第 49 卷 第 1 期 力 学 学 报 Vol. 49，No. 1
2017 年 1 月 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics Jan.，2017

动力学与控制

一类二维非自治离散系统中的复杂簇发振荡结构[1)]

陈振阳 韩修静[2)] 毕勤胜

(江苏大学土木工程与力学学院，江苏镇江 212013)

摘要 簇发振荡是多时间尺度系统复杂动力学行为的典型代表，簇发振荡的动力学机制与分类问题是簇发研究的重要问题之一，但当前学者们所揭示的簇发振荡的结构大多较为简单. 研究以非自治离散 Duffing 系统为例，探讨具有复杂分岔结构的新型簇发振荡模式, 并将其分为两大类，一类经由 Fold 分岔所诱发的对称式簇发，另一类经由延迟倍周期分岔所诱发的非对称式簇发. 快子系统的分岔表现为典型的含有两个 Fold 分岔点的 S 形不动点曲线，其上、下稳定支可经由倍周期 (即 Flip) 分岔通向混沌. 当非自治项 (即慢变量) 穿越 Fold 分岔点时，系统的轨线可以向上、下稳定支的各种吸引子 (例如，周期轨道和混沌) 进行转迁，因此得到了经由 Fold 分岔所诱发的各种对称式簇发；而当非自治项无法穿越 Fold 分岔点，但可以穿越 Flip 分岔点时，系统产生了延迟 Flip 分岔现象. 基于此，得到了经由延迟 Flip 分岔所诱发的各种非对称簇发. 特别地，文中所报道的簇发振荡模式展现出复杂的反向 Flip 分岔结构. 研究结果表明，这与非自治项缓慢地反向穿越快子系统的 Flip 分岔点有关. 研究结果丰富了离散系统簇发的动力学机理和分类.

关键词 离散 Duffing 系统，复杂的簇发振荡模式，延迟 Flip 分岔，反向 Flip 分岔结构

中图分类号：O322 **文献标识码**：A doi：10.6052/0459-1879-16-267

COMPLEX BURSTING OSCILLATION STRUCTURES IN A TWO-DIMENSIONAL NON-AUTONOMOUS DISCRETE SYSTEM[1)]

Chen Zhenyang Han Xiujing[2)] Bi Qinsheng

(*Faculty of Civil Engineering and Mechanics*，*Jiangsu University*，*Zhenjiang* 212013，*Jiangsu*，*China*)

Abstract Bursting oscillations are the archetypes of complex dynamical behaviors in systems with multiple time scales, and the problem related to dynamical mechanisms and classifications of bursting oscillations is one of the important problems in bursting research. However, up to now, most of the structures of bursting revealed by researchers are relatively simple. In this paper, we take the non-autonomous discrete Duffing system as an example to explore novel bursting patterns with complex bifurcation structures, which are divided into two groups, i.e., symmetric bursting induced by Fold bifurcations and asymmetric bursting induced by delayed Flip bifurcations. Typically, the fast subsystem exhibits an S-shaped fixed point curve with two Fold points, and the stable upper and lower branches evolve into chaos by a cascade of Flip bifurcations. When the non-autonomous term (i.e., the slow variable) passes through Fold points, transitions to various attractors (e.g., periodic orbits and chaos) on the stable branches may take place, which accounts for the appearance of Fold-bifurcation-induced symmetric bursting patterns. If the non-autonomous term is not able to pass through Fold points, but to go through Flip points, delayed Flip bifurcations can be observed. Based on this, delayed-Flip-

2016–09–22 收稿，2016–11–06 录用, 2016–11–11 网络版发表.

1) 国家自然科学基金 (11572141, 11632008, 11502091, 11472115, 11402226) 和江苏大学青年骨干教师培养工程资助项目.

2) E-mail：xjhan@mail.ujs.edu.cn

引用格式：陈振阳，韩修静，毕勤胜. 一类二维非自治离散系统中的复杂簇发振荡结构. 力学学报, 2017, 49(1): 165-174
Chen Zhenyang, Han Xiujing, Bi Qinsheng. Complex bursting oscillation structures in a two-dimensional non-autonomous discrete system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(1): 165-174

bifurcation-induced asymmetric bursting patterns are obtained. In particular, the bursting patterns reported here exhibit complex structures containing inverse Flip bifurcations, which has been found to be related to the fact that the non-autonomous term slowly passes through Flip points of the fast subsystem in an inverse way. Our results enrich dynamical mechanisms and classifications of bursting in discrete systems.

Key words discrete Duffing system, complex bursting patterns, delayed Flip bifurcations, inverse Flip bifurcation structures

引 言

诸如神经元的簇放电活动 [1-3]、化工生产中液体的流动特性 [4]、反应物的反应速率 [5-6] 和浓度 [7] 的变化、湍流的脉动分析 [8]、生物代谢过程中的变构效应 [9]、环境因素对农作物生长的影响 [10] 等实际问题，很难用单一时间尺度的动力学模型来描述，必须采用含多个时间尺度的耦合模型加以刻画. 与一般的非线性系统相比，多时间尺度耦合系统具有独特的复杂动力学行为，比如所谓的簇发振荡 (bursting oscillations). 簇发振荡的基本单元被称为振荡簇，所谓振荡簇，即去极化波形上的一系列动作电位 [11]，故对簇发振荡而言，其特征在于在每一演化周期中，小幅振荡与大幅振荡的交替出现. 现有的研究表明，簇发振荡通常是不同时间尺度耦合作用的产物 [12]，而其中的耦合作用机制可用 Rinzel 的快慢分析法 [13] 加以解释. 该方法随后被 Izhikevich[1] 用在簇发的分类研究中，在理论上极大拓展了不同时间尺度之间各种可能的耦合作用机制. 基于 Rinzel 的快慢分析和 Izhikevich 的分类工作，国内外学者从理论 [14-15]、数值 [3,16] 和实验 [3,17] 等方面对不同时间尺度的耦合系统，尤其是其中的多时间尺度簇发振荡模式，做了系统、深入的研究，取得了丰硕的成果.

近年来，基于离散系统的多时间尺度耦合效应逐渐受到了学者们的广泛关注. Channell 等 [18] 指出，采用 Poincaré 映射可将连续时间系统约化为一维 Poincaré 映射；然后，通过对 Poincaré 映射的分析来揭示原系统中的簇发振荡的动力学特性和转迁机制. Izhikevich 等 [19] 指出，用离散映射去实现连续系统中的簇发振荡在理论上是可行的. 随后，Courbage 等 [20] 提出了一个二维映射，以此再现了真实神经系统中包括簇发在内的各种放电模式. 而 Maslennikov 等 [21-22] 的研究进一步表明，离散映射是研究单个神经元乃至复杂神经网络的有效工具. 基于前人的研究工作，特别是 Rinzel 的快慢分析法，文献 [19] 利用分岔理论系统地探讨了一维和二维离散系统中各种可能的簇发振荡模式，并对它们进行了分类.

