

面向压电智能结构精确变形的协同优化设计方法¹⁾

吴曼乔 朱继宏²⁾ 杨开科 张卫红

(西北工业大学, 航空材料结构一体化与增材制造装备技术国际联合研究中心, 西安 710072)

摘要 智能结构集智能材料与传统材料于一体, 能够实现结构的主动控制, 在航空航天等领域具有巨大的应用潜力. 由于其系统复杂且具有多场耦合效应, 智能结构的整体式优化设计方法成为结构控制技术研究的關鍵之一. 为了提高压电智能结构的整体性能和变形精度, 提出了同时考虑压电驱动器布局 (分布位置及角度) 和基体结构拓扑构型的协同优化设计新方法. 采用多点约束方法 (multi-point constraints, MPC) 建立压电驱动器和基体结构的连接, 定义一种与测量点目标位移相关的权重函数, 以实现结构的精确变形控制. 通过协同优化设计, 压电驱动器可以获得最优的分布位置及角度, 同时基体结构获得最优的拓扑构型, 从而提升了压电智能结构系统的整体驱动性能和变形精度. 通过进一步分析, 研究了精确变形、体分比约束与结构优化构型和整体刚度的关系, 以及优化结果中可能存在的传力路径畸变现象. 数值算例的设计结果表明, 采用协同优化设计方法, 能够扩大结构的寻优空间, 有效减小变形误差, 实现压电智能结构的精确变形控制.

关键词 协同优化设计, 压电智能结构, 精确变形, 多点约束

中图分类号: V214.19 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-16-273

INTEGRATED LAYOUT AND TOPOLOGY OPTIMIZATION DESIGN OF PIEZOELECTRIC SMART STRUCTURE IN ACCURATE SHAPE CONTROL¹⁾

Wu Manqiao Zhu Jihong²⁾ Yang Kaike Zhang Weihong

(International Joint Research Center on Design and Additive Manufacture of Aerospace Materials and Structures, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract Smart structures are those equipped with sensors/actuators made of smart materials, which have the capability to control structure movement in such a way that makes the design more efficient. However, due to systematic complexity and multidisciplinary objectives, the optimization design of such structures in accurate shape control becomes very challenging. This paper proposes an integrated layout and topology optimization design method for accurate shape control of smart structures with surface bonded piezoelectric actuators. The multi-point constraints (MPC) method is used to simulate the bonding connections between movable piezoelectric actuators and host supporting structures. A new weighted shape error function based on desired deflections of observation points is defined to fulfill accurate shape control of piezoelectric smart structure. Through the proposed method, the optimal position and orientation of each piezoelectric actuator as well as the topology configuration of host supporting structure are founded, which significantly improves the systematic actuating and morphing performance of piezoelectric smart structures. Further studies on the relationships of structural stiffness with shape morphing constraint and volume fraction constraint are carried out, and distortions of load carrying

2016-09-27 收稿, 2016-12-23 录用, 2016-12-27 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (11432011, 11620101002) 和高等学校创新引智计划 (B07050) 资助项目.

2) 朱继宏, 教授, 主要研究方向: 飞行器轻质结构性能优化设计、航天器结构系统整体优化设计、热-机械耦合系统结构优化设计、面向增材制造的结构优化设计. E-mail: JH.Zhu@nwpu.edu.cn

引用格式: 吴曼乔, 朱继宏, 杨开科, 张卫红. 面向压电智能结构精确变形的协同优化设计方法. 力学学报, 2017, 49(2): 380-389

Wu Manqiao, Zhu Jihong, Yang Kaike, Zhang Weihong. Integrated layout and topology optimization design of piezoelectric smart structure in accurate shape control. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(2): 380-389

path in optimized designs are illustrated. With several numerical results, the proposed integrated optimization method is proved to be an efficient way to decrease the error between computed and desired surface and achieve the accurate shape control of piezoelectric smart structures.

Key words integrated optimization design, piezoelectric smart structure, accurate shape control, multi-point constraint

引言

随着科学技术,特别是航空航天技术的快速发展,人们对工业产品的性能要求越来越高,传统的工业产品一旦制造为成品,便只能被动地接受环境变化的影响,难以针对环境做出适当的反应.智能结构经过 20 余年的发展,具有自我感知、适应性强等特点,在结构振动控制、质量检测、变形控制等领域得到了广泛应用^[1-3].其中,结构变形控制在航天器、航空器中具有巨大的应用潜力^[4-6].压电智能材料具有体积小、响应时间短、频率响应范围广、易于加工制造等优点,成为精确变形智能结构中最常使用的一种智能材料.

在结构静力形状控制的研究中,主要目的为减小实际形状与预期形状之间的误差.大量学者以实际变形与预期变形间位移误差的平方和最小为目标,采用不同算法对压电智能结构系统的输入电压^[7-11]、驱动器分布角度^[12-13]及位置^[1,14-16]分别进行了优化.在目前已有的静力形状控制设计方法中,通常只对输入电压、驱动器分布角度或位置中的单个因素进行研究,而忽略了多个因素之间的相互耦合关系.

结构拓扑优化作为一种先进的结构设计方法,在提高结构整体刚度、自然频率等性能方面发挥了巨大的作用^[17-19],同时也被大量学者用于智能结构设计以实现预期的结构变形.例如, Kögl 等^[20]提出了一种基于 SIMP 的 PEMAP-P (piezoelectric material with penalization and polarization) 压电材料模型,通过序列线性规划 (sequential linear programming, SLP) 优化压电材料布局 and 极化方向,实现某一指定点的最大位移输出. Kang 等^[21]以单通道输入电压为设计变量,采用移动渐近线法 (method of moving asymptotes, MMA), 优化得到两种变形模式下压电材料的最优输入电压分布形式. Luo 等^[22]采用 MIST (moving iso-surface threshold method) 方法,对压电驱动器在固定位置时的基体结构进行了拓扑优化设计,实现了两种基础变形控制,并与实验结果

进行了对比.

事实上,上述在静力形状控制方面的优化设计工作,主要针对基体结构固定时压电驱动器/控制器位置、尺寸及控制参数的优化^[8-9,11,13,15-16,23],或者驱动器控制参数、位置、尺寸固定时基体结构材料的优化设计^[20,22,24],这两类设计方法均未考虑智能结构系统中各因素内在的相互作用,因而限制了结构系统的整体性能.与此同时,因为在实际使用中压电陶瓷易碎的特性,考虑多相材料包括压电材料、电极材料和基体材料的拓扑优化^[25-27]产生的复杂边界加大了实际生产制造的难度.此外, Wang 等^[28]提出了一种用于智能柔性机构的协同优化方法,采用 LSM (level set model) 和 IPDI (independent point-wise density interpolation) 方法同时优化植入式特定形状压电片的位置和基体结构的材料分布.

