第 49 卷 第 2 期 力 学 学 报 Vol. 49，No. 2
2017 年 3 月 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics Mar.，2017

流体力学

摆动河槽水动力稳定性特征分析[1)]

白玉川 [*,†] 冀自青 [†] 徐海珏 [*,†,2)]

[*](天津大学水利工程仿真与安全国家重点实验室，天津 300072)

[†](天津大学建筑工程学院，天津 300072)

摘要 河流形态与水动力结构息息相关，形态约束水动力结构，水动力结构则通过泥沙运动进一步塑造形态，在自然界河流中形成一对辩证互馈关系. 天然河流形态形式多样，大致可以分为顺直、微弯、分叉和散乱游荡几种类型，其中微弯及多个弯曲构成的河型为河流动力演化中最重要的一环. 多个弯曲构成的河型可用正弦派生曲线来描述，它也是天然河流主槽与水动力结构复杂相互作用的结果. 作为探讨这一过程的力学作用机理，构建摆动槽道并研究槽道摆动与其内部流动结构的互馈关系，既是流体力学研究的热点内容，也是目前河流动力过程研究的基础内容. 在此重点讨论这一互馈关系前一部分，即水流对摆动边界的响应. 文中建立了随体坐标系下摆动河槽与内部水流动力响应理论模型，通过给定摆动弯曲槽道的不同特征参数，研究讨论了正弦派生型摆动边界下的槽道水流动力稳定性特征，明确了弯曲槽道摆动对其内部主流及扰动水流结构的影响，确定弯曲槽道摆动波数、摆动频率对扰动流发展影响的相应参数定量关系，得到了槽道弯曲度和摆动特征对其内部水流不同尺度扰动影响的阈值选择性范围.

关键词 河槽摆动，槽道流动，正弦派生，水流特性，水动力稳定性特征

中图分类号：O352 **文献标识码**：A doi：10.6052/0459-1879-16-105

HYDRODYNAMIC INSTABILITY CHARACTERISTICS OF LAMINAR FLOW IN A MEANDERING CHANNEL WITH MOVING BOUNDARY [1)]

Bai Yuchuan[*,†] Ji Ziqing[†] Xu Haijue[*,†,2)]

[*](*State Key Laboratory of Hydraulic Engineering Simulation and Safety*，*Tianjin University*，*Tianjin* 300072，*China*)

[†](*Department of Civil Engineering, Tianjin University*，*Tianjin* 300072，*China*)

Abstract Configuration of river is closely related with hydrodynamic structures of flows, for the shape of a channel influences the flow structures in it, and the flow structures also affect the developing trend of the channel through the movement of sediment, forming a pair of dialectical interactions in the river system. The natural rivers are different in configurations, which can generally be divided into such types as straight, bending, branching and wandering. Among them, the bending river or the river composed of several curved channels, the result configuration of interaction between the natural river and the complex hydrodynamic flow structure in it, become one of the most important types in the study of river dynamics. As the basis of theoretical research, the establishment of model and the study on flows within a moving channel has become the focus not only from researchers of fluid mechanics, but also from investigators of river dynamics. Therefore, this study first established a theoretic model on the flow in a meandering channel with a moving boundary

2016–04–18 收稿，2017–02–22 录用，2017–02–22 网络版发表.

1) 国家自然科学基金项目 (41576093, 51279124, 51321065) 和天津大学水利工程仿真与安全国家重点实验室基金 (HESS-1606) 资助.

2) 徐海珏，副教授，主要研究方向：流体力学、河流海岸动力学、泥沙运动力学. E-mail: xiaoxiaoxu_2004@163.com

引用格式：白玉川, 冀自青, 徐海珏. 摆动河槽水动力稳定性特征分析. 力学学报, 2017, 49(2): 274-288

Bai Yuchuan, Ji Ziqing, Xu Haijue. Hydrodynamic instability characteristics of laminar flow in a meandering channel with moving boundary. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(2): 274-288

by using a streamwise-transverse coordinate system. It next discussed the hydro-dynamic instability characteristics of the laminar flow within the sine-generated moving boundaries. Then it quantitatively analyzed the influences of various character parameters to the velocity distributions of main flow. Finally, it obtained the selective influences from the curvature and meandering properties to the flow structure.

Key words moving channel，flow in channel，sine-generated curveform，flow properties，hydrodynamic instability characteristics

引 言

复杂边界与内部水流的相互作用既是研究河流摆动机理的基础，也是近来流体力学研究的热门课题.

平行槽道内的流动在小雷诺数时为层流，其流速分布为二次分布；然而，在复杂可动边界内流速将产生变化，此时其水动力稳定性特征也会相应变化.

目前对于复杂可动边界内流体流动特征的研究主要沿着两个方向进行：一个是弹性固壁在水流作用下的自由振动. 这方面主要代表学者有 Davies 和 Carpenter[1-2], Hell 和 Waters[3], Guaus 等 [4], Pitman 和 Lucey[5]，其核心思想是将边壁构造成无数弹性支承的薄壁梁，对弹性边界和内部水流分别建立控制方程，研究弹性边壁对平面 Poiseuille 流、Taylor–Couette 流水动力稳定性的影响. 另一个是以水流减阻为主要目标，研究静态或动态复杂边界内层流运动的水动力稳定性和湍流拟序结构的发展. 例如，Hall[6]、Thomas 等 [7] 探讨了边壁纵向振动对平面 Poiseuille 流水动力稳定性特征的影响；Kuhlmann 等 [8] 针对两壁逆向旋转的空腔，研究了其内部水流的稳定性；Hell 和 Waters[3] 则针对弹性圆柱壳中的水流结构进行研究；Ren 等 [9] 分析并得到了边壁纵向匀速平移对内部水流水动力稳定性的影响；Sen 等 [10] 研究了固定边壁和可动边壁交替出现时 T-S 波在边界上的传播.

由于研究对象的不同，以上这些成果大多研究边壁纵向运动对内部水流结构和水动力稳定性的影响，很少有模型考虑边壁横向摆动对内部水流的影响. 然而对于弯曲河流的演化机理 [11]，槽道横向摆动边界内水流运动规律的研究更具有实际意义 [12-13].

因此，本文首先假设河槽的摆动趋势，建立了随体坐标系下摆动性槽道内水流流动的理论模型，讨论了正弦派生型摆动边界下的槽道水流动力稳定性特征，其次确定了摆动波数与摆动频率对主流流速和内部扰动发展影响的定量关系，最后分析并得到了槽道弯曲度和摆动特征对其内部水流不同尺度扰动的选择性影响.

1 基本方程

天然河道，尤其是下游河段一般是宽浅型的 (河宽与水深比值不小于 1). 因此，河道在下游弯曲河段会呈现出典型的三维流动特征. 然而，河道的中上游河段，若经过大峡谷，则一般会形成窄深型的河道 (河宽与水深比值小于 1). 此时，河道水深方向上变量的变化就可忽略不计，表现出典型的平面二维水流流动特征，这种河槽中的二维流动在 Parker 等 [14]，Ikeda 等 [15]、Bai 和 Xu[16] 以及 Xu 和 Bai [17] 的文中都有专门讨论和分析. 因此，本文也针对窄深型河槽建立平面二维坐标系统.

边界采用正弦派生曲线形式，其中心线表述方程为 $\theta(s^*) = \theta_m \sin(\alpha_c^* s^* - \omega_c^* t^*)$，其中，$s^*$ 为纵向坐标，θ 为轴线与 x^* 轴偏角，θ_m 为曲线与 x^* 轴的最大夹角，α_c^* 和 ω_c^* 分别为摆动波数和摆动角频率，$\alpha_c^* = 2\pi/M^*$，$|\omega_c^*| = 2\pi/T_c^*$，$M^*$ 为曲线波长，T_c^* 为摆动周期. 变量上标 * 表示有量纲的物理量.

采用如图 1 中所示的坐标系，河道中心线是沿着流向且处于河道中心位置的曲线，s^* 方向的其他曲线都是平行于河道中心线 $y_0^* = y^*(x_0^*)$，而 n^* 方向是处处垂直于河道中心线并在水平面内的方向，因此 s^* 和 n^* 线是处处正交的关系. 这种坐标系在 Parker 等 [14] 以及 Ikeda 等 [15] 的文章中首次使用，并在 Bai 等 [18] 的文章中多次讨论.

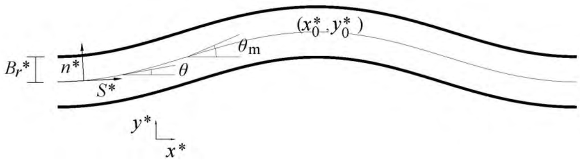


图 1 正弦派生曲线边界平面示意图

Fig. 1 Sketch of sine-generated boundary

长度尺度、速度尺度、时间尺度分别用半宽 B^*, 零阶基本流流速峰值 U_m^*, B^*/U_m^* 无量纲化；河道曲率用河道最大曲率 c_m^* 无量纲化，对于正弦派生曲线 $c_m^* = 2\pi/M^*$.

正弦派生曲线相关物理量的无量纲参数：偏角幅值 θ_m，摆动波数 α_c，摆动角频率 ω_c，其与实际物理量直接的关系式为

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha_c = 2\pi B^*/M^* \\ &|\omega_c| = 2\pi B^*/U_m^* T_c^* \\ &u_c = M^*/U_m^* T_c^* \end{aligned}\right.$$

式中，u_c 为槽道摆动的无量纲相速度，亦可写为 $u_c = \omega_c/\alpha_c$.

物理量无量纲化关系式为

$$\left.\begin{aligned} &(s^*, n^*) = B^*(s, n) \\ &c^* = c_m^* c \\ &(u^*, v^*) = U_m^*(u_s, u_n) \\ &p^* = \rho^* U_m^{*2} p \\ &t^* = t B^*/U_m^* \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

摆动相位：$\phi_c = \alpha_c s - \omega_c t$；偏角写为复数形式：$\theta = \theta_m \exp(\mathrm{i}\phi_c)$；无量纲曲率函数的复数形式：$c = \theta_{,s} = \mathrm{i}\alpha_c\theta$；无量纲曲率幅值 $\psi = B^* c_m^* = \alpha_c\theta_m$.