然而，需要指出的是，到目前为止，大部分已报道的离散簇发振荡模式均较为简单. 这主要表现在两个方面，一是与连续的尖峰 (repetitive spiking) 相对应的激发态的分岔模式较为简单. 对于连续尖峰内部仍有分岔的情形，相关文献少有涉及；二是所报道的激发态通常是周期轨道, 对于激发态是非周期 (例如，混沌) 的情形，鲜有报道. 基于此，考虑受扰动的 Duffing 映射 [23]

$$\left.\begin{aligned} X_{n+1} &= Y_n \\ Y_{n+1} &= -bX_n + aY_n - Y_n^3 + Z_n \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 a, b 是实参数, Z_n 是慢变的扰动项. 为了便于分析，假设 Z_n 是周期扰动，即 $Z_n = F\cos(\omega n)$, 其中 F 为扰动项的振幅，而频率 ω 远低于系统的固有频率 ω_0，即 $\omega \ll \omega_0$. 本文以系统 (1) 为例，旨在探讨复杂的簇发振荡模式及其诱发机制. 说明系统在由激发态向沉寂态转迁之前可能会发生多次分岔，因此簇发振荡可以呈现出复杂的分岔结构. 此外，激发态不仅可以是周期振荡，也可以是混沌态，因此簇发振荡可以展现复杂的振荡形式，即在簇发振荡中能够观测到混沌式的振动簇.

1 快子系统的分岔分析

由于扰动项的频率远远低于系统的固有频率，因此在较慢的尺度上演化，而未受扰的 Duffing 映射则在相对较快的尺度上演化. 显然，受扰系统 (1) 是一个典型的快慢系统，它由快、慢子系统耦合而成. 快子系统由如下映射给出

$$\left.\begin{aligned} X_{n+1} &= Y_n \\ Y_{n+1} &= -bX_n + aY_n - Y_n^3 + \beta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中，$\beta = Z_n$ 是控制参数；而慢子系统 (慢变量) 则由 $Z_n = F\cos(\omega n)$ 刻画.

一般说来，簇发振荡因轨线在快子系统的吸引子之间相互转迁而产生，这种转迁是由慢变量穿越快子系统的分岔点加以调控 [1,24]. 因此，快子系统的稳定性和分岔行为对簇发振荡的产生起决定性作用. 基于此，本部分探讨快子系统 (2) 的稳定性和分岔行为.

易知，当 $\beta = 0$ 时，快子系统有 3 个不动点：$F_{\pm} = (\pm\sqrt{-1-b+a}, \pm\sqrt{-1-b+a})$ 和 $F_0 = (0,0)$. 进一步地，若 $a > 2$ 且 $0 < b < 2/3$，此时通过分析与各不动点相关的特征方程的根可知：$F_{\pm}$ 是稳定的，而 F_0 是不稳定的. 计算表明，各不动点处的特征多项式与参数 β 有关，因此随着参数 β 的变化，上述不动点的个数和稳定性可能会发生改变. 然而，考虑到这些特征多项式均较为复杂，故在此采用数值方法对快子系统的稳定性和分岔进行分析. 此外，为了便于分析，我们固定 $a = 2.2$ (除非特别说明).

为了直观地了解系统的分岔行为，图 1 给出了快子系统关于参数 β 的单参数分岔图，其中参数 b 固定在 $b = 0.35$. 图中 $\mathrm{FB}^{\pm}$ 代表不动点 $F_{\pm}$ 的 Fold 分岔; $\mathrm{PD}^{\pm}_{n-2n}(n = 1,2)$ 代表上、下半支周期 n 到周期 $2n$ 的 Flip 分岔. 如图所示，当 β 从 0 出发穿越 FB^- 时，吸引子 F_- 与排斥子 F_0 碰撞、消失，即发生了 Fold 分岔. 随着 β 的不断增大，吸引子 F_+ 因倍周期 (即 Flip) 分岔逐渐演化为混沌, 而当 β 从 0 出发不断减小时，可以观测到类似的动力学演化行为.

为了进一步揭示系统的分岔行为，图 2 给出了快子系统在平面 (β, b) 上的两参数分岔集，其中各分岔曲线的含义与图 1 相同. 注意到快子系统具有对称性：$(X_n, Y_n, \beta) \to (-X_n, -Y_n, -\beta)$，即快子系统的稳定性

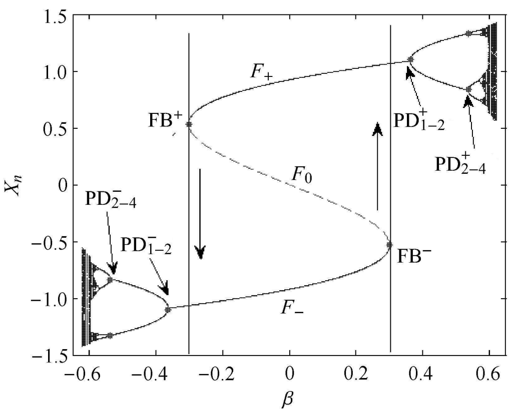


图 1 快子系统关于单参数 β 的分岔图

Fig. 1 One parameter bifurcation diagram of the fast sub-system with respect to β

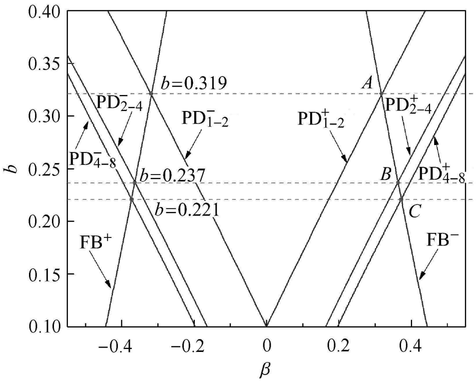


图 2 快子系统在 (β, b) 平面上的分岔集

Fig. 2 Bifurcation set of the fast system on the plane (β, b)

和分岔行为关于 $\beta = 0$ 对称. 因此，如果 $\beta = \beta_1$ 时，快子系统存在某种稳定性或分岔行为，那么当 $\beta = -\beta_1$ 时，快子系统必然存在着同样的稳定性或分岔行为 (见图 1 和图 2).

如图 2 所示，A, B, C 分别是 Fold 分岔曲线和倍周期分岔曲线的交点，它们的纵坐标依次是 $b_A = 0.319$, $b_B = 0.237$, $b_C = 0.221$. 过点 A, B, C 作三条水平线，它们将参数平面划分为 I, II, III, IV 四个区域，对应着快子系统不同的动力学行为.