面向压电智能结构的精确变形控制,本文提出一种协同优化设计新方法 (见图 1).

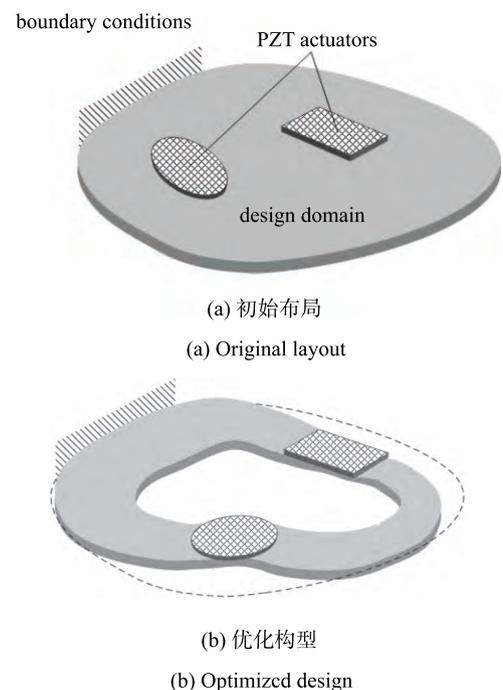


图 1 压电智能结构协同优化示意图

Fig. 1 Illustration of integrated layout and topology optimization design of piezoelectric smart structure

对具有常规外形的 PZT(lead zirconate titanate) 压电驱动器分布位置、角度和基体材料拓扑同时进行优化设计, 事实上拓展了优化设计的寻优空间, 可以提升智能结构整体驱动性能. 采用 MPC(multi-point constraints) 方法建立可动压电驱动器和基体结构的连接; 定义了一种基于测量点目标位移权重的形状误差函数, 以实现更高精度的变形控制; 应用 Guo 等 [29-31] 提出的有限包络圆方法 (finite circle method, FCM) 近似描述压电驱动器的外形轮廓, 施加包络圆距离约束防止压电驱动器之间、驱动器与设计域外部的干涉. 最终通过数值算例说明本文设计方法的有效性.

1 压电材料电-力平衡方程

本文假设压电智能结构的变形为线弹性小变形. 压电材料的本构关系可以用正压电效应方程和逆压电效应方程表示

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= C : \varepsilon - e \cdot E \\ D &= e : \varepsilon + \kappa \cdot E \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, C, σ 和 ε 分别为弹性张量、应力张量和总体应变张量; e, E, D 和 κ 分别为压电系数张量、电场强度矢量、电位移矢量和介电常数张量.

采用虚功原理 [32], 式 (1) 的弱形式可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon(v) : C : \varepsilon(u) d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon(v) : e \cdot E d\Omega = \\ \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_t} p \cdot v d\Gamma \\ \int_{\Omega} E(\zeta) \cdot e : \varepsilon(u) d\Omega + \int_{\Omega} E(\zeta) \cdot \kappa \cdot E(\varphi) d\Omega = \\ \int_{\Gamma_q} \zeta q_c d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$\forall v \in U_{ad}, \forall \zeta \in \Psi_{ad}$

其中, f 为体积力, p 为施加在外力边界 Γ_t 上的分布表面力; q_c 为表面电荷密度; u 和 φ 为位移和电势, v 和 ζ 为虚位移和虚电势; U_{ad} 和 Ψ_{ad} 为满足位移边界条件的位移场和电势域.

有限元离散后, 压电材料电-力耦合方程可表示为

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\varphi} \\ K_{\varphi u} & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (3)$$

式中, $K_{uu}, K_{u\varphi} = K_{\varphi u}$ 和 $K_{\varphi\varphi}$ 分别为弹性刚度矩阵、压电耦合矩阵和介电常数矩阵. U 和 φ 分别为节点

位移和节点电势矢量; F 和 Q 分别为施加的外载荷和电荷矢量.

在本工作中, 仅考虑逆压电效应. 在压电片厚度方向施加恒定电场, 假设电势沿厚度方向线性变化, 则相应的电场强度矢量为 $E = (0 \ 0 \ V_e/d)$, 其中 V_e 为施加的电压大小, d 为压电片厚度. 实际模型中, 两块同样形状的压电片对称布置于平板的上下表面, 施加大小相等且方向相反的驱动电压, 用于产生驱动弯矩, 使悬臂板产生面外变形. 结构模型如图 2 所示. 因压电材料和基体结构间胶接层很薄, 本文忽略了胶接层的厚度, 假设压电材料与基体结构之间为理想连接.

在施加恒定电场的情况下, 压电材料的电-力耦合关系可解耦为

$$K_{uu}U = F + F_{pzt} \quad (4)$$

其中, $F_{pzt} = -K_{u\varphi}\varphi$ 是压电材料受电场作用产生的驱动力.

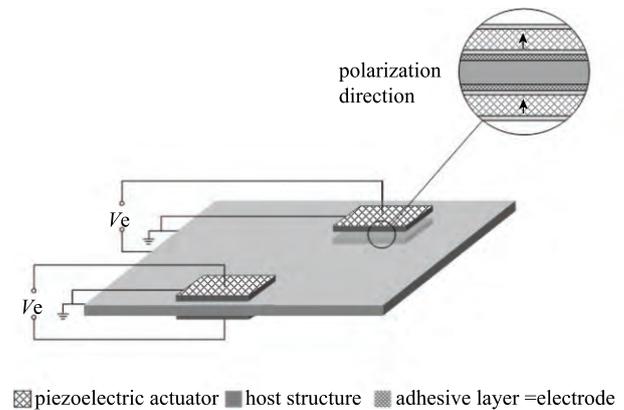


图 2 压电智能结构模型示意图

Fig. 2 Schematic of piezoelectric smart structure

2 优化设计模型定义

2.1 基于多点约束的智能结构系统建模

MPC 方法是有限元分析中用于建立连接约束的常用方法, 如模拟铆钉连接、螺栓连接以及胶接等 [30]. 考虑到压电材料和基体结构间胶接层很薄, 本工作忽略了胶接层的剪切变形, 采用 MPC 方法建立压电材料与基体结构之间的连接. 图 3 给出了采用多点约束连接的简化有限元模型. 其中, 浅色网格部分表示压电驱动器, 深色网格部分表示普通材料构成的基体结构.