无量纲形式的控制方程为

$$\frac{1}{h_s}\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial u_n}{\partial n} - \psi\frac{c u_n}{h_s} = 0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{u_s}{h_s}\frac{\partial u_s}{\partial s} + u_n\frac{\partial u_s}{\partial n} - \psi\frac{c u_s u_n}{h_s} = \\ &\quad -\frac{1}{h_s}\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{R}\bar{\Delta} u_s - \\ &\quad \psi R^{-1}\Big(2\frac{c}{h_s^2}\frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial n} + \psi\frac{c^2 u_s}{h_s^2}\Big) + \\ &\quad \frac{\psi}{R}\frac{\partial c}{\partial s}\Big(\frac{n}{h_s^3}\frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{u_n}{h_s^2}\Big) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u_s}{h_s}\frac{\partial u_n}{\partial s} + u_n\frac{\partial u_n}{\partial n} + \psi\frac{c u_s^2}{h_s} = \\ &\quad -\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1}{R}\bar{\Delta} u_n + \\ &\quad \frac{\psi}{R}\Big(2\frac{c}{h_s^2}\frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{c}{h_s}\frac{\partial u_n}{\partial n} - \psi\frac{c^2 u_n}{h_s^2}\Big) + \\ &\quad \frac{\psi}{R}\frac{\partial c}{\partial s}\Big(\frac{n}{h_s^3}\frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{u_s}{h_s^2}\Big) \end{aligned} \tag{4}$$

无滑移边界条件

$$n = \pm 1,\ u_s = u_{s0} = -n\theta_{,t},\ u_n = u_{n0}$$

式中，$\bar{\Delta} = \dfrac{1}{h_s^2}\dfrac{\partial^2}{\partial s^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial n^2}$ 为拉普拉斯算子; $h_s = 1 - \psi n c$ 为 Lame 系数; u_s 和 u_n 分别为 s 方向和 n 方向无量纲流速；槽道中心线在曲线坐标系中的运动速度 (u_{s0}, u_{n0})，可表述为以下形式

$$n = 0,\ \frac{\partial u_{s0}}{\partial s} = -u_{n0}\frac{\partial\theta}{\partial s},\ \frac{\partial u_{n0}}{\partial s} = \frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial s}$$

式中，$S(s,t)$ 为槽道中心线在拉格朗日坐标. 槽道中心线伸缩比：$S_{,s} = 1 + \int_0^t u_{s0,s}\mathrm{d}t$；当槽道中心线无伸缩时，$\partial S/\partial s = 1$，亦即 $u_{s0,s} = 0$ 或 $u_{s0} = u_{s0}(t)$.

值得注意的是，河道形态参数很多具有复数形式，其中包括：河道波数 α_c、河道频率 ω_c、摆动相位 ϕ_c、无量纲曲率函数 c、Lame 系数 h_s 等. 基本所有参数的实部具有物理含义，而虚部没有具体物理含义，因此参数的取值一般为参数的实部. 然而，在计算中需要用到参数的实部和虚部. 如：偏角 θ 可以写作 $\theta = \theta_m \exp(\mathrm{i}\phi_c) = \theta_m \exp[\mathrm{i}(\phi_{cr} + \mathrm{i}\phi_{ci})] = \theta_m \exp(-\phi_{ci})\exp(\mathrm{i}\phi_{cr})$. 其中，$\phi_{cr}$ 和 ϕ_{ci} 分别是摆动相位 ϕ_c 的实部和虚部. 因此，摆动相位实部 ϕ_{cr} 体现了河道周期性变化对偏角的影响，而其虚部 ϕ_{ci} 则体现了河道非周期摆动幅度改变对偏角的影响.

2 基本流摄动解

摄动法又称小参数展开法，就是将系统视为理想模型的参数或结构作了微小扰动的结果来研究其运动过程的数学方法. 这种方法最早应用于天体力学，用来计算小天体对大天体运动的影响，后来广泛应用于物理学和力学的理论研究. 利用摄动法求解方程，也称摄动分解，通常需要在无量纲方程中选择一个能反映物理特征的无量纲小参数作为摄动量，然后假设解可以按小参数展成幂级数，将这一形式级数代入无量纲方程后，可得各级近似方程，依据这些方程可确定幂级数的系数，对级数进行截断，便得到原方程的渐近解.

无量纲曲率幅值 $\psi = B^*/r^*$，表示半河宽与最小曲率半径之比，它代表了槽道的空间弯曲程度，是重要的弯曲特征参数，这个幅值越大就证明弯道越尖锐. 根据实际测量资料的结果显示，天然形成河流槽道的 ψ 值大多在 0.05~0.1 的范围内 [19-21]，几乎没有超过 0.3 的. 因此，在对方程的处理中，一般认为 ψ 是可用于方程摄动展开的小参数量.

摆动角频率 ω_c 反映摆动槽道的时间特征，中心线横向速度 u_{n0} 的量级为 $u_c\theta_m$，槽道缓慢摆动时可认为其与 ψ 同量级.

2.1 基本流

以无量纲曲率幅值 ψ 为小参数，对 $\boldsymbol{X}_\psi$ 进行摄动分解，只保留一阶摄动一次谐波量，可得

$$\boldsymbol{X}_\psi = \boldsymbol{X}_{\psi 0} + \psi \boldsymbol{X}_{\psi 1} + O(\psi^2) \tag{5}$$

式中，第 1 项 $\boldsymbol{X}_{\psi 0}$ 为顺直项部分 (ψ^0)，对应 $\psi = 0$ 时的直槽流，为实向量函数；第 2 项为一阶弯曲修正项，与槽道中心线摆动同频同波数，表示为复数形式，$\boldsymbol{X}_{\psi 1} = \hat{\boldsymbol{X}}_{\psi 1}\exp(\mathrm{i}\phi_c) + \mathrm{c.c}$，其幅值：$\hat{\boldsymbol{X}}_{\psi 1} = [\hat{u}_{s\psi 1}, \hat{u}_{n\psi 1}, \hat{p}_{\psi 1}]^{\mathrm{T}}$，顶标 ^ 表示波动量的幅值，为复向量函数，$\boldsymbol{X}_{\psi 1} = \hat{\boldsymbol{X}}_{\psi 1}(n)$.

ψ^0 阶对应固定直槽道流动，其对应基本流解为 Poiseuille 流流速分布

$$u_{s\psi 0} = 1 - n^2 \tag{6}$$

ψ^1 阶反映了槽道弯曲对水流流动造成的影响，其解对应的方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{i}\alpha_c \hat{u}_{s\psi 1} + \mathrm{D}\hat{u}_{n\psi 1} = 0 \\
&\left(\mathrm{D}^2 - \alpha_c^2\right)\hat{u}_{s\psi 1} - \mathrm{i}Re\alpha_c \hat{p}_{\psi 1} + \mathrm{i}Re\left(\omega_c - \alpha_c u_{s\psi 0}\right)\hat{u}_{s\psi 1} - \\
&\qquad Re\mathrm{D}u_{s\psi 0}\hat{u}_{n\psi 1} = nRep_{\psi 0,s} + \mathrm{D}u_{s\psi 0} \\
&\left(\mathrm{D}^2 - \alpha_c^2\right)\hat{u}_{n\psi 1} - ReD\hat{p}_{\psi 1} + \mathrm{i}Re\omega_c \hat{u}_{n\psi 1} - \\
&\qquad \mathrm{i}Re\alpha_c u_{s\psi 0}\hat{u}_{n\psi 1} = Reu_{s\psi 0}^2 + \mathrm{i}\alpha_c u_{s\psi 0}
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

边界条件：$n = \pm 1$，$\hat{u}_{s\psi 1} = nu_c$，$\hat{u}_{n\psi 1} = \dfrac{\mathrm{i}u_c}{\alpha_c}$.

方程 (7) 中，$\hat{u}_{s\psi 1}, \hat{u}_{n\psi 1}, \hat{p}_{\psi 1}$ 为未知量，导数符号：$\mathrm{D} = \mathrm{d}/\mathrm{d}n$，$\mathrm{D}^2 = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}n^2$. s 方向驱动力 $nRe\hat{p}_{\psi 0,s}$ 和 $\mathrm{D}\hat{u}_{s\psi 0}$ 分别由零阶压力梯度和曲面切应力提供，压力梯度 $\hat{p}_{\psi 0,s} = Re^{-1}\mathrm{D}^2\hat{u}_{s\psi 1}$；$n$ 方向驱动力 $Re\hat{u}_{s\psi 0}^2$ 和 $\mathrm{i}\alpha_c\hat{u}_{s\psi 0}$ 分别由离心力和曲面切应力提供, Re 为雷诺数.

对 ψ^1 阶方程 (7) 简化，可得一个 O-S 方程形式的常微分方程

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}\hat{u}_{n\psi 1} = &-Re\alpha_c^2 u_{s\psi 0}^2 - \mathrm{i}\alpha_c(\mathrm{D}^3 + \mathrm{D}^2)u_{s\psi 0} - \\
&\mathrm{i}\alpha_c(\mathrm{D}^2 + \alpha_c^2)u_{s\psi 0}
\end{aligned} \tag{8}$$

边界条件：$n = \pm 1$, $\hat{u}_{n\psi 1} = \dfrac{\mathrm{i}u_c}{\alpha_c}$, $\mathrm{D}\hat{u}_{n\psi 1} = \dfrac{\mathrm{i}nu_c}{\alpha_c}$.

式中，算子 $\mathrm{L} = (\mathrm{D}^2 - \alpha_c^2)^2 - \mathrm{i}Re[(\alpha_c u_{s\psi 0} - \omega_c)(\mathrm{D}^2 - \alpha_c^2) - \alpha_c\mathrm{D}^2 u_{s\psi 0}]$, 等式右侧 3 项分别由离心力、压力梯度和曲面应力引起.

结合边界条件，差分法求解方程，采用横向网格数 $N = 1\,000$，由式 (8) 可解得横向流速幅值 $\hat{u}_{n\psi 1}$，将其代回方程 (7) 的连续方程和 s 向动量方程，可解得一阶纵向流速和压力的幅值 $\hat{u}_{s\psi 1}$ 和 $\hat{p}_{\psi 1}$.

值得注意的是，为满足摄动方法对式 (8) 中边界条件 $\hat{u}_{s\psi 1}$ 和 $\hat{u}_{n\psi 1}$ 的要求，摆动相速度 u_c 和摆动频率 ω_c 与摆动波数 α_c 要求一定的量级关系：$u_c \sim O(\alpha_c)$; $\omega_c \sim O(\alpha_c^2)$. 这是因为，摆动频率 ω_c 较小时，Stokes 厚度 $d_s^* = \sqrt{2v^*/\omega_c^*}$ 足够大，其值远大于前述半宽 B^*，水流仍以压力梯度引起的流动为主. 而当摆动频率 ω_c 增大时，Stokes 厚度 d_s^* 逐渐接近特征长度 B^*，摆动引起的振荡流开始与压力流等量齐观，甚至占据主导地位. 因此，摄动方法不再适应. 若要进行高摆动频率影响下水流流动特征的研究可具体参考 Thomas 等 [7] 以及 Luo 和 Wu[22] 的成果.

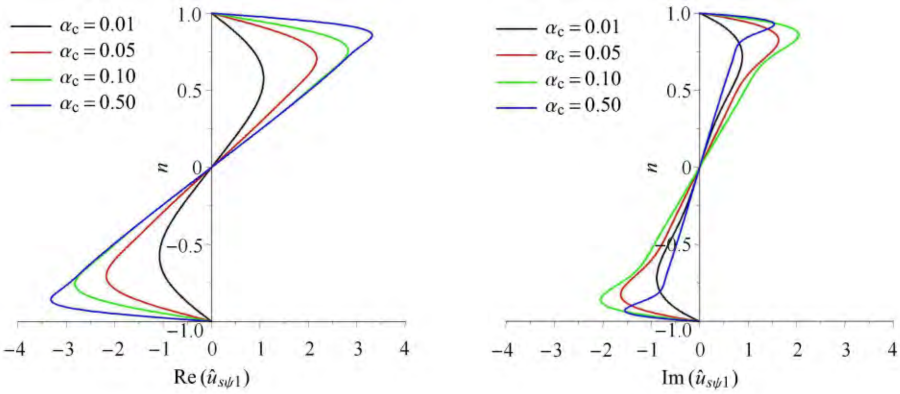
2.2 摆动波数 α_c 对一阶基本流解的影响

对于固定的弯曲槽道，摆动角频率 $\omega_c = 0$. 雷诺数 $Re = 2\,000$ 时，求解控制方程 (7)，可得一阶流速分量 $\hat{u}_{s\psi 1}$ 和 $\hat{u}_{n\psi 1}$ 沿 n 方向分布图，见图 2 和图 3.