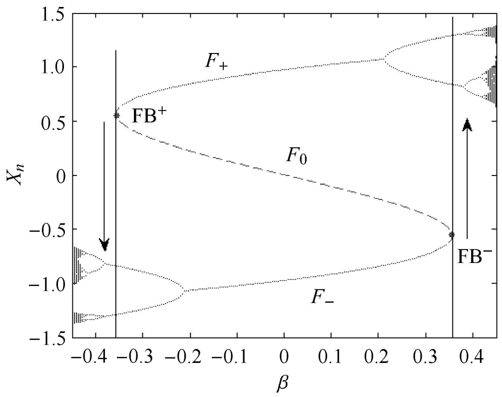
易知，图 1 所示的分岔图是区域 I 中分岔行为的典型代表，其特征是在 Fold 点附近可以观测到由两个不动点吸引子构成的双稳态. 因此，Fold 分岔将诱发从一个不动点吸引子 (如 F_+) 到另一个不动点吸引子 (如 F_-) 的转迁. 然而，如图 2 所示，当参数 b 不断减小时，Fold 分岔值逐渐增大，而各 Flip 分岔值不断减小. 特别地，当 Fold 分岔曲线落在两条 Flip 分岔曲线之间时，Fold 点附近的双稳态会发生定性的变化. 因此，由 Fold 分岔所诱发的转迁必然也会随之定性地改变. 基于此，接下来我们探讨几类典型的转迁模式.

情形 1：从不动点向周期 2 吸引子的转迁. 这种转迁模式对应着参数 b 属于区域 II 时的情形. 图 3(a) 给出了区域 II 中典型的分岔行为. 可见，Fold 分岔点附近的双稳态已经发生了定性的变化，即不动点与周期 2 轨道共存. 因此，Fold 分岔诱发了系统从不动点吸引子向周期 2 轨道的转迁.

情形 2：从不动点向周期 4 吸引子的转迁. 当参数 b 属于区域 III 时，可以得到另一种不同的转迁模式，即由 Fold 分岔所诱发的从不动点吸引子向周期 4 轨道的转迁. 图 3(b) 给出了区域 III 中典型的分岔图. 由于不动点吸引子与周期 4 轨道在 Fold 点附近

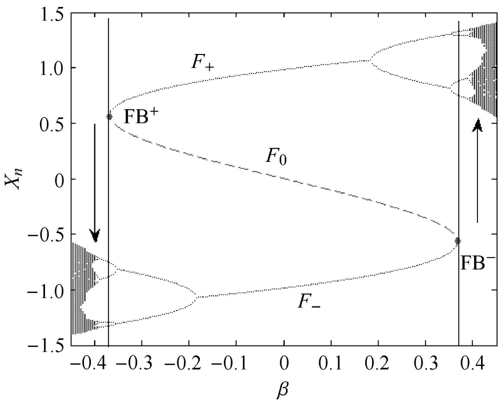
共存，因此 Fold 分岔诱发了从不动点向周期 4 吸引子的转迁. 由于不动点吸引子经由 Flip 分岔通向混沌，因此在 $PD^-_{4\text{–}8}$ 的左侧区域以及 $PD^+_{4\text{–}8}$ 的右侧区域存在着间距越来越狭窄的无数条 Flip 分岔曲线. 这些 Flip 曲线与周期 2^n $(n \geqslant 3)$ 等具有较高周期的轨道相对应，并逐渐将周期轨道以 Flip 分岔的方式引向混沌. 因此，随着参数 b 进入 IV 区并不断减小，可以得到从不动点向高周期轨道 2^n $(n \geqslant 3)$ 甚至是混沌吸引子的转迁.

情形 3：从不动点向周期 8 吸引子的转迁. 当 $b = 0.22$ 时，图 3(c) 给出了区域 IV 中的一种典型的分岔转迁行为. 可见，在 Fold 分岔点附近，不动点吸引子与周期 8 吸引子共存，因此由 Fold 分岔诱发了从不动点向周期 8 轨道的转迁.



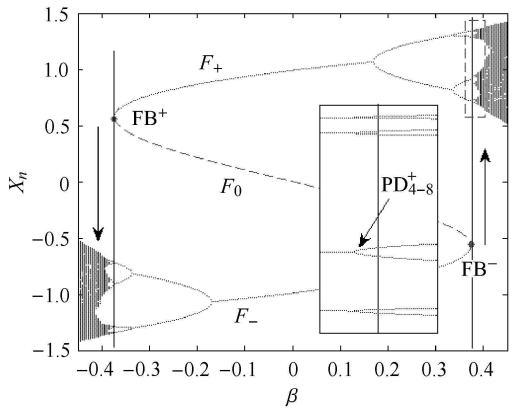
(a) 向周期 2 吸引子的转迁, $b = 0.25, \beta_{FB^+} = -0.356, \beta_{FB^-} = 0.356$

(a) Transitions to period-2 attractor, $b = 0.25, \beta_{FB^+} = -0.356$, $\beta_{FB^-} = 0.356$



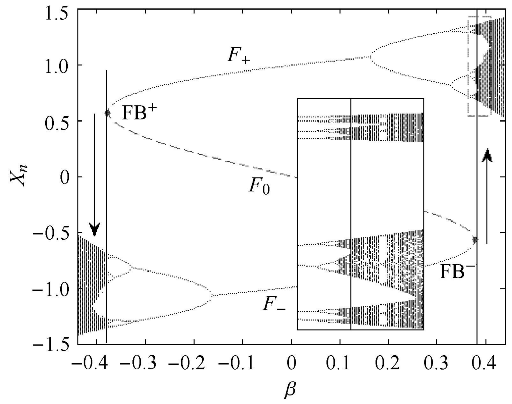
(b) 向周期 4 吸引子的转迁, $b = 0.23, \beta_{FB^+} = -0.369, \beta_{FB^+} = -0.369$

(b) Transitions to period-4 attractor, $b = 0.23, \beta_{FB^+} = -0.369$, $\beta_{FB^+} = -0.369$



(c) 向周期 8 吸引子的转迁, $b = 0.22, \beta_{FB^+} = -0.375, \beta_{FB^-} = 0.375$

(c) Transitions to period-8 attractor, $b = 0.22, \beta_{FB^+} = 0.375$, $\beta_{FB^-} = 0.375$



(d) 向混沌吸引子的转迁, $b = 0.215, \beta_{FB^+} = -0.378, \beta_{FB^-} = 0.378$

(d) Transitions to chaotic attractor, $b = 0.215, \beta_{FB^+} = -0.378$, $\beta_{FB^-} = 0.378$

图 3 映射 (2) 关于参数 β 的典型单参数分岔图

Fig. 3 Typical one parameter bifurcation diagrams of the map (2) with respect to β

情形 4：从不动点向混沌吸引子的转迁. 在区域 IV 内继续调整 b 的值，可得如图 3(d) 所示的向混沌吸引子转迁的模式. 在 Fold 分岔点附近，系统处于不动点吸引子与混沌吸引子共存的双稳态，进而会出现由 Fold 分岔所诱发的向混沌吸引子的转迁.

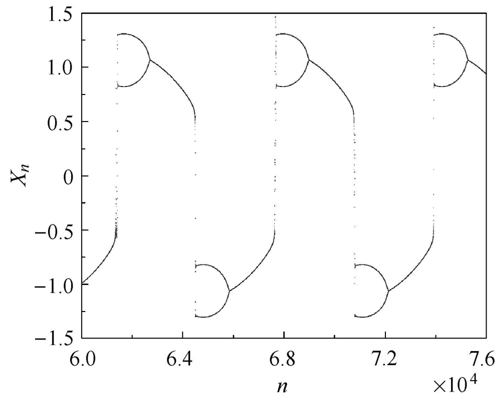
2 对称式簇发

前面已经探讨了快子系统的分岔行为，分析表明：由于在 Fold 点附近不动点吸引子可与多种周期轨道甚至混沌共存，因此 Fold 分岔可以诱发从不动点向不同类型吸引子的转迁. 基于此，本部分进一步探讨与这些转迁相关的各种簇发振荡模式.