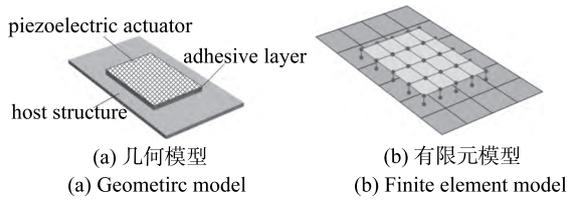


图 3 MPC 模拟压电片与基体结构连接示意图

Fig. 3 MPC connections to simulate bonding between piezoelectric actuators and host structure

在智能结构系统中，考虑 MPC 连接的平衡方程^[29]可写为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{uu}\mathbf{U} + \mathbf{H}^T\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{F} + \mathbf{F}_{pzt} \\ \mathbf{H}\mathbf{U} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中， \mathbf{H} 为由结构单元的形状函数、多点约束位置和边界条件共同决定的系数矩阵， $\boldsymbol{\lambda}$ 为拉格朗日乘子向量。

2.2 形状误差函数

形状控制的目标为最小化实际变形曲面与目标曲面的偏差，大量学者定义目标函数为测量点位移误差的平方和^[9,21-22]，表示为

$$E_r = \sum_{i=1}^m (u_i - a_i)^2 \quad (6)$$

式中 u_i 和 a_i 分别表示第 i 个测量点的实际位移与目标位移。这种定义方式是最小化测量点的实际位移与目标位移之差，然而对于具有不同目标位移的测量点，其精确变形控制效果在一定程度上取决于每个测量点位移所占权重的定义。本文提出一种与测量点目标位移相关的权重用于定义形状误差函数，表示如下

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \sum_{i=1}^m w_i (u_i - a_i)^2 \\ w_i &= \begin{cases} 0, & \text{when } a_i = 0 \\ \left(\frac{a_{\max}}{a_i}\right)^2, & \text{when } a_i \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中， w_i 为第 i 个测量点的位移权重， a_{\max} 为测量点目标位移最大值。将测量点目标位移写作列向量 $\mathbf{A} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m)^T$ ，位移权重构成对角矩阵 $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m)$ ，引入矩阵 \mathbf{L} ，用于从整体位移向量 \mathbf{U} 中提取测量点输出位移分量，则式 (7) 可记为矩阵形式

$$E_r = (\mathbf{L}\mathbf{U} - \mathbf{A})^T \mathbf{W} (\mathbf{L}\mathbf{U} - \mathbf{A}) \quad (8)$$

以位移偏差 $\Delta = u_i - a_i = 0.1 \text{ mm}$ ， $a_{\max} = 1 \text{ mm}$ 为例，从表 1 可以看出，对于相同的位移偏差，形状误差函数式 (7)、式 (8) 能很好地区分具有不同目标位移的测量点。然而之前的形状误差函数只取决于测量点实际位移与目标位移的偏差，因此采用此形状误差函数的协同优化设计能更好地实现各个测量点的精确变形控制。

表 1 两种形状误差函数的对比

Table 1 Comparison of two shape error functions

a_i/mm	$(u_i - a_i)^2/\text{mm}^2$	$w_i(u_i - a_i)^2/\text{mm}^2$
0.1	0.01	1
1.0	0.01	0.01

2.3 优化模型

本工作的目标是得到能实现精确面外变形的压电驱动器布局与基体结构拓扑构型。由于压电驱动器产生的驱动力集中在其周围，在协同优化过程中容易引起材料集中分布于压电驱动器周围的现象。为了解决这个问题，本工作通过添加面内虚拟力的方式引入一个刚度条件，如图 4 所示。根据经典层合板理论，由于结构耦合刚度的存在，薄板存在拉弯耦合效应，但当多层薄板结构在几何和材料性能上关于中面对称时，耦合刚度矩阵为零，因而面内的虚拟力对面外目标变形不会产生任何影响。

本工作主要研究压电智能结构中压电驱动器布局与基体结构拓扑构型的协同优化设计，设计目标为智能结构整体柔顺度最小，同时给定形状误差函数一个很小的上限 δ 。优化过程中，同时优化基体结构单元伪密度和压电驱动器几何位置两类设计变量。

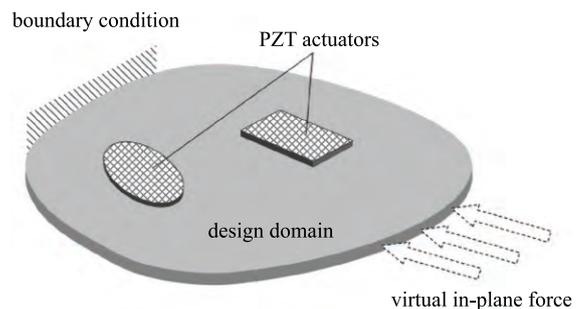


图 4 面内虚拟力示意图

Fig. 4 Illustration of virtual in-plane force

优化模型的数学表述可以写作

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{Find : } \eta_i (i = 1, 2, \dots, N); \xi_j (j = 1, 2, \dots, M) \\
 &\text{Minimize : } C = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} \\
 &\text{Subjectto : Eq. (5)} \\
 &E_r \leq \delta \\
 &V \leq V_0 \\
 &\Omega_{j1} \cap \Omega_{j2} = \emptyset (j1 = 1, 2, \dots, M; \\
 &j2 = 1, 2, \dots, M; j1 \neq j2) \\
 &\Omega_j \subseteq \Omega_d (j = 1, 2, \dots, M)
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中, η_i 为基体结构第 i 个单元的伪密度设计变量, $\xi_j = (\xi_{jx}, \xi_{jy}, \xi_{j\theta})$ 描述了第 j 个压电驱动器的几何位置, 其中 ξ_{jx} 和 ξ_{jy} 表示驱动器的平动自由度, $\xi_{j\theta}$ 表示驱动器的平面内转动自由度; N 和 M 分别表示结构伪密度设计变量和压电驱动器数目. C 为结构的总体柔顺度; V 和 V_0 分别为基体结构材料体分比用量及其上限; $\Omega_j, \Omega_{j1}, \Omega_{j2}$ 分别为第 $j, j1, j2$ 个压电驱动器所占区域; Ω_d 为整体设计区域.

当在协同优化中引入设计相关载荷例如重力时, 广泛应用的 SIMP 插值模型会引起低密度区域的局部变形. 为了避免这个问题, Zhu 等^[30] 提出了一种改进的多项式插值模型. 表述如下

$$E(i) = [(1 - \chi)\eta_i^p + \chi\eta_i] E_0(i) \quad (10)$$

式中, $E(i)$ 和 $E_0(i)$ 分别表示单元杨氏模量和实体材料时单元杨氏模量. 本文采用式 (10) 形式的插值模型, 其中, p 和 χ 的取值分别为 4 和 1/16.