图 2 为一阶流速分布在复数空间的分解，函数 Re( ), Im( ) 分布表示复数 $\hat{u}_{s\psi 1}$ 和 $\hat{u}_{n\psi 1}$ 的实部和虚部. 实部 $\mathrm{Re}(\hat{u}_{i\psi 1})$ 为相位 $\phi = 0$ 的正弯顶处的流速分布，虚部 $\mathrm{Im}(\hat{u}_{i\psi 1})$ 则为相位 $\phi = -\pi/2$ 的零曲率的直槽处流速分布，提前 $\mathrm{Re}(\hat{u}_{i\psi 1})\pi/2$ 个相位.

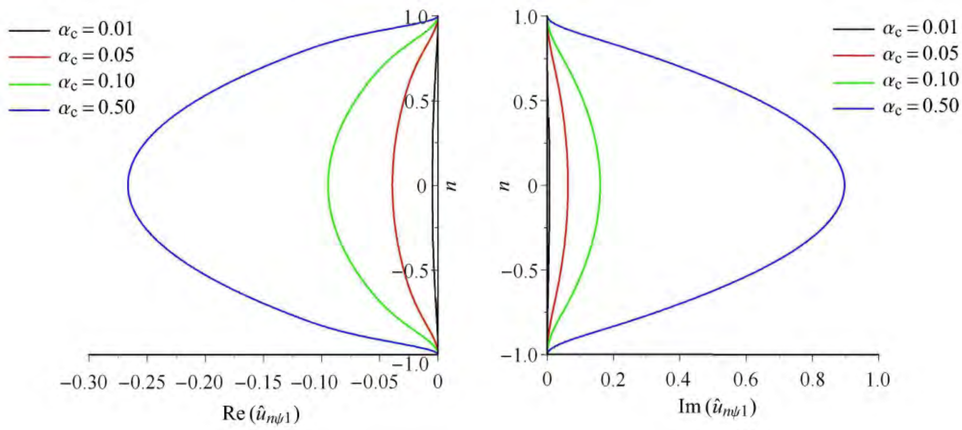
图 2 显示，一阶 s 方向流速 $\hat{u}_{s\psi 1}$ 呈反对称分布，而 n 方向流速 $\hat{u}_{n\psi 1}$ 则呈对称分布；一阶 s 方向流速 $\hat{u}_{s\psi 1}$ 在近两壁处有最大值和最小值，极值大小和所处位置随摆动波数 α_c 增变化而变化.

随摆动波数 α_c 增大，一阶 n 方向流速 $\hat{u}_{n\psi 1}$ 随摆动波数 α_c 增大明显增大；一阶 s 方向流速 $\hat{u}_{s\psi 1}$ 极值所处位置随摆动波数 α_c 增大而逐渐靠近两壁，在 $\alpha_c = (0, 0.5)$ 的范围内实部 $\mathrm{Re}(\hat{u}_{s\psi 1})$ 逐渐增大，而虚部 $\mathrm{Im}(\hat{u}_{s\psi 1})$ 则先增大后减小.



(a) 一阶 s 方向流速幅值 $\hat{u}_{s\psi1}(n)$

(a) Amplitude of first-order velocity $\hat{u}_{s\psi1}(n)$ along s direction



(b) 一阶 n 方向流速幅值 $\hat{u}_{n\psi1}(n)$

(b) Amplitude of first-order velocity $\hat{u}_{n\psi1}(n)$ along n direction

图 2 一阶流速沿 n 方向分布 (复数空间)

Fig. 2 Distribution of first-order velocities along n direction (complex space)

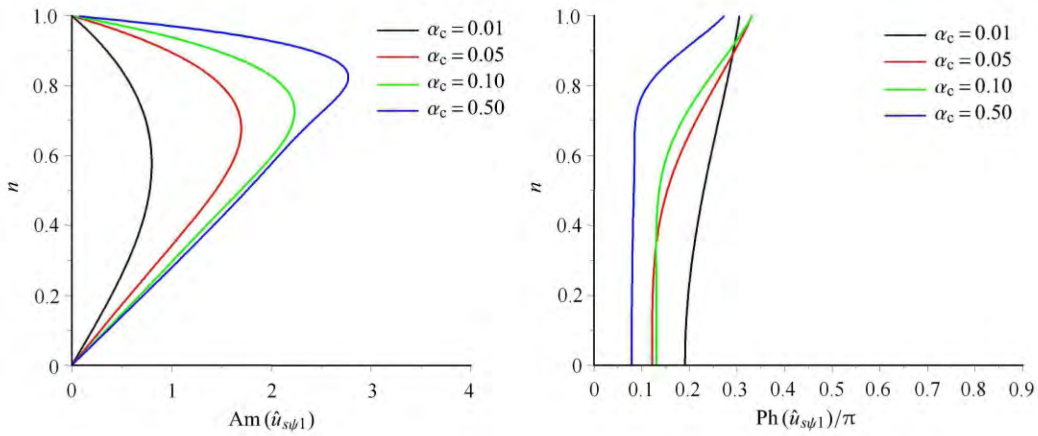
这是因为，无量纲曲率幅值 ψ 是摆动波数 α_c 和偏角幅值 θ_m 的乘积，当偏角幅值保持不变时，ψ 会随着 α_c 的增大而增大. 因此，α_c 增大就意味着河槽的摆动幅度增加，此时，s 方向的最大水流流速会由于惯性的作用偏向凹岸一侧，而且摆动幅度越大，最大流速的偏离就越严重，甚至开始慢慢贴近凹岸边界.

图 3 则为一阶流速分布在幅值 – 相位空间的分解，Am( ) 和 Ph( ) 分别表示复数 $\hat{u}_{s\psi1}$ 和 $\hat{u}_{n\psi1}$ 的幅值和相位 (弧度制). 由图 3 和图 2 可知，纵向流速 $\hat{u}_{s\psi1}$ 和横向流速 $\hat{u}_{n\psi1}$ 的幅值呈对称分布，$\hat{u}_{n\psi1}$ 的相位呈对称分布，但 $\hat{u}_{s\psi1}$ 的相位在槽道两侧有 180° 的相位差，亦即

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{Am}(\hat{u}_{s\psi1}) = \mathrm{Am}(-\hat{u}_{s\psi1})\\
&\mathrm{Ph}(\hat{u}_{s\psi1}) = \mathrm{Ph}(-\hat{u}_{s\psi1}) + \pi\\
&\mathrm{Am}(\hat{u}_{n\psi1}) = \mathrm{Am}(-\hat{u}_{n\psi1})\\
&\mathrm{Ph}(\hat{u}_{n\psi1}) = \mathrm{Ph}(-\hat{u}_{n\psi1})
\end{aligned}\right.$$

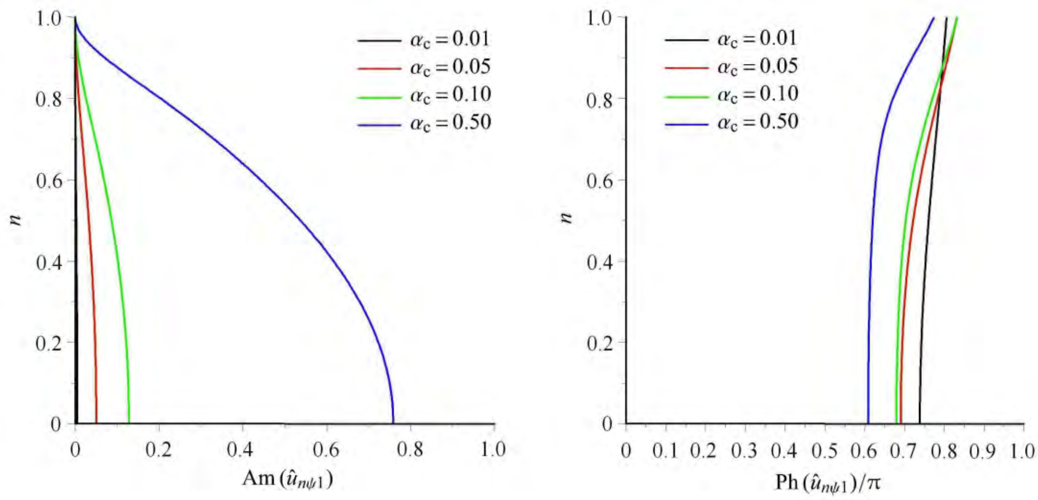
一阶纵向流速的幅值 $\mathrm{Am}(\hat{u}_{s\psi1})$ 在近壁处有最大值，槽道中心流速相位比边壁处略小. 随摆动波数 α_c 增大，纵向流速的幅值 $\mathrm{Am}(\hat{u}_{s\psi1})$ 最大值所处位置更加靠近边壁. 一阶横向流速的幅值 $\mathrm{Am}(\hat{u}_{n\psi1})$ 在随摆动波数 α_c 增大而增大.

一阶纵向流速 $\hat{u}_{s\psi1}$ 和横向流速 $\hat{u}_{n\psi1}$ 随摆动波数 α_c 增大而减小. 当摆动波数 α_c 较小时，相位的横向



(a) 一阶 s 方向 (纵向) 流速幅值 $\hat{u}_{s\psi1}(n)$

(a) Amplitude of first-order velocity $\hat{u}_{s\psi1}(n)$ along s direction



(b) 一阶 n 方向 (横向) 流速幅值 $\hat{u}_{n\psi1}(n)$

(b) Amplitude of first-order velocity $\hat{u}_{n\psi1}(n)$ along n direction

图 3　一阶流速沿 n 方向分布 (幅值–相位空间)

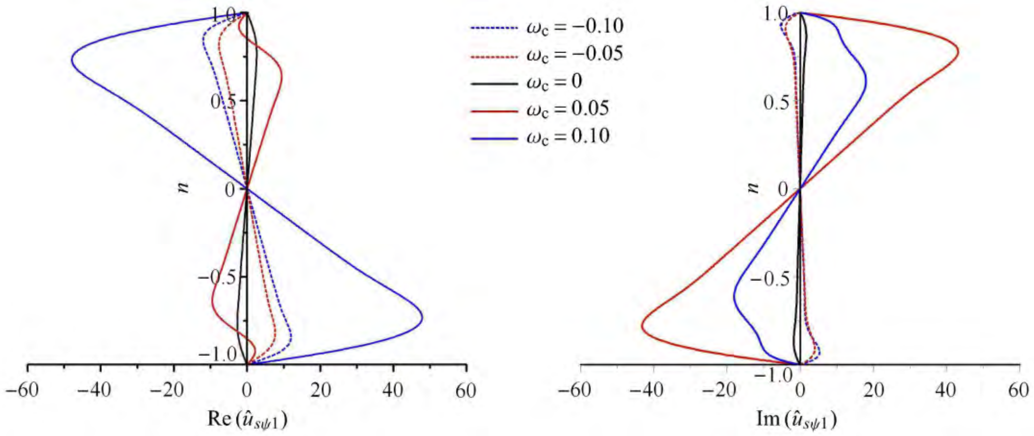
Fig. 3　Distribution of first-order velocities along n direction (amplitude-phase space)

分布变化较小，其分布类似抛物线，如图 3 中 $\alpha_c = 0.01$ 的曲线所示，边壁处的相位差大约为 0.8π. 当摆动波数 α_c 较大时，相位的横向分布变化较大，其分布类似圆管湍流的分布情况，边界相位梯度很大，中心区域很平坦，相位变化很小，如图 3 中 $\alpha_c = 0.50$ 的曲线所示，这种趋势随摆动波数 α_c 增大越加明显.