2.1 对称式 “Fold/反向 Flip” 簇发

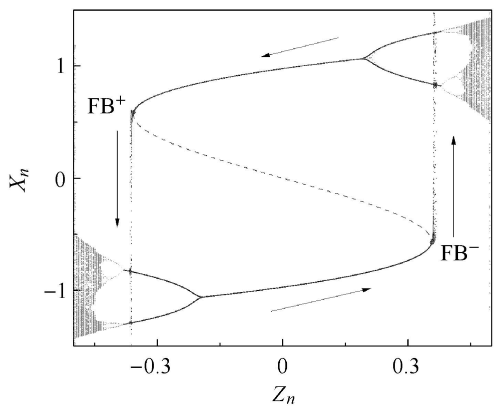
当 b 位于 II 区时，系统能够产生对称式 “Fold/反向 Flip” 簇发. 不失一般性，考虑 $b = 0.25$ 的情形来解释这种簇发振荡的产生机理. 注意到当 $Z_n = F\cos(\omega n)$ 处于 β_{FB^+} 与 β_{FB^-} 之间时，系统处于双稳态，因此要实现轨线在不同吸引子间的转迁, 就必须使 Z_n 能够穿越 $\beta_{FB^\pm}$. 由数值计算可知，$\beta_{FB^-} = 0.356$，故这里选取 $Z_n = 0.38\cos(\omega n)$，其振幅略大于 β_{FB^-}. 图 4(a) 给出了系统在该参数条件下的簇发行为. 为进一步阐明系统轨线随慢变量的变化趋势，在此将 Z_n 视为广义变量, 给出相应的转化相图 [25-26], 并将其与分岔图叠加，如图 4(b) 所示.

从图 4(b) 中可以看出，当 Z_n 从 0 出发逐渐增大至 β_{FB^-} 时, 原本处于下半支的轨线会由于 Fold 分岔而转迁到上半支的周期 2 吸引子，从而使系统进入激发态. Z_n 在到达最大值 0.38 后，开始逐渐减小，



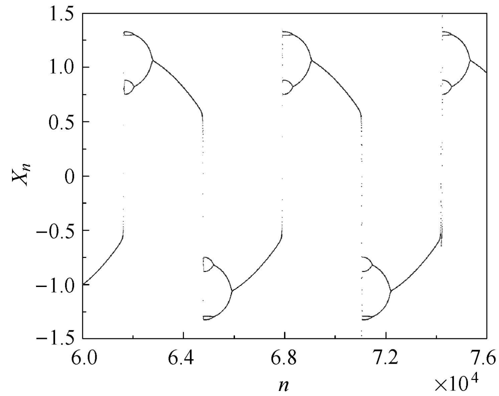
(a) 对称式 “Fold/反向 Flip” 簇发的时间序列，$b = 0.25$, $Z_n = 0.38\cos(0.001n)$

(a) Time series of symmetric “ Fold/inverse Flip” bursting, $b = 0.25$, $Z_n = 0.38\cos(0.001n)$



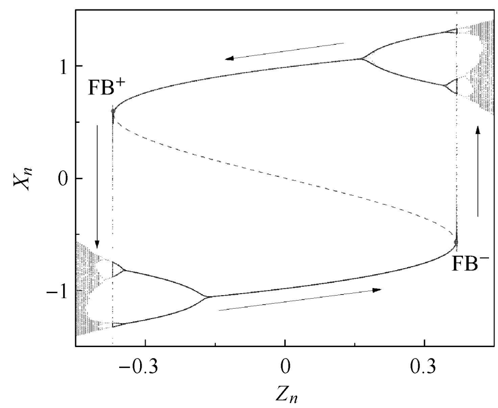
(b) 对称式 “Fold/反向 Flip” 簇发的快慢分析

(b) Fast-slow analysis of symmetric “ Fold/inverse Flip” bursting



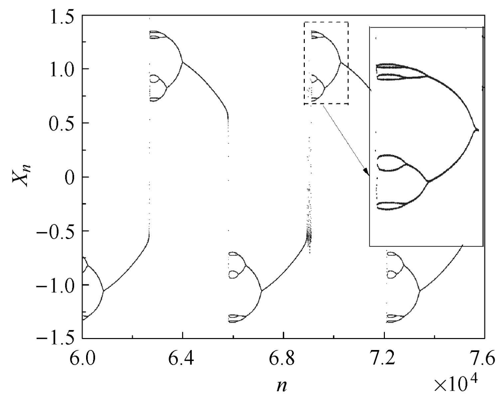
(c) 对称式 “Fold/二重反向 Flip” 簇发的时间序列，$b = 0.23$, $Z_n = 0.37\cos(0.001n)$

(c) Time series of symmetric “ Fold/double inverse Flip” bursting, $b = 0.23$, $Z_n = 0.37\cos(0.001n)$



(d) 对称式 “Fold/二重反向 Flip” 簇发的快慢分析

(d) Fast-slow analysis of symmetric “ Fold/double inverse Flip” bursting

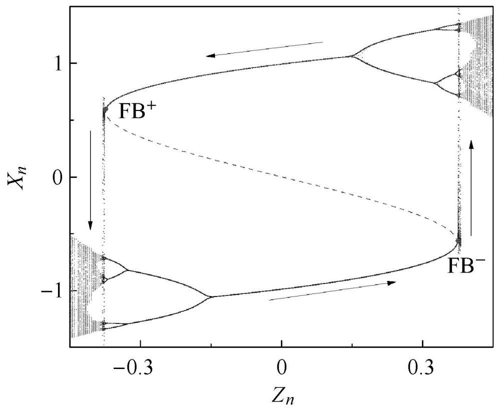


(e) 对称式 “Fold/多重反向 Flip” 簇发的时间序列，$b = 0.22$, $Z_n = 0.381\cos(0.001n)$

(e) Time series of symmetric “ Fold/multiple inverse Flip” bursting, $b = 0.22$, $Z_n = 0.381\cos(0.001n)$

图 4 不同的对称簇发

Fig. 4 Different symmetric bursting



(f) 对称式 "Fold/多重反向 Flip" 簇发的快慢分析，插图表明了 "多重反向 Flip" 分岔的结构

(f) Fast-slow analysis of symmetric " Fold/multiple inverse Flip" bursting, the insert gives a view of the structure of "multiple inverse Flip" bifurcations

图 4 不同的对称簇发 (续)

Fig. 4 Different symmetric bursting (continued)

并 "反向" 地穿过 PD^+_{1-2}，使得激发态终止，系统进入沉寂态 F_+; 随着 Z_n 继续减小，直至越过 FB^+，双稳态再次被破坏，轨线跃迁到下半支的周期 2 吸引子; 在此之后，系统通过与前述过程相似的方式再次回到沉寂态，并进入下一个周期的演化. 此过程中，系统由沉寂态进入激发态是通过 Fold 分岔，而激发态的终止则是通过反向 Flip 分岔. 根据文献 [1] 中的分类方法，同时考虑到对称性，这种簇发行为可以归类为对称式 "Fold/反向 Flip" 簇发.