3 灵敏度分析

压电智能结构的整体柔顺度和形状误差函数等响应关于两类设计变量的灵敏度均可解析获得, 具体推导过程如下.

3.1 对伪密度设计变量的灵敏度

结构总体柔顺度和形状误差函数的矩阵形式可分别表述为

$$\left. \begin{aligned}
 &C = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} \\
 &E_r = (\mathbf{LU} - \mathbf{A})^T \mathbf{W} (\mathbf{LU} - \mathbf{A})
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

上式两端同时对伪密度设计变量 η_i 求偏导, 可得

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{\partial C}{\partial \eta_i} = \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta_i} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \eta_i} \mathbf{U} \\
 &\frac{\partial E_r}{\partial \eta_i} = 2 (\mathbf{LU} - \mathbf{A})^T \mathbf{W} \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta_i}
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

对平衡方程式 (5) 两端关于伪密度设计变量 η_i 求偏导, 得

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \eta_i} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{uu} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta_i} + \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \eta_i} \lambda + \mathbf{H}^T \frac{\partial \lambda}{\partial \eta_i} = \frac{\partial (\mathbf{F} + \mathbf{F}_{pzt})}{\partial \eta_i} \quad (13)$$

式中, \mathbf{F} 为设计无关载荷; $\mathbf{F}_{pzt} = -\mathbf{K}_{u\varphi} \boldsymbol{\varphi}$ 为压电驱动力, 假设其不随基体结构变化而变化; 系数矩阵 \mathbf{H} 与伪密度设计变量无关, 因此等式 (13) 可表示为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta_i} = -\mathbf{K}_{uu}^{-1} \left(\mathbf{H}^T \frac{\partial \lambda}{\partial \eta_i} + \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \eta_i} \mathbf{U} \right) \quad (14)$$

将式 (14) 代入式 (12), 且由式 (5) 得 $\mathbf{U}^T \mathbf{H}^T = \mathbf{0}$, 因此式 (12) 可表示为

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{\partial C}{\partial \eta_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \eta_i} \mathbf{U} \\
 &\frac{\partial E_r}{\partial \eta_i} = -2 (\mathbf{LU} - \mathbf{A})^T \mathbf{W} \mathbf{L} \mathbf{K}_{uu}^{-1} \left(\mathbf{H}^T \frac{\partial \lambda}{\partial \eta_i} + \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \eta_i} \mathbf{U} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

使用伴随法, 引入列向量 \mathbf{q} 满足

$$\mathbf{K}_{uu} \mathbf{q} = -2 \mathbf{L}^T \mathbf{W}^T (\mathbf{LU} - \mathbf{A}) \quad (16)$$

可得

$$\mathbf{q}^T = -2 (\mathbf{LU} - \mathbf{A})^T \mathbf{W} \mathbf{L} \mathbf{K}_{uu}^{-1} \quad (17)$$

将式 (17) 代入式 (15), 可得

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{\partial C}{\partial \eta_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \eta_i} \mathbf{U} \\
 &\frac{\partial E_r}{\partial \eta_i} = \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \eta_i} \mathbf{U}
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

3.2 对几何设计变量的灵敏度

结构总体柔顺度和形状误差函数对几何设计变量 ξ_j 的偏导数可类似得到

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{\partial C}{\partial \xi_j} = \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_j} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \xi_j} \mathbf{U} \\
 &\frac{\partial E_r}{\partial \xi_j} = 2 (\mathbf{LU} - \mathbf{A})^T \mathbf{W} \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_j}
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

对平衡方程式 (5) 两端关于几何设计变量 ξ_j 求偏导, 可得到

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \xi_j} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{uu} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \xi_j} \lambda + \mathbf{H}^T \frac{\partial \lambda}{\partial \xi_j} = \frac{\partial (\mathbf{F} + \mathbf{F}_{pzt})}{\partial \xi_j} \quad (20)$$

因矩阵系数 \mathbf{H} 与驱动器几何位置相关，驱动器几何位置变化时， $\partial \mathbf{H}^T / \partial \xi_j \neq \mathbf{0}$ 。

当驱动器发生平动时， ξ_j 为第 j 个驱动器的平动自由度设计变量，其变化不影响结构的刚度矩阵，因此 $\partial \mathbf{K}_{uu} / \partial \xi_j = \mathbf{0}$ ， $\partial \mathbf{K}_{u\varphi} / \partial \xi_j = \mathbf{0}$ ，则式 (20) 可写为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_j} = -\mathbf{K}_{uu}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \xi_j} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{H}^T \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \xi_j} \right)^T \quad (21)$$

参照式 (16) 引入列向量 \mathbf{q} ， $\mathbf{U}^T \mathbf{H}^T = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{q}^T \mathbf{H}^T = \mathbf{0}$ 。将式 (21) 代入式 (19)，式 (19) 可化简为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \xi_j} &= -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \xi_j} \boldsymbol{\lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial \xi_j} &= \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \xi_j} \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

若 ξ_j 是第 j 个驱动器的转动自由度设计变量，由于转动影响结构的刚度矩阵，则式 (20) 可写为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_j} = -\mathbf{K}_{uu}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \xi_j} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{K}_{u\varphi}}{\partial \xi_j} \boldsymbol{\varphi} + \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \xi_j} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{H}^T \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \xi_j} \right) \quad (23)$$

当驱动器发生转动，第 j 个驱动器的弹性刚度矩阵、压电耦合矩阵可以写为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{uu,j} &= \mathbf{T}_j^T \mathbf{K}_{uu,j}^* \mathbf{T}_j \\ \mathbf{K}_{u\varphi,j} &= \mathbf{T}_j^T \mathbf{K}_{u\varphi,j}^* \mathbf{T}_j \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中， $\mathbf{K}_{uu,j}^*$ 和 $\mathbf{K}_{u\varphi,j}^*$ 分别为第 j 个驱动器的初始弹性刚度矩阵和初始压电耦合矩阵； \mathbf{T}_j 为旋转矩阵。

假设 \mathbf{v} ， $\hat{\mathbf{v}}$ 为整体结构的两种响应矢量， \mathbf{v}_j 和 $\hat{\mathbf{v}}_j$ 为第 j 个驱动器的两种响应矢量，则与刚度矩阵相关项的表达式可以统一表述为

$$\mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \xi_j} \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_j^T \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial \xi_j} \hat{\mathbf{v}}_j = \mathbf{v}_j^T \left(\mathbf{T}_j^T \mathbf{K}_j^* \frac{d\mathbf{T}_j}{d\xi_j} + \frac{d\mathbf{T}_j^T}{d\xi_j} \mathbf{K}_j^* \mathbf{T}_j \right) \hat{\mathbf{v}}_j \quad (25)$$