2.3 摆动角频率 ω_c 对一阶基本流解的影响

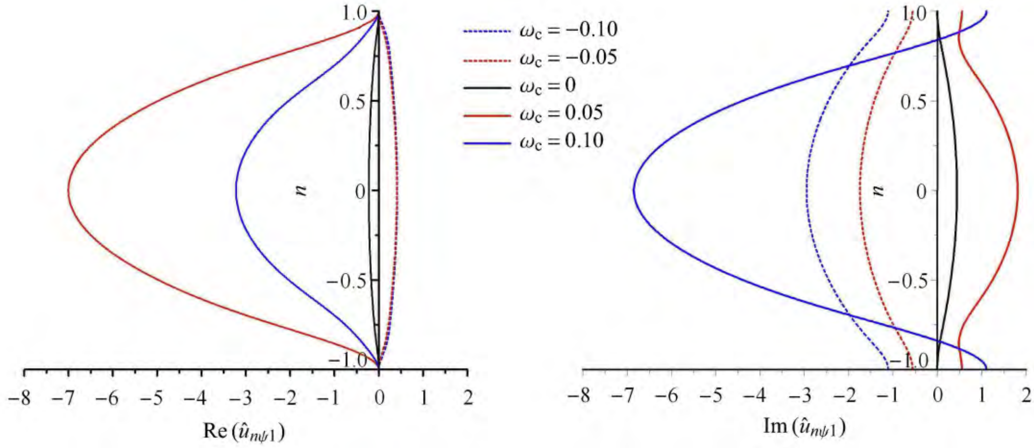
对于摆动的弯曲槽道，摆动角频率 $\omega_c \neq 0$. 摆动波数 $\alpha_c = 0.3$, 雷诺数 $Re = 2\,000$ 时，求解控制方程 (1)，所得一阶流速分量 $\hat{u}_{s\psi1}$ 和 $\hat{u}_{n\psi1}$ 的横向分布绘图，见图 4 和图 5.

图 4 为一阶流速分布在复数空间的分解. 一阶纵向流速 $\hat{u}_{s\psi1}$ 呈反对称分布，横向流速 $\hat{u}_{n\psi1}$ 则呈对称分布. 同时，由控制方程 (7) 的边界条件可知：$n = \pm1$ 时，$\mathrm{Re}(\hat{u}_{s\psi1})$ 和 $\mathrm{Im}(\hat{u}_{n\psi1})$ 均不为零，尤其 $\mathrm{Im}(\hat{u}_{n\psi1})$ 在图 4(b) 中极为明显. 这是因为在所设的条件下，固体边界是以波的形式传播的，相位 $\phi_c = \pi/2$ 处的边界会以相对较大的速度沿 n 方向运动，从而造成了此断面边界处 ($n = \pm1$) 的速度不为零. 而在槽道中心线 ($n = 0$) 附近，零阶 s 方向的流速较大，若河槽摆动 ($\omega_c \neq 0$)，则会大大影响到原有流速分布，具体表现为一阶流速 $\mathrm{Re}(\hat{u}_{n\psi1})$ 和 $\mathrm{Im}(\hat{u}_{n\psi1})$ 对零阶流速的大幅度修正，即 $\mathrm{Re}(\hat{u}_{n\psi1})$ 和 $\mathrm{Im}(\hat{u}_{n\psi1})$ 在 $n = 0$ 处获得极



(a) 一阶纵向流速幅值 $\hat{u}_{s\psi1}(n)$

(a) Amplitude of first-order velocity $\hat{u}_{s\psi1}(n)$



(b) 一阶横向流速幅值 $\hat{u}_{n\psi1}(n)$

(b) Amplitude of first-order velocity $\hat{u}_{n\psi1}(n)$

图 4 一阶流速沿 n 方向分布 (复数空间)

Fig. 4 Distributions of first-order velocities along n direction (complex space)

值.

摆动槽道的一阶流速分布取决于两方面的影响，一方面源自于槽道弯曲, 即摆动波数 α_c 的影响, 一方面源自于摆动频率 ω_c 的影响. 图 4 中黑色实线为 $\omega_c = 0$ 的固定弯曲槽道中的一阶流速分布，取 $\omega_c = -0.10, -0.05, 0, 0.05, 0.10$ 五种不同的摆动情况，并以实线和虚线区分摆动传播方向，实线对应 $\omega_c > 0$，虚线对应 $\omega_c < 0$. 由图 4 可见，摆动向下游传播时，摆动频率 ω_c 对一阶流速影响比向上游传播大，而且，整体来说，摆动频率 ω_c 对一阶流速的影响与摆动波数对它的影响是相反的 (图 2). 这是因为河槽中的水流流速方向是向下游的，因此，水流的信息主要是向下游传播的，摆动向下游传播间接推动了水流信息的传播效果. 然而，又由于水流和河槽边界同时向下游运动，它们之间的相对速度就减小了，就相当于间接减小了波数的影响. 因此，摆动频率对一阶流速的影响与摆动波数对它的影响效果是相反的.

随着摆动频率 ω_c 由零减小，一阶纵向流速和横向流速分布迅速反向，且 $\omega_c = 0.05$ 和 $\omega_c = 0.10$ 两种摆动频率下相差不大.

随着摆动频率 ω_c 由零增大，$\omega_c = 0.05$ 时，弯顶处两壁附近出现一阶纵向流速 $\mathrm{Re}(\hat{u}_{s\psi1})$ 的反向分布 (与 $\omega_c = 0$ 时的黑线分布对比)，这时摆动波数 α_c 和摆动频率 ω_c 的影响相当；摆动频率继续增大 $\omega_c = 0.10$ 时，反向流速分布扩展到全断面，这时摆动频率 ω_c 的影响占主导地位. 直槽处的一阶横向流速 $\mathrm{Im}(\hat{u}_{n\psi1})$ 分布随摆动波数的变化与弯顶处 $\mathrm{Re}(\hat{u}_{s\psi1})$

分布相似. 二者随 ω_c 的复杂变化规律是由于边界流速非零，因此其近壁流速才呈现局部反向分布的现象.

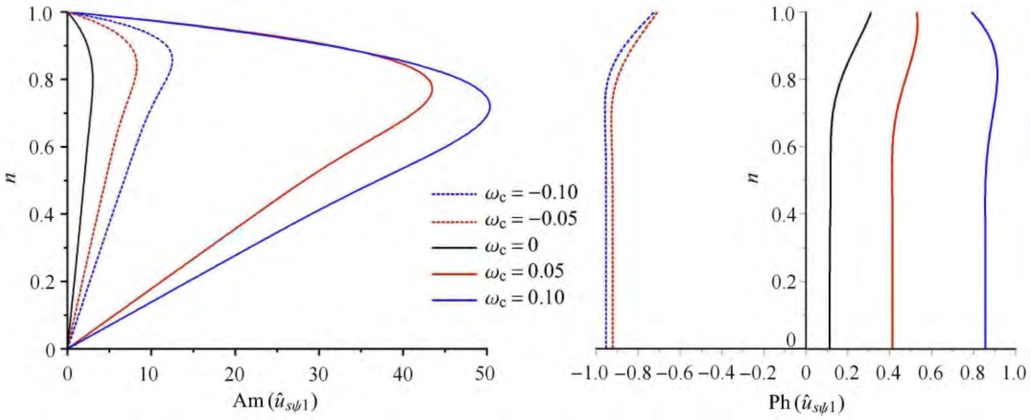
弯顶处一阶横向流速 $\mathrm{Re}(\hat{u}_{n\psi 1})$ 和直槽处一阶纵向流速 $\mathrm{Im}(\hat{u}_{s\psi 1})$ 则在 $\omega_c = 0.05$ 时远大于 $\omega_c = 0.10$ 的情况.

图 5 为一阶流速分布在幅值–相位空间的分解，一阶纵向流速 $\hat{u}_{s\psi 1}$ 和横向流速 $\hat{u}_{n\psi 1}$ 的幅值和相位均呈对称分布.

图 5(a) 显示，一阶纵向流速幅值 $\mathrm{Am}(\hat{u}_{s\psi 1})$ 在近壁处有最大值，该值随摆动频率 ω_c 由零向正负两个方向增大时均增大，且摆动向下游传播时明显大于向上游传播. 随着摆动频率 ω_c 由零减小，一阶纵向流速相位 $\mathrm{Ph}(\hat{u}_{s\psi 1})$ 迅速反向分布，且 $\omega_c = 0.05$ 和 $\omega_c = 0.10$ 两种摆动频率下相差不大；随着摆动频率 ω_c 由零增大，相位分布也迅速反向，中心处相位大于边壁，$\omega_c = 0.10$ 时的相位分布比 $\omega_c = 0.05$ 大.

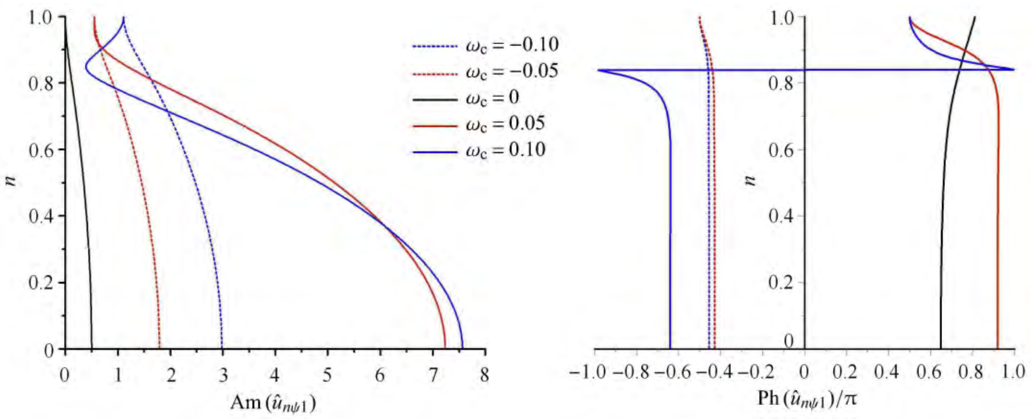
图 5(b) 显示，一阶横向流速 $\hat{u}_{n\psi 1}$ 的幅值 $\mathrm{Am}(\hat{u}_{n\psi 1})$ 对称分布. 随着摆动频率 ω_c 由零减小，幅值 $\mathrm{Am}(\hat{u}_{n\psi 1})$ 增大，$\omega_c = 0.05$ 和 $\omega_c = 0.10$ 两种摆动频率下相差较大；随着摆动频率 ω_c 由零减小，幅值 $\mathrm{Am}(\hat{u}_{n\psi 1})$ 在近壁处非零，且局部呈反向分布，$\omega_c = 0.05$ 和 $\omega_c = 0.10$ 时相差不大. 一阶横向流速相位 $\mathrm{Ph}(\hat{u}_{n\psi 1})$ 分布变化规律与前述 $\mathrm{Ph}(\hat{u}_{s\psi 1})$ 相同.

同时，从图 5(b) 中可以观察到 $\omega_c = 0.10$ 对应的蓝色实线从 1.0 突然跳转到 −1.0，这是因为图 5(b) 中第 2 个图代表的是 $u_{n\psi 1}$ 的相位，而通过反正切计算相位的值域在 $(-\pi, \pi)$ 之间. 这种跳转体现了相位的值域范围的约束，其本身只有数学上的意义，在物理上 $\mathrm{Ph}(u_{n\psi 1})/\pi$ 仍然是一个连续函数.