2.2 对称式 "Fold/二重反向 Flip" 簇发

当 b 位于 III 区时，可以得到另一种不同的簇发形式. 考虑 $b = 0.23$ 的情况，此时 $\beta_{FB^-} = 0.369$. 选取 $Z_n = 0.37\cos(\omega n)$, 显然 Fold 分岔将会发生，这预示着簇发将会出现.

图 4(c) 给出了含二重反向 (double inverse) Flip 分岔结构的簇发模式，相应的转化相图为图 4(d). 当 Z_n 越过 FB^- 后，轨线会跃迁到周期 4 吸引子，该吸引子随后经过二重反向 Flip 分岔演变为 F_+. 紧接着系统经历与之对称的演变，并进入下一周期. 按之前的分类方法，这种激发态为周期 4 轨道的簇发模式可命名为对称式 "Fold/二重反向 Flip" 簇发.

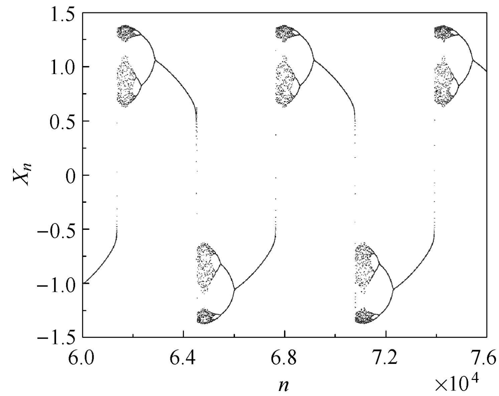
2.3 对称式 "Fold/多重反向 Flip" 簇发

由备注 2 知，若 b 位于 IV 区, 系统可产生激发态为周期 8 等高周期轨道乃至混沌的簇发振荡. 如取 $b = 0.22$, $F = 0.381$, 通过数值模拟可发现，系统在通过 Fold 分岔由沉寂态转迁到周期 8 轨道后，经由多重反向 Flip 分岔演变到沉寂态. 对该簇发振荡模式，可将其称作对称式 "Fold/多重反向 Flip" 簇发, 见图 4(e) 和图 4(f).

2.4 对称式 "Fold/级联反向 Flip" 簇发

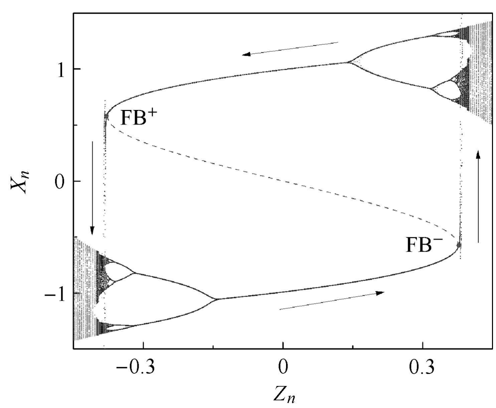
根据前面所做的分析，在区域 IV 中继续调整 b 的值，可以得到激发态为混沌乃至周期窗口的簇发模式. 图 5 给出了混沌激发态的簇发振荡模式，其中 $b = 0.215$，$F = 0.4$，快子系统分岔行如图 3(d). 当 Z_n 越过 Fold 分岔点后，系统转迁到混沌状态，随后系统又经过一系列反向 Flip 分岔回到沉寂态，故可将其命名为对称式 "Fold/级联反向 Flip" 簇发.

进一步的数值模拟显示，在快子系统分岔图中,



(a) 时间序列

(a) Time series



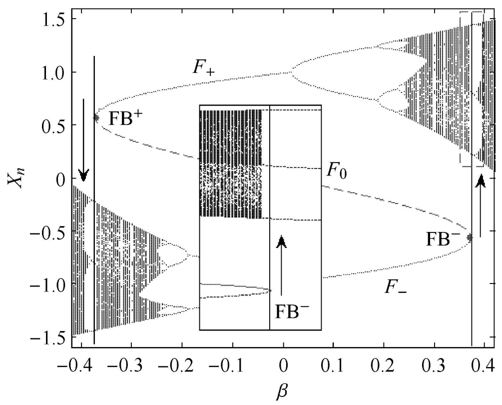
(b) 快慢分析

(b) Fast-slow analysis

图 5 对称式 "Fold/级联反向 Flip" 簇发, $b = 0.215$, $Z_n = 0.4\cos(0.001n)$

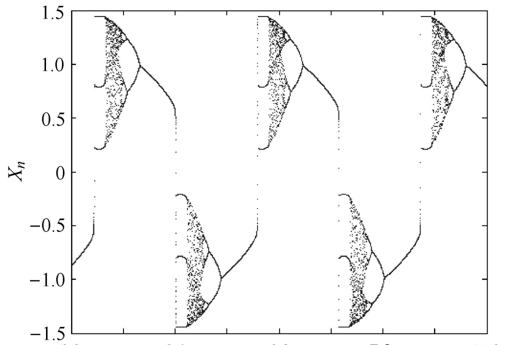
Fig. 5 Symmetric "Fold/a cascade of inverse Flip" bursting, $b = 0.215$, $Z_n = 0.4\cos(0.001n)$

存在着一些使系统展现出周期性的孤立区间，将混沌区分割成若干段，这意味着可能存在与不动点共存的周期窗口. 例如，取 $a = 1.975$, $b = 0$, $F = 0.38$ 时，快子系统的单参数分岔图为图 6(a), 簇发行为则如图 6(b) 所示. 当 Z_n 越过 FB$^{\pm}$ 后，系统从沉寂态转迁到周期 3 轨道，并迅速进入混沌，之后又通过一系列反向 Flip 分岔演变为沉寂态，从而产生一种分岔结构不同于图 5(a) 的混沌簇发模式.



(a) 快子系统关于 β 的分岔图. 插图表明越过 FB$^{\pm}$ 后，发生了向周期 3 窗口的转迁

(a) Bifurcation diagram of fast sub-system with β. The insert shows that, beyond $FB^{\pm}$, transition to period 3 window may take place



(b) 时间序列

(b) Time serial

图 6　另一种混沌簇发, $a = 1.975$, $b = 0$, $Z_n = 0.38\cos(0.001n)$

Fig. 6　Another chaotic bursting, where $a = 1.975$, $b = 0$, $Z_n = 0.38\cos(0.001n)$

3　非对称式簇发

前面探讨了由 Fold 分岔所诱发的几种复杂簇发振荡模式及其动力学机理，这些簇发振荡模式的产生离不开慢变量对 Fold 分岔点的周期穿越，即要求慢变量具有足够大的振幅. 本文接下来的内容，将探讨慢变量振幅相对较小，即慢变量无法穿越 Fold 分岔点时，系统可能存在的簇发振荡模式.

