阶导数等于零条件的 Wu-Carlsson 格林函数与 Wigglesworth 格林函数的相对差别

(b) Percentage difference between Wu-Carlsson Green's functions without and with $u''' = 0$ condition with Wigglesworth Green's functions

图 6　考虑和不考虑三阶导数等于零条件对 Wu-Carlsson 格林函数解的影响

Fig. 6　The influence of without and with $u''' = 0$ condition on Wu-Carlsson Green's functions

5 半无限板边缘裂纹在各种载荷作用下的应力强度因子权函数解

针对半无限板边缘裂纹情况，基于权函数法，选取 4 种裂纹面受载荷情况，分别为裂纹面受幂函数载荷作用 ($\sigma(x) = \sigma_0(x/a)^n$ 其中 $n = 1, 2, 3$)(如图 2(e) 所示) 和裂纹面受反向线性分布载荷作用 ($\sigma(x) = \sigma_0[1-(x/a)]$)(如图 2(d) 所示). 分别利用上述多种权函数解，求解了这 4 种受载情况下的应力强度因子，并与 Wigglesworth[16] 解进行对比，结果见表 1.

表 1 显示, 基于 Wu-Carlsson, Fett-Munz, Hartranft-Sih, Bueckner 的权函数解和基于 Wigglesworth 解得到的半无限板边缘裂纹受不同载荷情况下的应力强度因子解的相对差别整体都在 1% 之内；而基于 Glinka-Shen 权函数解得到的不同载荷情况下的应力强度因子相比其他方法误差较大，最大相对差别为 3.99%.

表 1 由各种权函数求得的半无限板边缘裂纹裂纹面受幂函数载荷和裂纹面受反向线性分布载荷作用下的无量纲应力强度因子

Table 1 Based on different weight function methods, stress intensity factors of an edge crack in a semi-infinite plate crack surface subjected to power function load and reverse linear distributed load

Load case	Wu − Carlsson method	Glinka − Shen method	Fett − Munz method	Based on Eq.(27) Hartranft − Sih[15]	Based on Eq.(26) Bueckner[14]	Tada handbook[17]	Based on Eq.(28) ~ Eq.(30) Wigglesworth[16]
$\sigma(x) = \sigma_0(x/a)^1$	0.682 0 (−0.13%)	0.670 1 (−1.87%)	0.682 7 (−0.03%)	0.684 4 (0.22%)	0.686 9 (0.59%)	0.683 9 (0.15%)	0.682 9
$\sigma(x) = \sigma_0(x/a)^2$	0.524 5 (−0.19%)	0.508 9 (−3.16%)	0.525 3 (−0.04%)	0.526 9 (0.27%)	0.528 1 (0.49%)	0.526 7 (0.23%)	0.525 5
$\sigma(x) = \sigma_0(x/a)^3$	0.440 0 (−0.23%)	0.423 4 (−3.99%)	0.440 9 (−0.02%)	0.442 2 (0.27%)	0.442 8 (0.41%)	0.442 0 (0.23%)	0.441 0
$\sigma(x) = \sigma_0[1-(x/a)]$	0.439 5 (0.16%)	0.451 4 (2.87%)	0.438 8 (0.00%)	0.437 8 (−0.23%)	0.443 0 (0.96%)	0.437 1 (−0.39%)	0.438 8

6 结 论

针对半无限板边缘裂纹，分析了 Wu-Carlsson、Glinka-Shen 和 Fett-Munz 这 3 种权函数法的求解精度. 并与文献中已有的半无限板边缘裂纹的权函数进行了广泛对比，包括 Bueckner 权函数、Hartranft-Sih 权函数 (Tada 手册中采用的权函数)，以及 Wigglesworth 利用解析手段推导出的高精度的权函数. 利用上述权函数法，求解了裂纹面受幂函数加载和反向线性分布载荷作用下的应力强度因子，得到的主要结论如下：

(1) Wu-Carlsson 和 Fett-Munz 权函数法的计算精度高于 Glinka-Shen 权函数法；

(2) Glinka-Shen 推导出的权函数精度受到所选参考载荷的明显影响. 而 Wu-Carlsson 权函数法，参考载荷的选取对权函数的影响则很小；

(3) $u''' = 0$ 条件对 Wu-Carlsson 权函数法计算精度改进效果很小, 在实际分析中可以舍弃.

参 考 文 献

1 Bueckner H. Novel principle for the computation of stress intensity factors. *Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik & Mechanik*, 1970, 50(9): 529-546

2 Rice JR. Some remarks on elastic crack-tip stress fields. *International Journal of Solids and Structures*, 1972, 8(6): 751-758

3 Paris PC, Mcmeeking RM, Tada H. The weight function method for determining stress intensity factors// Crack and Fracture, ASTM Special Technical Publication, 1976

4 Wu XR, Carlsson J. The generalised weight function method for crack problems with mixed boundary conditions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1983, 31(6): 485-497

5 Shen G, Glinka G. Determination of weight functions from reference stress intensity factors. *Theoretical & Applied Fracture Mechanics*, 1991, 15(3): 237-245

6 Fett T. Direct determination of weight functions from reference loading cases and geometrical conditions. *Engineering Fracture Mechanics*, 1992, 42(3): 435-444

7 Millwater H, Wagner D, Baines A, et al. Improved WCTSE method for the generation of 2D weight functions through implementation into a commercial finite element code. *Engineering Fracture Mechanics*, 2013, 109(0): 302-309

8 Glinka G, Shen G. Universal features of weight functions for cracks in mode I. *Engineering Fracture Mechanics*, 1991, 40(6): 1135-1146

9 Wu XR, Xu W. Strip yield crack analysis for multiple site damage in infinite and finite panels – A weight function approach. *Engineering*

Fracture Mechanics, 2011, 78(14): 2585-2596

10 Wagner D, Millwater H. 2D weight function development using a complex Taylor series expansion method. *Engineering Fracture Mechanics*, 2012, 86: 23-37

11 Wu X R, Carlsson AJ. Weight Functions and Stress Intensity Factor Solutions. Oxford: Pergamon, 1991

12 Fett T, Munz D. Stress intensity factors and weight functions. Southampton, UK: Computational Mechanics Publications, 1997

13 Wu XR. Closed-form weight function for edge crack problems. *Acta Mechanica Sinica*, 1990, 6(2): 151-159

14 Bueckner HF. Weight functions for the notched bar. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1971, 51(2): 97-109

15 Hartranft RJ, Sih GC. Alternating method applied to edge and surface crack problems// Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Netherlands: Springer, 1973: 179-238.

16 Wigglesworth LA. Stress distribution in a notched plate. *Mathematika*, 1957, 4(1): 76-96

17 Tada H, Paris PC, Irwin GR, et al. The Stress Analysis of Cracks Handbook. New York: ASME Press, 2000

18 Fett T. Conditions for the determination of approximate COD fields. *Engineering Fracture Mechanics*, 1991, 39(5): 905-914