(a) 一阶纵向流速幅值 $\hat{u}_{s\psi 1}(n)$

(a) Amplitude of first-order velocity $\hat{u}_{s\psi 1}(n)$



(b) 一阶横向流速幅值 $\hat{u}_{n\psi 1}(n)$

(b) Amplitude of first-order velocity $\hat{u}_{n\psi 1}(n)$

图 5 一阶流速横向分布 (幅值–相位空间)

Fig. 5 Distributions of first-order velocities (amplitude-phase space)

3 水动力稳定性及拟序扰动发展的边界效应

按照描述湍流拟序结构理论方法 [23-25]，方程的解 $\boldsymbol{X} = [u_s, u_n, p]^{\mathrm{T}}$ 分解为基本流解 $\boldsymbol{X}_\psi$ 与扰动解 $\boldsymbol{X}_T$ 之和的形式，$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_\psi + \boldsymbol{X}_T$.

与平面 Poiseuille 流相比，摆动槽道基本流中的波动项部分 $\boldsymbol{X}_{\psi 1}$ 的使内部水流既有流动的自然失稳又有由于摆动弯曲诱发的失稳，扰动量 $\boldsymbol{X}_T = [\hat{u}_{sT}, \hat{u}_{nT}, \hat{p}_T]^{\mathrm{T}}$ 可表述为以下形式

$$\boldsymbol{X}_T = \varepsilon_T \sum_{m=-1}^{1} \hat{\boldsymbol{X}}_{Tm} \exp[\mathrm{i}(\phi_T + m\phi_{\mathrm{c}})] + o(\varepsilon_T^2) \tag{9}$$

式中，扰动相位 $\phi_T = \alpha_T s - \omega_T t$, 由于基本量 $\boldsymbol{X}_\psi$ 对 ψ 取一阶近似，扰动解中包含 $-1, 0, 1$ 次谐波量，故式 (9) 在 $m = \pm 1$ 处截断，$\boldsymbol{X}_T$ 的幅值 $\hat{\boldsymbol{X}}_{Tm}$ 为 n 的复数函数，$\hat{\boldsymbol{X}}_{Tm} = \hat{\boldsymbol{X}}_{Tm}(n)$.

将式 (9) 中的拟序扰动 $\boldsymbol{X}_T$、基本解 $\boldsymbol{X}_\psi$ 代入原始控制方程 (2) ~ 方程 (4)，得到拟序扰动的控制方程为

$$\frac{1}{h_s}\frac{\partial u_{sT}}{\partial s} + \frac{\partial u_{nT}}{\partial n} - \psi\frac{ncu_{nT}}{h_s} = 0 \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_{sT}}{\partial t} + \left(\frac{u_{s\psi 0}}{h_s}\frac{\partial u_{sT}}{\partial s} + u_{nT}\frac{\partial u_{s\psi 0}}{\partial n} - \psi\frac{cu_{s\psi 0}u_{nT}}{h_s}\right) + \\
&\quad \frac{\psi}{h_s}\left(u_{s\psi 1}\frac{\partial u_{sT}}{\partial s} + u_{sT}\frac{\partial u_{s\psi 1}}{\partial s}\right) + \psi\left(u_{n\psi 1}\frac{\partial u_{sT}}{\partial n} + \right. \\
&\quad \left. u_{nT}\frac{\partial u_{s\psi 1}}{\partial n}\right) - \psi^2 c\frac{u_{s\psi 1}u_{nT} + u_{n\psi 1}u_{sT}}{h_s} = -\frac{1}{h_s}\frac{\partial p_T}{\partial s} + \\
&\quad \frac{1}{Re}\bar{\Delta}u_{sT} - \frac{\psi}{R}\left(\frac{2c}{h_s^2}\frac{\partial u_{nT}}{\partial s} + \frac{c}{h_s}\frac{\partial u_{sT}}{\partial n} + \psi\frac{c^2 u_{sT}}{h_s^2}\right) + \\
&\quad \frac{\psi}{Re}\frac{\partial c}{\partial s}\left(\frac{n}{h_s^3}\frac{\partial u_{sT}}{\partial s} - \frac{u_{nT}}{h_s^2}\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_{nT}}{\partial t} + \left(h_s^{-1}\frac{u_{s\psi 0}}{h_s}\frac{\partial u_{nT}}{\partial s} + u_{nT}\frac{\partial u_{s\psi 0}}{\partial n} + \psi c\frac{2u_{s\psi 0}u_{sT}}{h_s}\right) + \\
&\quad \frac{\psi}{h_s}\left(u_{s\psi 1}\frac{\partial u_{nT}}{\partial s} + u_{sT}\frac{\partial u_{n\psi 1}}{\partial s}\right) + \psi u_{n\psi 1}\frac{\partial u_{nT}}{\partial n} + \\
&\quad \psi u_{nT}\frac{\partial u_{n\psi 1}}{\partial n} + \psi^2 c\frac{2u_{s\psi 1}u_{sT}}{h_s} = -\frac{\partial p_T}{\partial n} + \frac{1}{Re}\bar{\Delta}u_{nT} + \\
&\quad \frac{\psi}{Re}\left(\frac{2c}{h_s^2}\frac{\partial u_{sT}}{\partial s} - \frac{c}{h_s}\frac{\partial u_{nT}}{\partial s} - \psi\frac{c^2 u_{nT}}{h_s^2}\right) + \\
&\quad \frac{\psi}{Re}\frac{\partial c}{\partial s}\left(\frac{n}{h_s^3}\frac{\partial u_{nT}}{\partial s} - \frac{u_{sT}}{h_s^2}\right)
\end{aligned} \tag{12}$$

边界条件 $n = \pm 1, u_{sT} = u_{nT} = 0$.

式 (10) ~ 式 (12) 为拟序结构扰动项控制方程. 方程中既有边界波动 (拉梅系数 h_s) 对扰动解的直接影响，也有边界波动引起的一阶基本流 $\boldsymbol{X}_{\psi 1}$ 对扰动解的间接影响. 扰动方程的非线性使得各扰动谐波量相互耦合，这种耦合有两方面，一种是由高阶基本流 $(u_{s\psi i}, u_{n\psi i})$ 的色散作用引起，一种是由拉梅系数 h_s 的 Taylor 高阶展开项的色散作用引起. 由于本文只保留一阶基本流和三种扰动谐波量，前者只对相邻扰动谐波起作用，而拉梅系数 h_s 则在各扰动分量之间都能起到影响, 故需保留 h_s 的 ψ 的二阶展开项，即

$$h_s = 1 + \psi nc + \frac{1}{2}\psi^2 n^2 c^2 + \mathrm{c.c} + o(\psi^3) \tag{13}$$

式中，c.c 表示复共轭. 将式 (13) 代入拟序扰动方程 (10) ~ 方程 (12)，可得扰动幅值方程

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{i}\,(\alpha_T + m\alpha_{\mathrm{c}})\,\hat{u}_{sTm} + \mathrm{D}\hat{u}_{nTm}] + \\
&\quad \frac{1}{2}\psi\Phi_{1\psi 1s}\hat{u}_{sTm} + \frac{1}{2}\psi\Phi_{1\psi 1n}\hat{u}_{nTm} + \\
&\quad \frac{1}{4}\psi^2\left(\Phi_{1\psi 2s}\hat{u}_{sTm} + \Phi_{1\psi 2n}\hat{u}_{nTm}\right) = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\mathrm{D}^2 - (\alpha_T + m\alpha_{\mathrm{c}})^2\ \mathrm{i}Re\,[\omega_T + m\omega_{\mathrm{c}} - \right. \\
&\quad \left.(\alpha_T + m\alpha_{\mathrm{c}})\,u_{s\psi 0}]\right\}\hat{u}_{sTm} + \\
&\quad Re\mathrm{D}u_{s\psi 0}\hat{u}_{nTm} + \mathrm{i}Re\,(\alpha_T + m\alpha_{\mathrm{c}})\,\hat{p}_{Tm} + \\
&\quad \frac{1}{2}\psi\left(\Phi_{2\psi 1s}\hat{u}_{sTm} + \Phi_{2\psi 1sd}\mathrm{D}\hat{u}_{sTm} + \Phi_{2\psi 1n}\hat{u}_{nTm}\right) + \\
&\quad \frac{1}{4}\psi^2\left(\Phi_{2\psi 2s}\hat{u}_{sTm} + \Phi_{2\psi 2sd}\mathrm{D}\hat{u}_{sTm} + \Phi_{2\psi 2n}\hat{u}_{nTm}\right) = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\mathrm{D}^2 - (\alpha_T + m\alpha_{\mathrm{c}})^2 - \mathrm{i}Re\,[\omega_T + m\omega_{\mathrm{c}} - \right. \\
&\quad \left.(\alpha_T + m\alpha_{\mathrm{c}})\,u_{s\psi 0}]\right\}\hat{u}_{nTm} + Re\mathrm{D}u_{s\psi 0}\hat{u}_{nTm} + Re\mathrm{D}\hat{p}_{Tm} + \\
&\quad \frac{1}{2}\psi\left(\Phi_{3\psi 1s}\hat{u}_{sTm} + \Phi_{3\psi 1n}\hat{u}_{nTm} + \Phi_{3\psi 1nd}\mathrm{D}\hat{u}_{nTm}\right) + \\
&\quad \frac{1}{4}\psi^2\left(\Phi_{3\psi 2s}\hat{u}_{sTm} + \Phi_{3\psi 2n}\hat{u}_{nTm} + \Phi_{3\psi 2nd}\mathrm{D}\hat{u}_{nTm}\right) = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

式中，$m = 0, \pm 1$，式 (14) ~ 式 (16) 构成 9 元耦合方程组. α_T 和 ω_T 分别为无量纲形式的扰动波数和扰动角频率；α_{c} 和 ω_{c} 分别为无量纲边界摆动波数和摆动角频率.

式 (14) ~ 式 (16) 代表弯曲河道水动力稳定性特征. 方程组中未知量包含 9 个线性无关的特征变量：$\hat{u}_{sT0}, \hat{u}_{nT0}, \hat{p}_{T0}$，$\hat{u}_{sT+1}, \hat{u}_{nT+1}, \hat{p}_{T+1}$，$\hat{u}_{sT-1}, \hat{u}_{nT-1}, \hat{p}_{T-1}$. 这些特征变量均为自变量 n 的特征函数，且相互耦合，以矩阵形式可表述为

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}_T + \boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{X}}_{T,n} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{X}}_{T,nn} = \boldsymbol{0} \tag{17}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{X}}_T$ 为扰动幅值方程的基础解系，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 为复数域上的 9×9 阶系数矩阵，系数矩阵各元素均由 (Re, α_T, ω_T)，($\theta_{\rm m}$, $\alpha_{\rm c}$, $\omega_{\rm c}$)，($u_{s\psi 0}$, $\hat{u}_{s\psi 1}$, $\hat{u}_{n\psi 1}$) 决定.