3.1 “延迟 Flip/反向 Flip” 簇发

图 7 给出了 b=0.2 时, 快子系统关于 β 的单参数分岔图，其中 Fold 分岔值和各 Flip 分岔值分别是 $\beta_{\mathrm{FB}^-} = 0.377$，$\beta^+_{1-2} = 0.141$，$\beta^+_{2-4} = 0.308$，$\beta^+_{4-8} = 0.342$. 我们以此为例，探讨簇发振荡模式的产生. 由于慢变量无法穿越 Fold 分岔点，因此轨线无法在快子系统的上、下稳定支之间来回转迁，即轨线必然会沿某一稳定支 (可以是上半支，也可是下半支)，这由轨线的初值决定演化 [27].

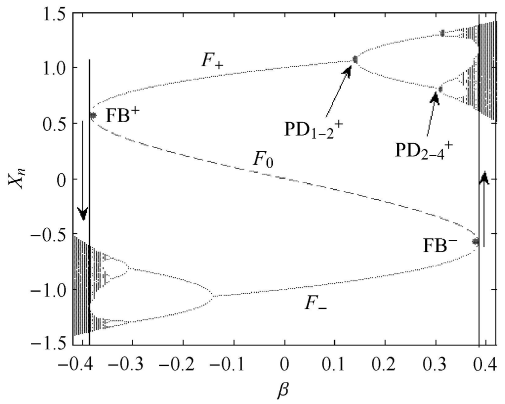
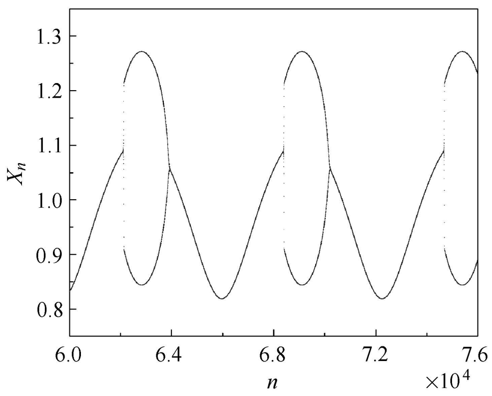


图 7　$b = 0.2$ 时快子系统关于 β 的分岔图

Fig.7　Bifurcation diagram of fast subsystem with β for $b = 0.2$

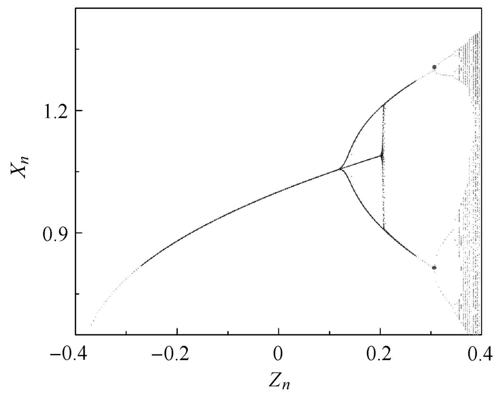
图 8(a) 给出了 $Z_n = 0.27\cos(0.001n)$ 时系统的一种簇发振荡模式. 为了揭示其中的动力学机制，图 8(b) 进一步给出了该簇发的转换相图与分岔图的叠加. 由图 8(b) 可知，当慢变量不断增加、穿越 Flip 分岔点 $\beta^+_{1-2} = 0.141$ 时，系统出现了有趣的延迟分岔现象. 延迟分岔，又称为慢过效应 (slow passage effect) 或记忆效应 [28-29] (memory effect)，是吸引子的一种延迟失稳现象 [30-31]，即当吸引子失稳变成排斥子时，系统的轨线继续在排斥子上停留了一段时间，然后再离开排斥子的现象. 由于延迟的作用，该参数组合下出现了排斥子 F_+ 与周期 2 轨道间的滞后. 因此，当延迟结束时，轨线得以迅速向该周期 2 吸引子转迁，从而导致激发态的出现.

当 Z_n 不断减小，“反向” 越过 Flip 分岔点时，数值计算表明：系统在 $Z_n = 0.126$ 处由周期 2 振荡进入沉寂态. 将其与 Flip 分岔值 $\beta^+_{1-2} = 0.141$ 相比，尽管仍能观察到一定的延迟，但相应延迟量明显小于 “正向” 通过时的情形. 因此，这里只考虑 “正向” 穿



(a) 时间序列

(a) Time series



(b) 快慢分析

(b) Fast-slow analysis

图 8 “延迟 Flip/反向 Flip” 簇发，$b = 0.2$, $Z_n = 0.27\cos(0.001n)$

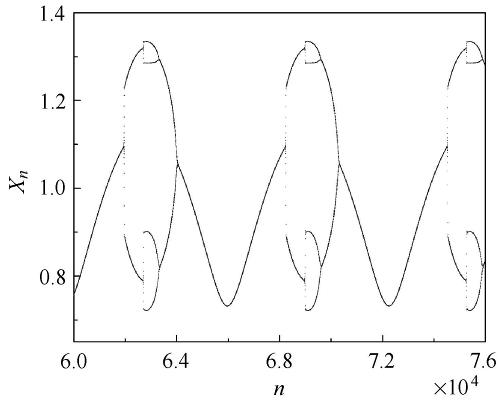
Fig. 8 “Delayed F lip/inverse Flip” bursting, $b = 0.2$, $Z_n = 0.27\cos(0.001n)$

越时的延迟行为，而对 “反向” 的延迟忽略不计. 考虑到系统因延迟 Flip 分岔从沉寂态进入激发态，随后又由反向 Flip 分岔从激发态返回沉寂态，故可以将这种簇发振荡模式命名为 “延迟 Flip/反向 Flip” 簇发.

我们已经看到，延迟 Flip 分岔可以引起系统从排斥子向吸引子的灾难性转迁 (catastrophic transition)，由此得到了由延迟 Flip 分岔诱发的簇发振荡. 接下来，我们简要地分析由延迟 Flip 分岔诱发的其它几类典型的簇发振荡模式，它们与慢变量穿越 Flip 分岔点 β^+_{2-4} 和 β^+_{4-8}，以及混沌区域有关.

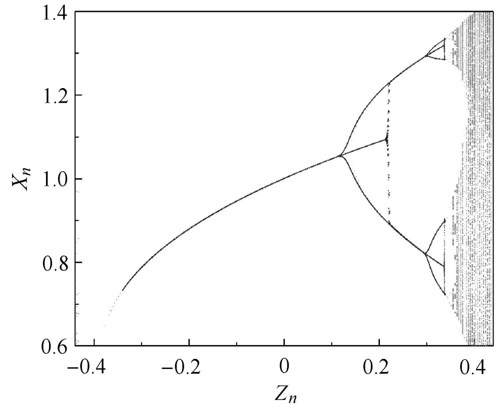
3.2 “双重延迟 Flip/双重反向 Flip” 簇发

当 F=0.34 时，系统可产生 “双重延迟 Flip/双重反向 Flip” 式簇发. 在 Z_n 越过 $\beta^+_{1-2} = 0.141$ 之后，延迟效应使得轨线继续停留在不动点上，直至 $Z_n = 0.215$ 轨线才迅速地转迁到周期 2 轨道. 随后，在 $Z_n = 0.337$ 处, 轨线离开已经失稳的周期 2 轨道，跃迁到周期 4 轨道. 当 Z_n 达到最大值后，通过双重反向 Flip 分岔，系统又回到沉寂态，并进入下一周期，数值模拟结果如图 9.