因此，式 (19) 可写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \xi_j} &= -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \xi_j} \boldsymbol{\lambda} - \\ &\frac{1}{2} \mathbf{U}_j^T \left(\mathbf{T}_j^T \mathbf{K}_{uu,j}^* \frac{d\mathbf{T}_j}{d\xi_j} + \frac{d\mathbf{T}_j^T}{d\xi_j} \mathbf{K}_{uu,j}^* \mathbf{T}_j \right) \mathbf{U}_j - \\ &\mathbf{U}_j^T \left(\mathbf{T}_j^T \mathbf{K}_{u\varphi,j}^* \frac{d\mathbf{T}_j}{d\xi_j} + \frac{d\mathbf{T}_j^T}{d\xi_j} \mathbf{K}_{u\varphi,j}^* \mathbf{T}_j \right) \boldsymbol{\varphi}_j \\ \frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial \xi_j} &= \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \xi_j} \boldsymbol{\lambda} + \\ &\mathbf{q}_j^T \left(\mathbf{T}_j^T \mathbf{K}_{uu,j}^* \frac{d\mathbf{T}_j}{d\xi_j} + \frac{d\mathbf{T}_j^T}{d\xi_j} \mathbf{K}_{uu,j}^* \mathbf{T}_j \right) \mathbf{U}_j + \\ &\mathbf{q}_j^T \left(\mathbf{T}_j^T \mathbf{K}_{u\varphi,j}^* \frac{d\mathbf{T}_j}{d\xi_j} + \frac{d\mathbf{T}_j^T}{d\xi_j} \mathbf{K}_{u\varphi,j}^* \mathbf{T}_j \right) \boldsymbol{\varphi}_j \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

综上，结构整体柔顺度和形状误差函数对几何设计变量的灵敏度可写为

$$\left. \begin{aligned} \text{when } \xi_j &= \xi_{jx}, \xi_{jy} \\ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \xi_j} &= -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \xi_j} \boldsymbol{\lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial \xi_j} &= \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \xi_j} \boldsymbol{\lambda} \\ \text{when } \xi_j &= \xi_{j\theta} \\ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \xi_j} &= -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \xi_j} \boldsymbol{\lambda} - \\ &\frac{1}{2} \mathbf{U}_j^T \left(\mathbf{T}_j^T \mathbf{K}_{uu,j}^* \frac{d\mathbf{T}_j}{d\xi_j} + \frac{d\mathbf{T}_j^T}{d\xi_j} \mathbf{K}_{uu,j}^* \mathbf{T}_j \right) \mathbf{U}_j - \\ &\mathbf{U}_j^T \left(\mathbf{T}_j^T \mathbf{K}_{u\varphi,j}^* \frac{d\mathbf{T}_j}{d\xi_j} + \frac{d\mathbf{T}_j^T}{d\xi_j} \mathbf{K}_{u\varphi,j}^* \mathbf{T}_j \right) \boldsymbol{\varphi}_j \\ \frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial \xi_j} &= \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \xi_j} \boldsymbol{\lambda} + \\ &\mathbf{q}_j^T \left(\mathbf{T}_j^T \mathbf{K}_{uu,j}^* \frac{d\mathbf{T}_j}{d\xi_j} + \frac{d\mathbf{T}_j^T}{d\xi_j} \mathbf{K}_{uu,j}^* \mathbf{T}_j \right) \mathbf{U}_j + \\ &\mathbf{q}_j^T \left(\mathbf{T}_j^T \mathbf{K}_{u\varphi,j}^* \frac{d\mathbf{T}_j}{d\xi_j} + \frac{d\mathbf{T}_j^T}{d\xi_j} \mathbf{K}_{u\varphi,j}^* \mathbf{T}_j \right) \boldsymbol{\varphi}_j \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

4 数值算例

考虑如图 5 所示尺寸为 200 mm×148 mm×1 mm 的悬臂铝板，在其上下表面通过 MPC 多点约束连接 4 对矩形压电驱动器，尺寸均为 40 mm×22 mm×1 mm，分别标记为 E, F, G, H。边界条件如图 5 所示，结构变形由压电驱动器的逆压电效应产生。材料属性如下。

主体结构，弹性模量 $E_0 = 70$ GPa，泊松比 $\nu_0 = 0.32$ 。

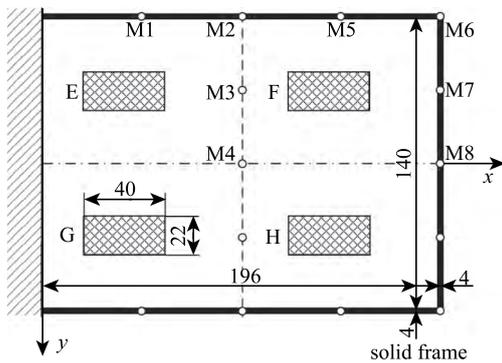
PZT 压电驱动器，弹性模量 $E_p = 63$ GPa，泊松比 $\nu_p = 0.3$ ，压电系数 $d_{31} = d_{32} = 2.54 \times 10^{-10}$ m/V。

悬臂板边框深色区域为非设计域，内部浅色区域为设计域。主体结构材料用量上限 V_0 为 50%。为避免压电驱动器间干涉，其几何轮廓采用有限包络圆近似^[30-31]，如图 5(b) 所示。考虑结构的对称性，仅选取 8 个测量点 M1~M8，约束形状误差函数上限从而精确控制曲面变形。

考虑结构的弯曲变形形式^[10,22]，定义目标曲面函数为

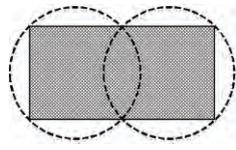
$$w_b(x, y) = \tan \theta \frac{x^2}{a} \quad (28)$$

式中, $a = 200 \text{ mm}$, θ 为弯曲变形目标曲面与初始水平面夹角.