基础解系 $\hat{\boldsymbol{X}}_T$ 表述为向量形式，如下

$$\hat{\boldsymbol{X}}_T = [\hat{u}_{sT-1}(n) \quad \hat{u}_{sT0}(n) \quad \hat{u}_{sT+1}(n) \quad \hat{u}_{nT-1}(n) \quad \hat{u}_{nT0}(n) \quad \hat{u}_{nT+1}(n) \quad \hat{p}_{T-1}(n) \quad \hat{p}_{T0}(n) \quad \hat{p}_{T+1}(n)]^{\rm T}$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 各元素的显示表述可由方程 (14) ~ 方程 (16) 及附录得到，限于篇幅不再赘述. 系数矩阵中共有两组参数，一组为与直槽一样的拟序扰动参数组 (α_T, ω_T, Re)，还有一组为边界弯曲参数组 ($\theta_{\rm m}$, $\alpha_{\rm c}$, $\omega_{\rm c}$).

特征值方程 (17) 采用时间模式，α_T 为实数，ω_T 为复数，用 muller 法求解扰动幅值方程的特征值. 扰动角频率 ω_T 为 (α_T, Re) 和 ($\theta_{\rm m}$, $\alpha_{\rm c}$, $\omega_{\rm c}$) 的函数，亦即：$\omega_T = \omega_T(\alpha_T, Re, \theta_{\rm m}, \alpha_{\rm c}, \omega_{\rm c})$，其虚部即为扰动增长率：$\omega_{Ti} = \omega_{Ti}(\alpha_T, Re, \theta_{\rm m}, \alpha_{\rm c}, \omega_{\rm c})$.

正弦派生曲线河槽内的扰动波，不仅与扰动波数 α_T 和雷诺数 R 的有关，还受到边界摆动弯曲 ($\theta_{\rm m}$, $\alpha_{\rm c}$, $\omega_{\rm c}$) 的影响. 直槽水流雷诺数 $Re_{\rm cr}$ = 5 772.222 (Orszag[26])，而弯曲槽道流的临界雷诺数 $Re_{\rm cr}$ 受到边界摆动弯曲参数 ($\theta_{\rm m}$, $\alpha_{\rm c}$, $\omega_{\rm c}$) 的影响，亦即：$Re_{\rm cr} = Re_{\rm cr}(\theta_{\rm m}, \alpha_{\rm c}, \omega_{\rm c})$，与此同时，临界雷诺数对应的临界扰动参数 ($\alpha_{T\rm cr}$, $\omega_{T\rm cr}$) 均为 ($\theta_{\rm m}$, $\alpha_{\rm c}$, $\omega_{\rm c}$) 的函数，亦即，$\alpha_{T\rm cr} = \alpha_{T\rm cr}(\theta_{\rm m}, \alpha_{\rm c}, \omega_{\rm c})$，$\omega_{T\rm cr} = \omega_{T\rm cr}(\theta_{\rm m}, \alpha_{\rm c}, \omega_{\rm c})$.

由于 $\psi = 0$ 时矩阵奇异，本文以 $\theta_{\rm m} = \alpha_{\rm c} = 1\times 10^{-6}$ 代替顺直河道 ($\theta_{\rm m} = \alpha_{\rm c} = 0$) 来验证临界雷诺数及中性曲线，采用目前国际最为公认的理论和实验结果验证模型的准确性，并与 Reynold 和 Potter[27] 的数值结果和 Nishioka 和 Ichikawa[28] 的实验结果进行了对比，见图 6 所示. 可以看出理论计算结果与已发表的最为公认的中性曲线结果吻合较好，说明程序计算顺直河道计算结果的正确性.

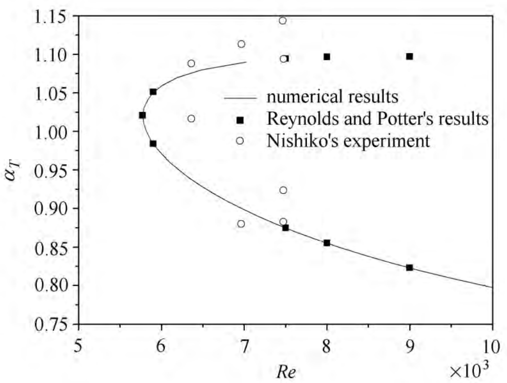


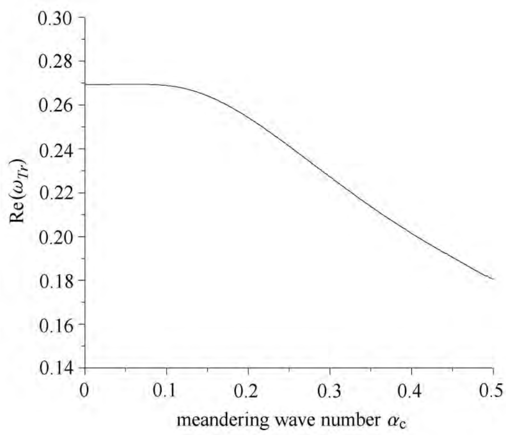
图 6 顺直河道中性曲线计算结果验证

Fig. 6 Comparison of numerical results with data of straight channel

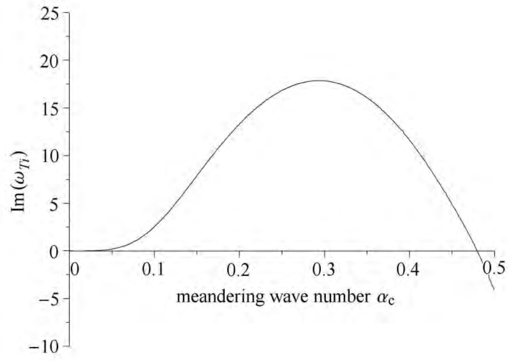
3.1 边界摆动波数的影响

图 7 为扰动频率 ω_{Tr} 及扰动增长率 ω_{Ti} 随摆动波数 $\alpha_{\rm c}$ 的变化关系，对应平面状态参数：$\theta_{\rm m}$ = 0.1, $\omega_{\rm c}$ = 0, 拟序扰动参数：α_T = 1, Re = 6 000；图 8 临界雷诺数随摆动波数 $\alpha_{\rm c}$ 的变化，对应平面状态参数：$\theta_{\rm m}$ = 0.1, $\omega_{\rm c}$ = 0.

从图 7(a) 中可以看出，随着摆动波数的增加，扰动频率有持续减少的趋势. 造成这种变化趋势的原因可能是扰动频率与扰动波数、摆动频率和摆动波数的一种适应过程. 即，摆动波数在逐渐接近于扰动波数过程中，扰动频率也逐渐接近于摆动频率 ($\omega_{\rm c}$ = 0). 这种结果虽然与 Bai 等 [18] 以及 Xu 等 [17]



(a)



(b)

图 7 扰动频率 ω_{Tr} 及扰动增长率 ω_{Ti} 随摆动波数 $\alpha_{\rm c}$ 的变化
(平面状态参数：$\theta_{\rm m}$ = 0.1, $\omega_{\rm c}$ = 0; 拟序扰动参数：α_T = 1.02, Re = 5 772.222)

Fig. 7 Variation of disturbance frequency ω_{Tr} and growth rate ω_{Ti} with swinging wave number $\alpha_{\rm c}$
(for: $\theta_{\rm m}$ = 0.1, $\omega_{\rm c}$ = 0; α_T = 1.02, Re = 5 772.222)

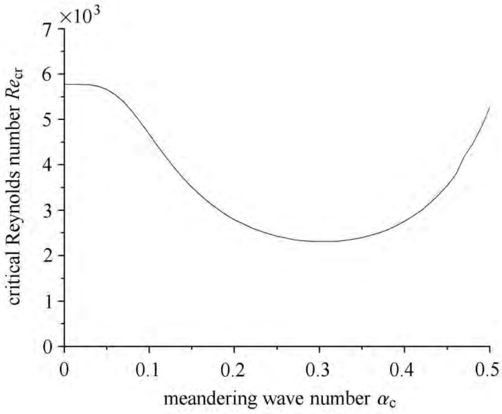


图 8 临界雷诺数随摆动波数 α_c 的变化
(平面状态参数: $\theta_m = 0.1, \omega_c = 0$)

Fig. 8 Variation of critical Reynolds number with swinging wave number α_c (for: $\theta_m = 0.1, \omega_c = 0$)

的结果由于采用不同坐标系而产生一定的差别，但总体趋势是一致的，体现出模型计算的合理性.

从图 7(b) 中可以看出，随着摆动波数的增加，扰动增长率出现先增大后减小的趋势. 槽道弯曲对其内部水流各种尺度的扰动都有选择性影响. 摆动波数 α_{cm} 在 (0, 0.48) 区间上，槽道摆动加速扰动增长，水流比直槽道水流更不稳定. 当摆动波数 $\alpha_{cm} = 0.3$，扰动增长最快，水流最不稳定，此时临界雷诺数不足直槽流的一半.

直槽水流扰动临界参数 $Re_{cr} = 5\,772.222$，$\alpha_{Tcr} = 1.020$，$\omega_{Tcr} = 0.27$，摆动槽道中心曲线和临界扰动显然受摆动参数 $(\theta_m, \alpha_c, \omega_c)$ 的影响.

图 9 绘制了随摆动波数 α_c 增大水流中心曲线的移动，图中给出了 $\alpha_c = 0$，0.1，0.2，0.3，0.4，0.5 时的中性曲线. 由图 9 可以看出，在摆动波数 α_c 较小时，中性曲线变化缓慢，摆动波数 α_c 较大时，中性曲线变化迅速，且趋于平坦化. 随摆动波数 α_c 增大，中性曲线向左移动，对应临界扰动也随之左移，临界雷诺数减小，至 $\alpha_c = 0.3$ 时达到最小 (亦可见图 8)，然后中心曲线右移，临界雷诺数增大.

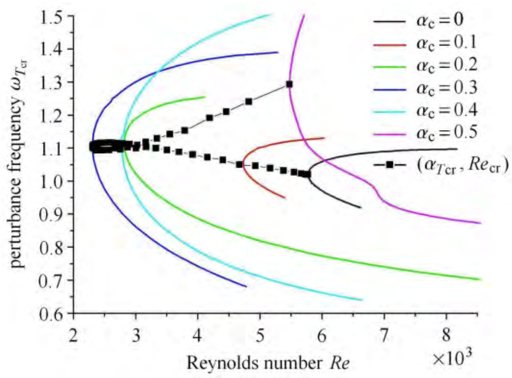
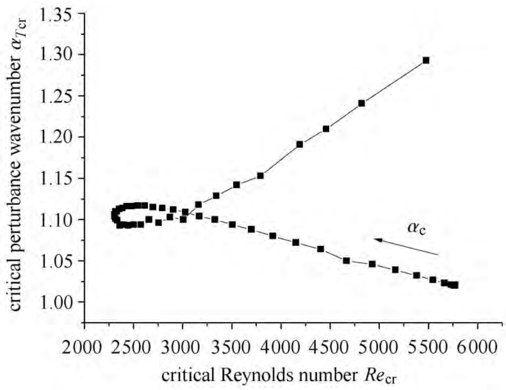


图 9 中性曲线随摆动波数 α_c 的变化 (平面状态参数：$\theta_m = 0.1$, $\omega_c = 0$, $0 \leqslant \alpha_c \leqslant 0.5$)

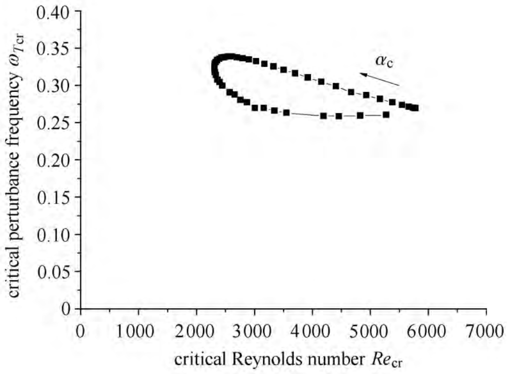
Fig. 9 Variation of neutral curve with swinging wave number α_c (for: $\theta_m = 0.1$, $\omega_c = 0$, $0 \leqslant \alpha_c \leqslant 0.5$)

图 10 只显示了 5 条中心曲线的详细信息，计算 α_c 在 (0, 0.5) 区间上共 50 条中性曲线，将各中性曲线临界扰动对应的点列 (Re_{cr}, α_{Tcr}) 和 (Re_{cr}, ω_{Tcr}) 分别连接形成临界扰动曲线，绘制在图 8. 由图 8 可见，随着摆动波数 α_c 增大，临界扰动对应的临界扰动波数 α_{Tcr} 先增大后减小然后再次增大，并在临近 $\alpha_c = 0.3$ 附近形成一个 “绳套”；而临界扰动频率 ω_{Tcr}. 则先增大后减小，形成类似于直槽中性曲线的 “拇指” 形状.