(a) 时间序列

(a) Time series



(b) 快慢分析

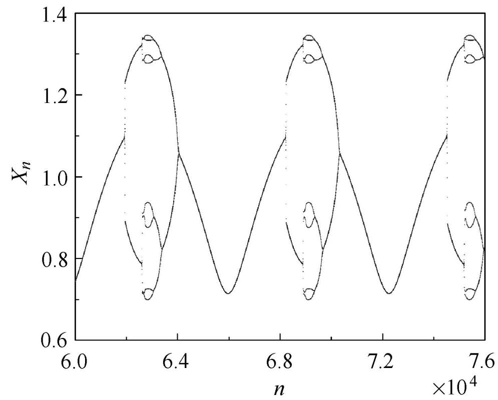
(b) Fast-slow analysis

图 9 “双重延迟 Flip/双重反向 Flip” 簇发, $b = 0.2$, $Z_n = 0.34\cos(0.001n)$

Fig. 9 “Delayed double Flip/double inverse Flip” bursting, $b = 0.2$, $Z_n = 0.34\cos(0.001n)$

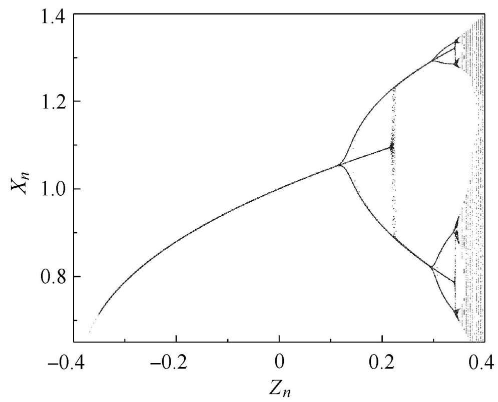
3.3 “多重延迟 Flip/多重反向 Flip” 簇发

如图 10，取 $F = 0.35$，系统可产生 “多重延迟 Flip/多重反向 Flip” 形式的簇发. 分岔延迟使得轨线在 $Z_n = 0.219$ 处离开不动点，突然转迁并一直保持在周期 2 轨道上. 直到 $Z_n = 0.343$ 时，延迟效应使系统离开已经失稳的周期 2 轨道，直接跃迁到周期 8. 当 Z_n 到达最大值后，激发态经由多重反向 Flip 分岔逐级演变为沉寂态，随后系统进入下一周期.



(a) 时间序列

(a) Time series

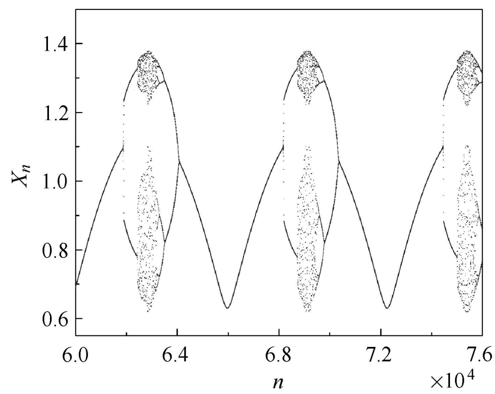


(b) 快慢分析

(b) Fast-slow analysis

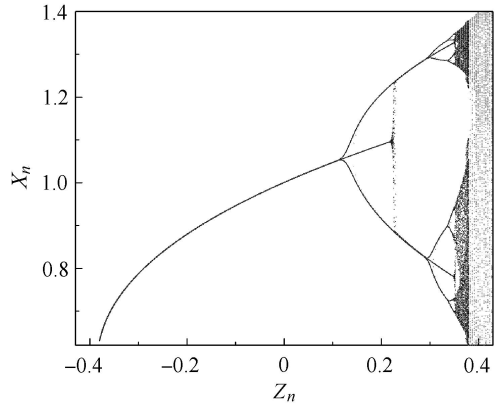
图 10 “多重延迟 Flip/多重反向 Flip” 簇发, $b = 0.2$, $Z_n = 0.35\cos(0.001n)$

Fig. 10 “Delayed multiple Flip/inverse multiple Flip” bursting, $b = 0.2$, $Z_n = 0.35\cos(0.001n)$



(a) 时间序列

(a) Time series



(b) 快慢分析

(b) Fast-slow analysis

图 11 “级联延迟 Flip /级联反向 Flip” 簇发, $b = 0.2$, $Z_n = 0.38\cos(0.001n)$

Fig. 11 “A cascade of delayed Flip /a cascade of inverse Flip” bursting, $b = 0.2$, $Z_n = 0.38\cos(0.001n)$

3.4 “级联延迟 Flip /级联反向 Flip” 簇发

当 $F = 0.38$ 时，轨线先在 $Z_n = 0.222$ 处转迁到周期 2，随后出现的第二次分岔延迟则使系统在 $Z_n = 0.351$ 处直接进入混沌态. 随着 Z_n 到达最大值，系统又通过一系列反向 Flip 分岔回到沉寂态，进而进入下一周期，数值模拟如图 11 所示. 依据前面所采用的分类方法，将其称为 “级联延迟 Flip /级联反向 Flip” 簇发.

4 结 论

本文以离散 Duffing 系统为例，探讨了由于慢变激励的存在而诱发的具有复杂分岔结构的簇发振荡模式. 在 S 形不动点曲线的 Fold 分岔点附近，不动点吸引子可与诸如 2^n 周期或混沌等不同类型的吸引子共存. 研究表明，若慢变激励振幅充分大，以致慢变量能越过 Fold 分岔点时，吸引子的共存会因 Fold 分岔而被破坏. 于是，系统向原先共存的吸引子转迁，由此产生了由 Fold 分岔所诱发的各类对称式簇发. 另一方面，当慢变激励无法越过 Fold 分岔点时，延迟分岔现象形成了不稳定的 2^n 轨道与稳定的 2^{n+1} ($n = 0, 1, 2, \cdots$) 轨道间的滞后. 基于此，得到了由延迟 Flip 分岔所诱发的各种非对称式簇发. 特别的，本文所报道的簇发其 “激发态” 大多由两次以上的反向 Flip 分岔才过渡到 “沉寂态”，从而导致簇发具备多级反向 Flip 分岔这类复杂的结构. 然而，需要指出的是，本文的研究主要针对簇发动力学机制的定性分析，仍有一些与簇发相关的重要问题需进一步探讨，例如簇发中延迟现象的本质以及延迟量的计算

等问题.