(a) 两侧表面附有压电驱动器的薄铝板结构

(a) A thin aluminum plate bonded with PZT actuators on both sides



(b) 压电驱动器的有限包络圆近似

(b) FCM approximation of PZT actuator

图 5 压电智能悬臂板结构示意图 (○: 测量点)

Fig. 5 Schematic of a piezoelectric integrated cantilever plate

(○: observation points)

4.1 弯曲变形

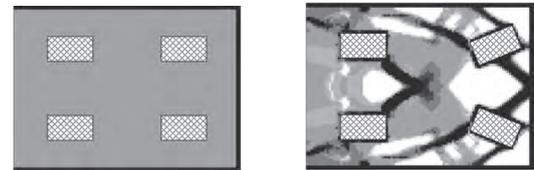
取式 (28) 中 $\theta = 0.25^\circ$, 则弯曲变形目标曲面的表达式为

$$w_b(x, y) = \tan 0.25^\circ \frac{x^2}{a} \quad (29)$$

4 对压电驱动器均施加大小、方向相同的电压 70 V. 在基体结构 (200, 0, 0) mm 点处施加一个面内虚拟力 $f_1 = (0, 40, 0) \text{ N}$; 形状误差函数上限 δ 取为 0.01 mm^2 . 采用梯度算法 GCMMA (globally convergent method of moving asymptotes)^[33] 对优化问题进行求解. 压电驱动器的位置、角度随迭代过程而变动, 且基体结构材料分布逐渐清晰, 如图 6 所示.

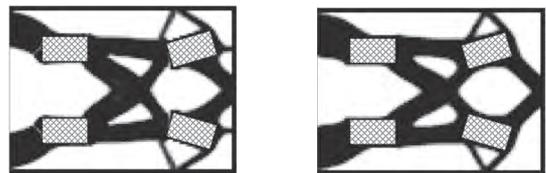
迭代初始, 由于施加电场后压电材料周围存在集中驱动载荷, 压电驱动器对优化目标更敏感, 位置及角度更新迅速; 随后, 基体结构材料支撑压电驱动器, 分布逐渐清晰; 与此同时, 压电驱动器位置、角度微调以增加结构变形的精确度. 最终优化构型中, 压电驱动器 E 的几何中心位置从初始的 (50, -35, 0) mm 移动到 (48.80, -32.17, 0) mm, 角度旋转 0° , 压电驱动器 F 的几何中心位置从初始的 (150, -35,

0) mm 移动到 (149.75, -33.38, 0) mm, 角度旋转 7.46° . 形状误差函数值从初始的 1.76 mm^2 减小到最终的 $9.60 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$, 优化过程中实际变形与目标变形的误差分布如图 7 所示, 最终优化构型变形如图 8 所示. 从表 2 可知, 测量点最大位移误差出现在 M8 处, 仅 5.54%. 可见, 通过协同优化, 压电驱动器位置、角



(a) 初始布局, $C = 5.13 \text{ mJ}$ (b) 第 10 迭代步, $C = 2.45 \text{ mJ}$

(a) Original layout, $C = 5.13 \text{ mJ}$ (b) 10th iteration, $C = 2.45 \text{ mJ}$

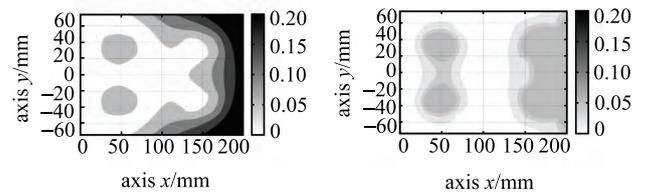


(c) 第 25 迭代步, $C = 1.82 \text{ mJ}$ (d) 优化设计, $C = 1.77 \text{ mJ}$

(c) 25th iteration, $C = 1.82 \text{ mJ}$ (d) Optimized design, $C = 1.77 \text{ mJ}$

图 6 弯曲变形结构构型优化历史

Fig. 6 Iterative history of optimization design of structure configuration in bending deformation



(a) 初始迭代步,

$E_r = 1.76 \text{ mm}^2$

(a) 0th iteration,

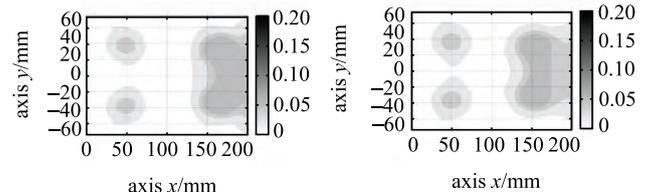
$E_r = 1.76 \text{ mm}^2$

(b) 第 10 迭代步,

$E_r = 4.97 \times 10^{-2} \text{ mm}^2$

(b) 10th iteration,

$E_r = 4.97 \times 10^{-2} \text{ mm}^2$



(c) 第 25 迭代步,

$E_r = 4.67 \times 10^{-2} \text{ mm}^2$

(c) 25th iteration,

$E_r = 4.67 \times 10^{-2} \text{ mm}^2$

(d) 优化设计,

$E_r = 9.60 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$

(d) Optimized design,

$E_r = 9.60 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$

图 7 实际变形与目标变形曲面误差绝对值分布优化历史

Fig. 7 Iterative history of absolute value of error distribution between computed shape and desired shape

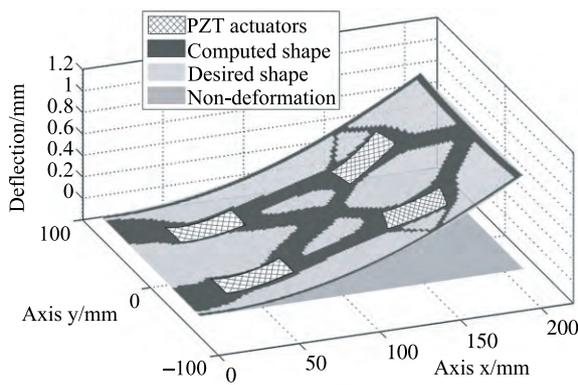


图 8 优化构型变形对比

Fig. 8 Comparison of computed shape and desired shape

度及基体结构材料均找到最优化的分布,从而实现了预期变形. 目标函数经 105 次迭代收敛于 1.77 mJ, 如图 9 所示.