(a) (Re_{cr}, α_{Tcr}) 曲线

(a) Curve of (Re_{cr}, α_{Tcr})



(b) (R_{cr}, ω_{Tcr}) 曲线

(b) Curve of (R_{cr}, ω_{Tcr})

图 10 临界扰动点随摆动波数 α_c 的变化
(平面状态参数：$\theta_m = 0.1, \omega_c = 0$)

Fig. 10 Variation of critical point with swinging wave number α_c (for: $\theta_m = 0.1, \omega_c = 0$)

3.2 边界摆动频率的影响

图 11 为扰动频率 ω_{Tr} 及扰动增长率 ω_{Ti} 随摆动频率 ω_c 的变化关系，对应平面状态参数：$\theta_m = 0.1$, $\alpha_c = 0.3$, 拟序扰动参数：$\alpha_T = 1.016$, $Re = 2\,307$，该参数组合为图 8 中最小临界雷诺数对应的扰动情况. 由图可见，槽道摆动频率对其内部水流各种尺度的扰动有选择性影响；拟序扰动对摆动频率 ω_c 非常敏感，这是因为扰动频率的微小变化都能极大改变一阶流速分布，如图 4 和图 5 所示，流速分布的改变进一步影响拟序扰动的发展.

由图 11 扰动特征值随摆动频率 ω_c 的变化曲线可以看出，不同模态之间的交叉使得曲线偶有不可导的尖点和急剧变化的区段. 这是因为，任意一种流动中都包含有各种尺度不同的扰动波，这种扰动波体现在特征方程的计算中则是可以计算出一系列的特征值. 而湍流流动通常是由其中最不稳定 / 最少稳定的特征值模态所控制，当流动条件发生改变时有时会出现第二甚至第三模态增长率急剧增加，超过了第一模态的增长率，从而发生模态交叉现象. 这种现象在波纹状底边界 [16] 水流结构的讨论中首次被发现，而在波状侧边界 [18] 的流动中被详细讨论，是目前弯曲型河槽水流结构与顺直型河槽水流结构的

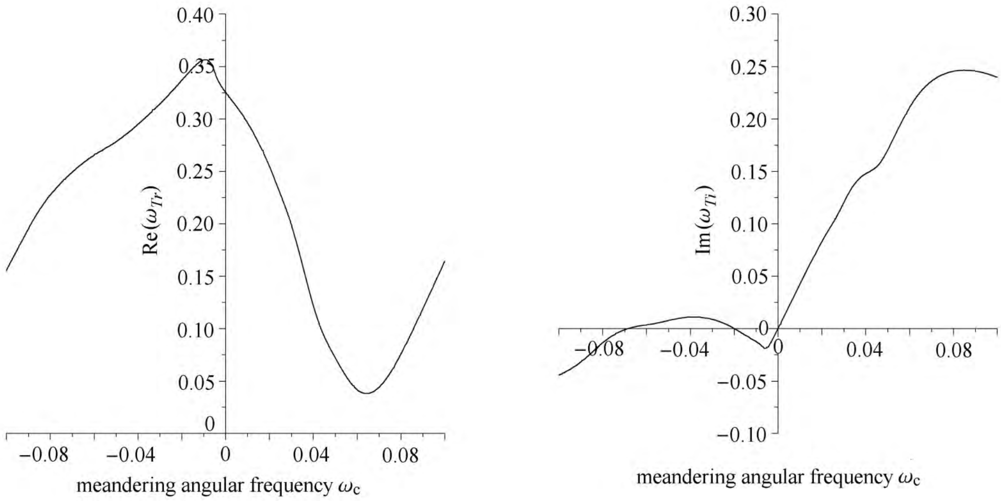


图 11 扰动频率 ω_{Tr} 和扰动增长率 ω_{Ti} 随摆动频率 ω_c 的变化

(平面状态参数：$\theta_m = 0.1$, $-0.1 \leqslant \omega_c \leqslant 0.1$; 拟序扰动参数：$\alpha_T = 1.016$, $Re = 2\,307$)

Fig. 11 Variation of disturbance frequency ω_{Tr} and growth rate ω_{Ti} with swinging frequency ω_c

(for: $\theta_m = 0.1$, $-0.1 \leqslant \omega_c \leqslant 0.1$; $\alpha_T = 1.016$, $Re = 2\,307$)

重要区分之一.

扰动增长率 ω_{Ti} 在 $\omega_c = 0.085$ 和 $\omega_c = -0.039$ 处有极大值，在 $\omega_c = -0.006$ 附近有极小值，该极小值处模态交叉；$\omega_c = -0.009$ 和 $\omega_c = 0.064$ 附近，扰动频率 ω_{Tr} 分别有极大值和极小值.

层流转捩为湍流，能量消耗会由于分子运动的加剧而急剧增加. 然而根据最小耗能原理，自然的壁面边界和水流结构的相互适应过程中会自然遵循使水流的能耗降低，即从自然现象上则表现为推迟层流向湍流的转捩过程. Crosato[29] 在论文中与 Van Balen 讨论了蜿蜒型河道的摆动规律，发现河道的发展不仅会向下游移动，在一些特定的条件下会向上游移动，其方向主要取决于冲刷池相对于河道顶点的位置 [30]. 在相当陡峻的 (窄深型) 河岸，最大近岸流速将出现在河道顶点的上游，上游的河岸在水流流速的作用下变弱，从而造成河道向上游方向迁移. 在计算中就体现两个重要的趋势：(1) 模态出现交叉，控制湍流结构的不稳定模态发生交换，从而最大的近岸流速位置出现在河道顶点的上游而非通常的下游；(2) 窄深型河道在水流结构的影响下，开始向上游迁移. 表现在方程特征值上则是向上游迁移的摆动频率在一定范围内减小了扰动增长率 (如图 11(b))，即河道向上游迁移时，能量耗散更小，水流结构更加稳定，如图 12 中所显示的趋势.

图 12 为临界雷诺数 Re_{cr} 随摆动频率 ω_c 的变化关系，对应平面状态参数：$\theta_m = 0.1$, $\alpha_c = 0.3$. 随着摆动频率增大，临界雷诺数减小，内部水流更加容易失稳；与槽道摆动向下游传播 ($\omega_c > 0$) 相比，槽道摆动向上游传播 ($\omega_c < 0$) 时水流更加稳定.

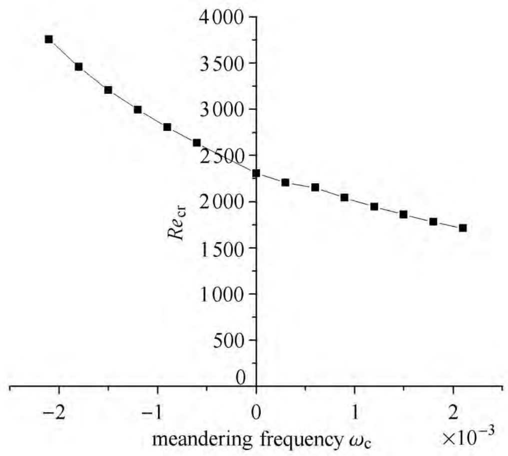


图 12 临界雷诺数 Re_{cr} 随摆动频率 ω_c 的变化
(平面状态参数：$\theta_m = 0.1, \alpha_c = 0.3$)

Fig. 12 Variation of critical Reynolds number Re_{cr} with swinging frequency ω_c (for: $\theta_m = 0.1, \alpha_c = 0.3$)

图 13 为中性曲线随摆动频率 ω_c 的变化关系，对应平面状态参数：$\theta_m = 0.1, \alpha_c = 0.3, -0.02 \leqslant \omega_c \leqslant 0.02$). 图中绘出了 $\omega_c = -0.015$，0，0.015 时的中性曲线. 由图 13 可以看出，随摆动频率 ω_c 增大，中性曲线左移，临界点 (Re_{cr}, α_{Tcr}) 向左上方移动，即临界雷诺数 Re_{cr} 减小，临界扰动波数 α_{Tcr} 增大，扰动频率 ω_{Tcr} 减小，该变化趋势与图 11 和图 12 对应一致. 槽道摆动向上游传播时，中性曲线随摆动频率增大的速度大于向下游传播时减小的速度.

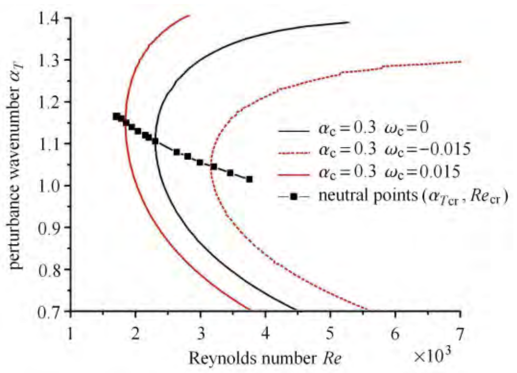


图 13 中性曲线随摆动频率 ω_c 的变化
(平面状态参数：$\theta_m = 0.1, \alpha_c = 0.3, -0.02 \leqslant \omega_c \leqslant 0.02$)

Fig. 13 Variation of neutral curve with swinging frequency ω_c (for: $\theta_m = 0.1, \alpha_c = 0.3, -0.02 \leqslant \omega_c \leqslant 0.02$)

4 结 论

本文建立了随体坐标系下槽道内水流流动的理论模型，讨论了正弦派生型摆动边界下的槽道水流动力稳定性特征，确定了摆动波数与摆动频率对主流流速和内部扰动发展影响的定量关系，得到了槽道弯曲度和摆动特征对其内部水流不同尺度扰动的选择性影响. 具体如下：

(1) 一阶纵向流速 $\hat{u}_{s\psi1}$ 呈反对称分布，而横向流速 $\hat{u}_{n\psi1}$ 则呈对称分布.

(2) 一阶纵向流速 $\hat{u}_{s\psi1}$ 在近两壁处有最大值和最小值，极值大小和所处位置随摆动波数 α_c 增大而逐渐靠近两壁. 槽道中心处流速相位小于近壁处的，且随着摆动波数 α_c 增大而减小.

一阶纵向流速 $\hat{u}_{s\psi1}$ 和横向流速 $\hat{u}_{n\psi1}$ 随摆动波数 α_c 增大而减小. 当摆动波数 α_c 较小时，相位的横向分布变化较小，其分布类似抛物线，边壁处的相位差大约为 0.8π；当摆动波数 α_c 较大时，相位的横向分布变化较大，其分布类似圆管湍流的分布情况，边界相位梯度很大，中心区域趋于平坦，相位变化很小，且这种趋势随摆动波数 α_c 增大越加明显.