参 考 文 献

1 Izhikevich EM. Neural excitability, spiking and bursting. *Int J Bifurcat Chaos*, 2000, 10 (6): 1171-1266

2 Izhikevich EM. Resonance and selective communication via bursts in neurons having subthreshold oscillations. *Bio Systems*, 2002, 67(1-3): 95-102

3 古华光，朱洲，贾冰. 一类新的混沌神经放电的动力学特征的实验和数学模型研究. 物理学报, 2011, 60(10): 1005051-10050512 (Gu Huaguang, Zhu Zhou, Jia Bing. Dynamics of a novel chaotic neural firing pattern discovered in experiment and simulated in mathematical model. *Acta Phys Sin*, 2011, 60(10): 1005051-10050512 (in Chinese))

4 王帅, 于文浩, 陈巨辉等. 鼓泡流化床中流动特性的多尺度数值模拟. 力学学报，2016, 48(3): 585-592 (Wang Shuai, Yu Wenhao, Chen Juhui, et al. Multi-scale simulation on hydrodynamic characteristics in bubbling fluidized bed. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(3): 585-592 (in Chinese))

5 Li XH, Bi QS. Single-Hopf Bursting in periodic perturbed Belousov—Zhabotinsky reaction with two time scales. *Chinese Phys Lett*, 2013, 30(1): 10503-10506

6 Li XH, Zhang C, Yu Y, et al. Periodic switching oscillation and mechanism in a periodically switched BZ reaction. *Sci China E*, 2012, 55(10): 2820-2828

7 Lashina EA, Chumakova NA, Chumakov GA, et al. Chaotic dynamics in the three-variable kinetic model of CO oxidation on platinum group metals. *Chem Eng J*, 2009, 154(1-3): 82-87

8 贾宏涛, 许春晓, 崔桂香. 槽道湍流近壁区多尺度输运特性研究. 力学学报, 2007, 39(2): 181-187 (Jia Hongtao, Xu Chunxiao, Cui Guixiang. Multi-scale energy transfer in near-wall region of turbulent channel flow. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, 39(2): 181-187 (in Chinese))

9 Clarke RJ, Apell HJ, Kong BY. Allosteric effect of ATP on, Na^+, K^+- ATPase conformational kinetics. *Biochemistry*, 2007, 46(23): 7034-7044

10 郭建侠, 卞林根, 戴永久. 玉米生育期地表能量平衡的多时间尺度特征分析及不平衡原因的探索. 中国科学 D, 2008, 38(9): 1103-1111 (Guo Jianxia, Bian Lingen, Dai Yongjiu. Analysis of characteristics of multiple time scale in surface energy balance of corn in growth period , and exploration of the reasons for unbalance. *Sci China D*, 2008, 38(9): 1103-1111 (in Chinese))

11 Courbage M, Nekorkin VI, Vdovin LV. Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity. *Chaos*, 2007, 17(4): 155-160

12 Butera Jr RJ, Rinzel J, Smith JC. Models of respiratory rhythm generation in the pre-Bötzinger complex. II. populations of coupled pacemaker neurons. *J Neurophysiol*, 1999, 82(1): 398-415

13 Rinzel J. Bursting oscillation in an excitable membrane model//Everitt WN, Sleeman BD. Lecture Note In Mathematics. Vol. 1151. New York: Springer, 1985: 304-316

14 杨卓琴，陆启韶. 神经元 Chay 模型中不同类型的簇放电模式. 中国科学 G, 2007, 37(4): 440-450 (Yang Zhuoqin Lu Qishao. Different types of bursting spiking mode in Chay model of neurons. *Sci China G*, 2007, 37(4): 440-450 (in Chinese))

15 Rulkov NF. Regularization of synchronized chaotic bursts. *Phys Rev Lett*, 2001,86(1): 183-186

16 Wagenaar DA, Pine J, Potter SM. An extremely rich repertoire of bursting patterns during the development of cortical cultures. *BMC Neurosci*, 2006, 7(1): 1-18

17 古华光，惠磊，贾冰. 一类位于加周期分岔中的貌似混沌的随机神经放电规律的识别. 物理学报, 2012, 61(8): 0805041-08050410 (Gu Huaguang, Hui Lei, Jia Bing. Identification of a stochastic neural firing rhythm lying in period-adding bifurcation and resembling chaos. *Acta Phys Sin*, 2012, 61(8): 0805041-08050410 (in Chinese))

18 Channell P, Cymbalynk G, Shilnikov A. Applications of the Poincaré mapping technique to analysis of neuronal dynamics. *Neurocomputing*, 2007, 70(10-12): 2107-2111

19 Izhikevich EM, Hoppensteadt F. Classfication of bursting mapping. *Int J Bifurcat Chaos*, 2004, 14(11): 3847-3854

20 Courbage M, Maslennikov OV, Nekorkin VI. Synchronization in time-discrete model of two electrically coupled spike-bursting neurons. *Chaos Soliton Frac*t, 2012, 45(5): 645-659

21 Maslennikov OV, Nekorkin VI. Discrete model of the olivo-cerebellar system: structure and dynamics. *Radiophys Quant El*, 2012, 55(55): 198-214

22 Nekorkin VI, Maslennikov OV. Spike-burst synchronization in an ensemble of electrically coupled discrete model neurons. *Radiophys Quant El*, 2011, 54(1): 56-73

23 Stoyanov B, Kordov K. Novel image encryption scheme based on Chebyshev polynomial and Duffing map. *Scientific World J*, 2014, 2014: 283639-283639

24 Kuehn C. Multiple Time Scale Dynamics. New York: Springer, 2015: 8-14

25 Han XJ, Bi QS. Bursting oscillations in Duffing's equation with slowly changing external forcing. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2011, 16(10): 4146-4152

26 张晓芳，陈小可，毕勤胜. 快慢耦合振子的张驰簇发及其非光滑分岔机制. 力学学报，2012,44(3): 576-583 (Zhang Xiaofang, Chen Xiaoke, Bi Qinsheng. Relaxation bursting of a fast-slow coupled oscillation as well as the mechanism of non-smooth bifurcation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012,44(3): 576-583 (in Chinese))

27 Han XJ, Bi QS. Slow passage through canard explosion and mixed mode oscillations in the forced Van der Pol's equation. *Nonlinear Dyn*, 2012, 68(1-2): 275-283

28 Bear SM, Erneux T, Rinzel J. The slow passage through a Hopf bifurcation: delay, memory effects, and resonance. *SIAM J Appl Math*, 1989, 49(1): 55-71

29 Baesens C. Slow sweep through a period-doubling cascade: Delayed bifurcations and renormalisation. *Physica D*, 1991, 53(2-4): 319-375

30 Han XJ, Bi QS, Zhang C, et al. Study of mixed-mode oscillations in a parametrically excited van der Pol system. *Nonlinear Dyn*, 2014, 77(4): 1285-1296

31 Tzou JC, Ward MJ, Kolokolnikov T. Slowly varying control parameters, delayed bifurcations, and the stability of spikes in reaction–diffusion systems. *Physica D*, 2015, 290: 24-43