表2 测量点位移

Table 2 Deflections of each observation point in bending deformation

No.	Desired deflection/mm	Computed deflection/mm	Absolute value of relative error/%
M ₁	0.054 54	0.053 90	1.17
M ₂	0.218 17	0.222 85	2.15
M ₃	0.218 17	0.211 35	3.13
M ₄	0.218 17	0.214 01	1.91
M ₅	0.490 88	0.501 64	2.19
M ₆	0.872 67	0.861 61	1.27
M ₇	0.872 67	0.830 19	4.87
M ₈	0.872 67	0.824 34	5.54

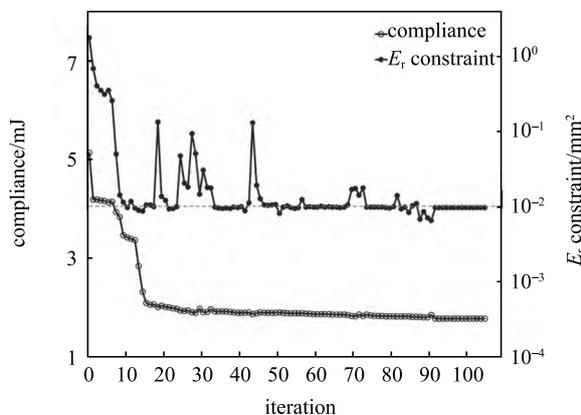


图 9 协同优化收敛曲线

Fig. 9 Convergence history of objective function and E_r constraint of iterative optimization design

为研究压电驱动器初始布局对优化设计结果的影响, 本文进一步分析在不同初始布局下的精确变

形协同优化问题, 其初始布局及最终优化构型如表 3 所示. 在 4 种优化构型中, 压电驱动器均找到适宜分布位置及角度, 且基体结构材料支撑压电驱动器形成清晰合理的传力路径. 4 种初始布局下优化问题最终收敛的目标函数值与形状误差函数值均相差不大, 压电驱动器均由不同初始位置、角度变化到初始布局 1 中的分布区域; 但基体结构最终拓扑构型存在不同程度的差异, 例如初始布局 3 和 4 均获得与初始布局 1 和 2 显著不同的基体结构拓扑构型. 可见, 结构优化构型依赖于压电驱动器的初始布局, 在协同优化设计中需要合理选择结构的初始布局. 由于协同优化问题的非凸性, GCMMA 算法只能得到局部解 [34-35]. 但在另一方面, 局部解能为工程设计人员提供更多的设计方案, 具有实用的工程设计价值.

表3 不同初始布局下的优化构型

Table 3 Different optimized design due to different original layouts

No.	Original layouts	Optimized designs
1		
	$C=5.13 \text{ mJ}, E_r=1.76 \text{ mm}^2$	$C=1.77 \text{ mJ}, E_r=9.60 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$
2		
	$C=5.14 \text{ mJ}, E_r=1.62 \text{ mm}^2$	$C=1.72 \text{ mJ}, E_r=9.16 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$
3		
	$C=3.65 \text{ mJ}, E_r=1.71 \text{ mm}^2$	$C=1.77 \text{ mJ}, E_r=9.08 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$
4		
	$C=4.51 \text{ mJ}, E_r=1.92 \text{ mm}^2$	$C=1.78 \text{ mJ}, E_r=9.38 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$

4.2 优化过程中传力路径的畸变现象

进一步分析在协同优化设计方法中,形状误差及体分比约束条件对精确变形智能结构设计的影响规律.

仍以上述悬臂板结构为例,显然形状误差函数约束上限 δ 衡量着结构变形的准确度, δ 值越小,变形准确度越高.针对图6(a)初始布局下的弯曲变形,依次取 $\delta=0.001, 0.005, 0.010, 0.015$ 和 0.025 mm^2 ,进行协同优化设计,结果如图10所示.当形状误差函数上限 δ 大于 0.01 mm^2 时,随着 δ 的减小,结构优化构型发生变化,并得到更加精确的实际变形,例如图10中(V),(IV)和(III).当约束过强时,结构为满足更加严格的变形要求,传力路径发生断裂并伴随结构刚度的巨大损失,出现不合理的结构形式,如图10中(I)和(II).在 $\delta=0.010$ 和 0.015 mm^2 时,如图10中(III)和(IV)所示,取得较优参数匹配,且最终优化构型十分相似.上述算例表明,当精确变形约束定义过强时,虽然优化得到的柔性铰链结构及中间密度单元有利于实现整体结构变形要求,但从工程设计及实际物理意义角度需将形状误差函数约束上限 δ 控制在合理范围.

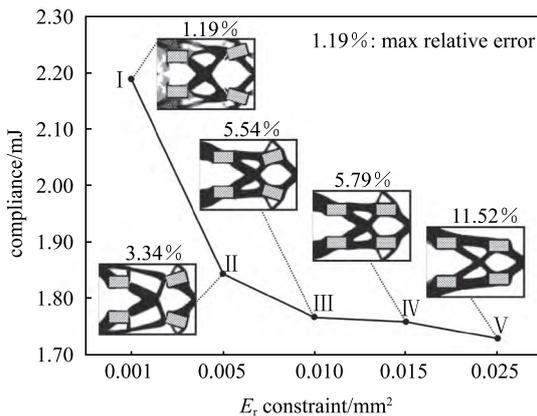


图10 形状误差约束上限对结构应变能和结构构型的影响

Fig. 10 Compliance energy and structure optimized design under different E_r constraint upper bounds

上述算例均基于体分比约束上限 $V_0=50\%$,在另一方面,材料用量决定着结构的传力路径及整体构型.因此,本文在图6(a)初始布局及形状误差函数上限 0.01 mm^2 基础上改变 V_0 范围为 $30\% \sim 80\%$,进一步研究其影响规律.如图11所示,当材料用量约束上限 V_0 仅为 30% 时,传力路径简化为细杆形式,材料精简在主传力路径上.但由于材料约束过强导

致主传力路径断裂、刚度过弱;随着材料用量约束上限的提高,材料逐渐在中间部位堆积,并沿主传力路径增强;当材料用量约束上限 V_0 提高到 70% 时,结构刚度进一步增大,但是传力路径中出现复杂的细枝、角片构型,且材料在结构中间部位过度堆积,利用率低.

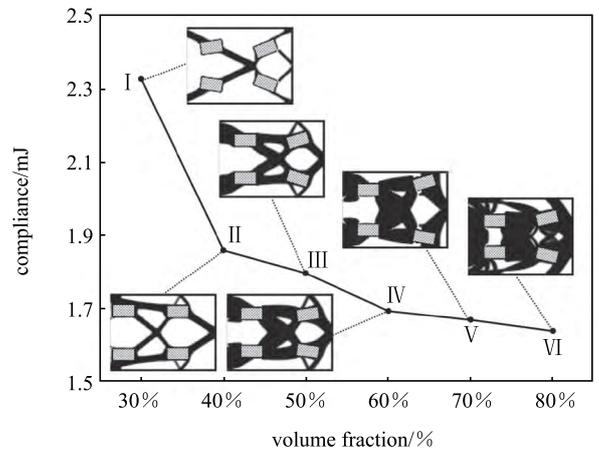


图11 体分比对结构应变能和结构构型的影响

Fig. 11 Compliance energy and structure optimized design under different volume fractions

5 结论

(1) 提出了精确变形下压电智能结构的协同优化设计新方法,通过定义与测量点目标位移权重相关的形状误差函数控制结构的精确变形,采用协同优化设计方法可同时实现压电驱动器位置、角度更新及基体结构拓扑构型优化.本方法拓展了压电智能结构系统的整体式优化设计方法,能够有效控制压电智能结构的精确变形.