(3) 一阶流速分布对摆动频率 ω_c 的影响相当敏感，由 $\omega_c = 0$ 向正负两个方向增大时流速分布迅速变化，且开始出现与 $\omega_c = 0$ 时相反的分布规律；当 $\omega_c < -0.05$ 或 $\omega_c > 0.1$ 时反向分布占据主导地位.

随着摆动频率 ω_c 由零减小，一阶流速、相位分布均迅速反向，且在 $\omega_c < -0.05$ 以后不再有明显变化；随着摆动频率 ω_c 由零增大，一阶流速首先在两壁附近开始反向，$\omega_c > 0.1$ 后反向分布占据主导地位，而流速相位则迅速反向，槽道中心处相位随摆动频率 ω_c 变化及其明显.

(4) 槽道弯曲对其内部水流各种尺度的扰动有选择性影响. 摆动波数 α_{cm} 在 (0, 0.48) 区间上，槽道摆动加速扰动增长，水流比直槽道水流更不稳定. 当摆动波数 $\alpha_{cm} = 0.3$，扰动增长最快，水流最不稳定，此时临界雷诺数不足直槽流的一半. 大摆动波数下中性曲线更加平坦. 各中性曲线临界扰动对应的点列 (Re_{cr}, α_{Tcr}) 和 (Re_{cr}, ω_{Tcr}) 分别呈现 “绳套” 和 “拇指” 形状.

(5) 槽道摆动对水流内部各种尺度的扰动有较大影响. 拟序扰动发展对摆动频率 ω_c 变化十分敏感. 随着摆动频率 ω_c 增大，拟序扰动的增长率增大，临界雷诺数减小，水流更加容易失稳. 槽道摆动向上游传播时水流更加稳定.

参 考 文 献

1 Davies C, Carpenter PW. Instabilities in a plane channel flow be-

tween compliant walls. *Journal of Fluid Mechanics*, 1997, 352: 205-243
2 Davies C, Carpenter PW. Numerical simulation of the evolution of Tollmien–Schlichting waves over finite compliant panels. *Journal of Fluid Mechanics*, 1997, 335: 361-392
3 Hell M, Waters SL. Transverse flows in rapidly oscillating elastic cylindrical shells. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006, 547: 185-214
4 Guaus A, Airiau C, Bottaro A, et al. Effects of wall compliance on the linear stability of Taylor–Couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 2009, 630: 331-365
5 Pitman MW, Lucey AD. Stability of plane-Poiseuille flow interacting with a finite compliant panel. 17th Australasian Fluid Mechanics Conference, Auckland, 2010-12-5-9. New Zealand, 2010
6 Hall P. The stability of the Poiseuille flow modulated at high frequencies//Proceedings of the Royal Society of London, London, 1975. England, 1975. 453-464
7 Thomas C, Bassom AP, Blennerhassett PJ, et al. The linear stability of oscillatory Poiseuille flow in channels and pipes//Proceedings of the Royal Society A, 2011. Australia, 2011. 467: 2643-2662
8 Kuhlmann C, Wanschura M, Rath HJ. Flow in two-sided lid-driven cavities: non-uniqueness, instabilities, and cellular structures. *Journal of Fluid Mechanics*, 1997, 336: 267-299
9 Ren L, Chen JG, Zhu KQ. Dual role of wall slip on linear stability of plane Poiseuille flow. *Chinese Physics Letters*, 2008, 25(2): 601-603
10 Sen PK, Carpenter PW, Hegde S, et al. A wave driver theory for vortical waves propagating across junctions with application to those between rigid and compliant walls. *Journal of Fluid Mechanics*, 2009, 625: 1-46
11 Friedkin JF. A laboratory study of the meandering of alluvial rivers. U. S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi, 1945. USA
12 Brice JC. Platform properties of meandering processes, In: River Meandering//Elliott CM. ed. Proceedings of the conference Rivers, Louisiana, 1983-10-24-26. New Orleans: ASCE, 1984. 1-15
13 Hooke JM, Redmond CE. Use of cartographic sources for analyzing river channel change with examples from Britain// Petts GE, ed. Historical of Large Alluvial Rivers: Western Europe, Wiley, 1989
14 Parker G, Sawai K, Ikeda S. Bend theory of river meanders. Part 2. Nonlinear deformation of finite-amplitude bends. *Journal of Fluid Mechanics*, 1982, 115: 303-314
15 Ikeda S, Parker G, Sawai K. Bend theory of river meanders. Part 1. Linear development. *Journal of Fluid Mechanics*, 1981, 112: 363-377
16 Bai YC, Xu HJ. A study on the stability of laminar open-channel flow over a sandy rippled bed. *Science in China*, *Series E: Engineering* & *Material Science*, 2005, 35: 53-73
17 Xu HJ, Bai YH. Theoretical analyses on hydrodynamic instability in narrow deep river with variable curvature. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, 36(9): 1147-1168
18 Bai YC, Ji ZQ, Xu HJ. Instability and self-adaption character of turbulence coherent structure in narrow-deep river bend. *Science China: Technology Science*, 2012, 55: 2990-2999
19 Hooke JM. Magnitude and distribution of rates of river bank erosion. *Earth Surface Processes and Landforms*, 1980, 5: 143-157
20 Hickin, E J. Lateral migration rates of rivers bends//Cheremisinoff PN, Chereminisoff NP, Cheng SL eds. Handbook of Civil Engineering. Lancaster, Pennsylvinia: Technomic Publishing, 1988
21 Pyle CJ, Richards KS, Chandler JH. Digital photogrammetric monitoring of river bank erosion. *Photogrammetric Record*, 1997, 15(89): 753-764
22 Luo JS, Wu XS. On the linear instability of a finite stokes layer: Instantaneous versus Floquet modes. *Physics of Fluids*, 2010, 22: 054106-1-054106-13
23 Herbert T. Secondary of boundary layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1988, 20: 487-526
24 Zhang ZS, Lilley GM. A theoretical model of coherent structure in a plate turbulent boundary layer//Turbulent Shear Flow III. Berlin: Springer-Verlag, 1981
25 张兆顺. 湍流. 北京：国防工业出版社，2002 (Zhang Zhaoshun. Turbulence. Beijing: National Defence Industry Press, 2002 (in Chinese))
26 Orszag SA. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. *Journal Fluid Mechanics*, 1971, 50(4): 689-703
27 Reynolds WC, Potter MC. Finite-amplitude instability of parallel shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, 27: 465-492
28 Nishioka M, Ichikawa Y. An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 1975, 72: 731-751
29 Crosato A. Analysis and Modelling of River Meandering. [PhD Thesis]. Italia: University of Padua, 2008
30 Seminara G, Zolezzi G, Tubino M, et al. Downstream and upstream influence in river meandering. Part 2. Planimetric development. *Journal of Fluid Mechanics*, 2001, 438: 213-230

附录

式 (14) ~ 式 (16) 中各参数为：

$$\varPhi_{1\psi 1s} = n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c} + \mathrm{c.c}) \cdot \mathrm{i}(\alpha_T + m\alpha_c)$$

$$\varPhi_{1\psi 1n} = -(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c} + \mathrm{c.c})$$

$$\varPhi_{1\psi 2s} = n^2(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi_c} + \mathrm{c.c} + 2) \cdot \mathrm{i}(\alpha_T + m\alpha_c)$$

$$\varPhi_{1\psi 2n} = -n(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi_c} + \mathrm{c.c} + 2)$$

$$\begin{aligned}\varPhi_{2\psi 1s} = {} & Ren\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c} + c.c\right) \cdot \mathrm{i}\left(\alpha_T + m\alpha_c\right) u_{s\psi 0} + \\ & Re\left(\hat{u}_{s\psi 1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c} + c.c\right) \cdot \mathrm{i}\left(\alpha_T + m\alpha_c\right) + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c} + c.c\right) + \\ & \mathrm{i}\alpha_c Re\left(\hat{u}_{s\psi 1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c} - c.c\right) + 2\left(\alpha_T + m\alpha_c\right)^2 n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c} + c.c\right) + \\ & \mathrm{i}\alpha_c n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c} - c.c\right) \cdot \mathrm{i}\left(\alpha_T + m\alpha_c\right)\end{aligned}$$

$$\varPhi_{2\psi 1sd} = Re\left(\hat{u}_{n\psi 1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c} + c.c\right) - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c} + c.c\right)$$

$$\varPhi_{2\psi 1n} = -Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c} + c.c\right) \cdot u_{s\psi 0} + Re\left(\mathrm{D}\hat{u}_{s\psi 1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c} + c.c\right) -$$

$$2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}+c.c\right)\cdot \mathrm{i}\left(\alpha_T+m\alpha_c\right)-\mathrm{i}\alpha_c\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_c}-c.c\right)$$

$$\begin{aligned}\varPhi_{2\psi 2s}=&Ren^2\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi_c}+c.c+2\right)\cdot \mathrm{i}\left(\alpha_T+m\alpha_c\right)u_{s\psi 0}+\\&Ren\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}+c.c\right)\left(\hat{u}_{s\psi 1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}+c.c\right)\cdot \mathrm{i}\left(\alpha_T+m\alpha_c\right)+\\&Ren\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}+c.c\right)\cdot i\alpha_c\left(\hat{u}_{s\psi 1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}-c.c\right)-\\&Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}+c.c\right)\left(\hat{u}_{n\psi 1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}+c.c\right)-\\&3\left(\alpha_T+m\alpha_c\right)^2n^2\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi_c}+c.c+2\right)-\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi_c}+c.c+2\right)+\\&3\mathrm{i}\alpha_cn^2\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi_c}-c.c\right)\cdot \mathrm{i}\left(\alpha_T+m\alpha_c\right)\end{aligned}$$

$$\varPhi_{2\psi 2sd}=-n\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi_c}+c.c+2\right)$$

$$\begin{aligned}\varPhi_{2\psi 2n}=&-Ren\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi_c}+c.c+2\right)\cdot u_{s\psi 0}-\\&Re\left(\phi_c+c.c\right)\left(\hat{u}_{s\psi 1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}+c.c\right)-4n\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi_c}+c.c+2\right)\cdot\\&\mathrm{i}\left(\alpha_T+m\alpha_c\right)-2\mathrm{i}\alpha_cn\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}-c.c\right)\end{aligned}$$

$$\varPhi_{3\psi 1s}=Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}+c.c\right)\cdot 2u_{s\psi 0}+Re\mathrm{i}\alpha_c\left(\hat{u}_{n\psi 1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}-c.c\right)$$

$$\begin{aligned}\varPhi_{3\psi 1n}=&Ren\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}+c.c\right)\cdot \mathrm{i}\left(\alpha_T+m\alpha_c\right)u_{s\psi 0}+\\&Re\left(\hat{u}_{s\psi 1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}+c.c\right)\cdot \mathrm{i}\left(\alpha_T+m\alpha_c\right)+\\&Re\left(D\hat{u}_{n\psi 1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}+c.c\right)+2\left(\alpha_T+m\alpha_c\right)^2\cdot\\&n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}+c.c\right)-\mathrm{i}\alpha_cn\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}-c.c\right)\cdot \mathrm{i}\left(\alpha_T+m\alpha_c\right)\end{aligned}$$

$$\varPhi_{3\psi 1nd}=Re\left(\hat{u}_{n\psi 1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}+c.c\right)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_c}+c.c$$