(2) 完成了压电智能悬臂板弯曲变形的协同优化设计,通过数值算例验证了所提方法的正确性,优化设计结果获得了新的压电驱动器布局 and 清晰的基体结构拓扑构型,两类设计因素共同构成压电智能悬臂板的传力路径,实现结构的精确变形.进一步讨论了压电驱动器不同初始布局对结构构型的影响,基于压电驱动器不同初始布局能够获得不同的优化构型,同时能为工程设计提供更多可供选择的设计方案.此外,深入分析了精确变形、体分比约束对于结构优化构型和整体性能的影响,发现并分析了优化过程中由于约束定义不合理将可能导致的结构设计畸变现象.

参 考 文 献

- 1 Andoh F, Washington G, Yoon H, et al. Efficient shape control of distributed reflectors with discrete piezoelectric actuators. *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures*, 2004, 15(1): 3-15
- 2 Barrett R. Active plate and wing research using EDAP elements. *Smart Materials and Structures*, 1992, 1(3): 214
- 3 Milojević AP, Pavlović ND. Development of a new adaptive shape morphing compliant structure with embedded actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2016, 21(10): 1306-1328
- 4 Saggere L, Kota S. Static shape control of smart structures using compliant mechanisms. *AIAA Journal*, 1999, 37(5): 572-578
- 5 Sofla AYN, Meguid SA, Tan KT, et al. Shape morphing of aircraft wing: Status and challenges. *Materials and Design*, 2010, 31(3): 1284-1292
- 6 Jani JM, Leary M, Subic A, et al. A review of shape memory alloy research, applications and opportunities. *Materials and Design*. 2014, 56(56): 1078-1113
- 7 Achuthan A, Keng AK, Ming WC. Shape control of coupled nonlinear piezoelectric beams. *Smart materials and structures*, 2001, 10(5): 914
- 8 Chandrashekhara K, Varadarajan S. Adaptive shape control of composite beams with piezoelectric actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1997, 8(2): 112-124
- 9 Chee C, Tong LY, Steven G. A buildup voltage distribution (BVD) algorithm for shape control of smart plate structures. *Computational Mechanics*, 2000, 26(2): 115-128
- 10 Koconis DB, Kollar LP, Springer GS. Shape control of composite plates and shells with embedded actuators. II. Desired shape specified. *Journal of Composite Materials*, 1994, 28(3):262-285
- 11 Sun DC, Tong LY. Static shape control of structures using nonlinear piezoelectric actuators with energy constraints. *Smart Materials and Structures*, 2004, 13(5): 1059
- 12 Chee C, Tong LY, Steven GP. Piezoelectric actuator orientation optimization for static shape control of composite plates. *Composite Structures*, 2002, 55(2): 169-184
- 13 Nguyen Q, Tong L. Shape control of smart composite plate with non-rectangular piezoelectric actuators. *Composite Structures*, 2004, 66(1-4): 207-214
- 14 Agrawal BN, Treanor KE. Shape control of a beam using piezoelectric actuators. *Smart Materials and Structures*, 1999, 8(6): 729
- 15 Bruch Jr JC, Sloss JM, Adali S, et al. Optimal piezo-actuator locations/lengths and applied voltage for shape control of beams. *Smart Materials and Structures*, 2000, 9(2): 205
- 16 Sun DC, Tong LY. Design optimization of piezoelectric actuator patterns for static shape control of smart plates. *Smart Materials and Structures*, 2005, 14(6): 1353
- 17 Sigmund O, Maute K. Topology optimization approaches. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, 48(6): 1031-1055
- 18 Deaton JD, Grandhi RV. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, 49(1): 1-38
- 19 Zhu JH, Zhang WH, Xia L. Topology optimization in aircraft and aerospace structures design. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2015
- 20 Kögl M, Silva EILC. Topology optimization of smart structures: design of piezoelectric plate and shell actuators. *Smart Materials and Structures*, 2005, 14(2): 387
- 21 Kang Z, Tong LY. Topology optimization-based distribution design of actuation voltage in static shape control of plates. *Computers and Structures*, 2008, 86(19-20): 1885-1893
- 22 Luo QT, Tong LY. Design and testing for shape control of piezoelectric structures using topology optimization. *Engineering Structures*, 2015, 97: 90-104
- 23 Agrawal SK, Tong D, Nagaraja K. Modeling and shape control of piezoelectric actuator embedded elastic plates. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1994, 5(4): 514-521
- 24 Kang Z, Wang R, Tong LY. Combined optimization of bi-material structural layout and voltage distribution for in-plane piezoelectric actuation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(13-16): 1467-1478
- 25 Luo Z, Luo QT, Tong LY, et al. Shape morphing of laminated composite structures with photostrictive actuators via topology optimization. *Composite Structures*, 2011, 93(2): 406-418
- 26 Carbonari RC, Silva ECN, Nishiwaki S. Optimum placement of piezoelectric material in piezoactuator design. *Smart Materials and Structures*, 2007, 16(1): 207
- 27 Mukherjee A, Joshi S. Piezoelectric sensor and actuator spatial design for shape control of piezolaminated plates. *AIAA Journal*, 2002, 40(6): 1204-1210
- 28 Wang YQ, Luo Z, Zhang XP, et al. Topological design of compliant smart structures with embedded movable actuators. *Smart Materials and Structures*, 2014, 23(4) 045024
- 29 Gao HH, Zhu JH, Zhang WH, et al. An improved adaptive constraint aggregation for integrated layout and topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, 289: 387-408
- 30 Zhu JH, Zhang WH, Beckers P. Integrated layout design of multi-component system. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, 78(6): 631-651
- 31 Zhu JH, Zhang WH, Beckers P, et al. Simultaneous design of components layout and supporting structures using coupled shape and topology optimization technique. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2008, 36(1): 29-41
- 32 Luo Z, Tong LY, Luo JZ, et al. Design of piezoelectric actuators using a multiphase level set method of piecewise constants. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(7): 2643-2659
- 33 Zillober C. A globally convergent version of the method of moving asymptotes. *Structural Optimization*, 1993
- 34 Sigmund O, Petersson J. Numerical instabilities in topology optimization : A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, 1998, 16(1): 68-75
- 35 Zhu JH, Gao HH, Zhang WH, et al. A multi-point constraints based integrated layout and topology optimization design of multi-component systems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2015, 51(2): 397-407