

# 双状态切换下 BVP 振子的复杂行为分析<sup>1)</sup>

陈章耀 王亚茗 张春 毕勤胜<sup>2)</sup>

(江苏大学土木工程与力学学院, 镇江 212013)

**摘要** 非线性切换系统具有广泛的工程背景, 而传统的非线性理论不能直接用来解决其中的问题, 因而成为当前国内外热点和前沿课题之一. 目前相关工作大都是围绕固定时间或单状态切换开展的, 而实际工程系统大都属于多状态切换问题, 同时多状态切换涉及到更为丰富的动力学行为. 本文基于两广义 BVP 振子, 通过引入双向切换开关, 构建了双状态切换下的非线性动力学模型, 进而研究状态切换导致的各种运动模式及其相应的产生机制. 应用非光滑系统的 Poincaré 映射理论, 推导了双状态切换下的 Lyapunov 指数的计算公式, 结合子系统的分岔分析, 得到了切换系统随分岔参数变化的动力学演化过程及其相应的最大 Lyapunov 指数的变化情况. 得到了双状态切换条件下系统存在着各种形式的振荡行为, 分析了诸如周期突变等现象及通往混沌的倍周期分岔道路, 揭示了不同运动模式的产生机制及倍周期序列的本质. 与固定时间切换和单状态切换系统不同, 双临界状态切换系统存在着更为丰富的非线性现象, 其主要原因在于双状态切换会产生更多的切换点, 且切换点的位置更加多变. 同时切换系统的倍周期分岔序列与光滑系统中的倍周期分岔序列不同, 切换系统的倍周期分岔序列只对应于切换点总数的成倍增加, 而其相应的周期一般不对应于严格的周期倍化过程.

**关键词** 切换系统, 广义 BVP 振子, 双状态切换, Lyapunov 指数

中图分类号: O322 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-16-044

## COMPLICATED BEHAVIORS AS WELL AS THE MECHANISM IN BVP OSCILLATOR WITH SWITCHES RELATED TO TWO STATES<sup>1)</sup>

Chen Zhangyao Wang Yaming Zhang Chun Bi Qinsheng<sup>2)</sup>

(Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

**Abstract** The dynamics of nonlinear switched systems which possess wide engineering background and cannot be explored directly by traditional nonlinear theory, become one of hot and frontier tasks at home and abroad for the time being. The complicated behaviors as well as the mechanism of the vector field alternated between two subsystems by two different critical states are investigated in this paper. Upon employing the typical generalized BVP oscillator as an example, by introducing bilateral switch, the nonlinear dynamical model alternated between two subsystems related two states is established, the different movement forms as well as the dynamical evolution of which caused by switches are explored in details. Based on the Poincaré theory of nonlinear system, the computational equation of Lyapunov exponents of switched system is derived. Combined with the bifurcation analysis of subsystems, different oscillations of the system are discussed, upon which the nonlinear behaviors such as sudden changes of period in periodic oscillations and the

2016-02-02 收到第 1 稿, 2016-04-21 录用, 2016-04-27 网络版发表

1) 国家自然科学基金 (11472115, 11572141, 11502091) 和镇江市科技攻关基金 (GY2013032, GY2013052) 资助项目.

2) 毕勤胜, 教授, 主要研究方向: 非线性动力学. E-mail: qbi@ujs.edu.cn

**引用格式:** 陈章耀, 王亚茗, 张春, 毕勤胜. 双状态切换下 BVP 振子的复杂行为分析. 力学学报, 2016, 48(4): 953-962

Chen Zhangyao, Wang Yaming, Zhang Chun, Bi Qinsheng. Complicated behaviors as well as the mechanism in BVP oscillator with switches related to two states. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(4): 953-962

route to chaos with period-doubling bifurcations as well as the related essence are presented. Different from the systems with fixed time or single state switch, much more nonlinear phenomena may be observed in the dynamic systems with two state switches in which there may exist more switch points with changeable positions. Furthermore, different from the cascading of period-doubling bifurcations in smooth systems, the period-doubling bifurcations in switched systems correspond to the doubling of the number of switch points, which usually does not correspond to the doubling of the real periodic length of the movements.

**Key words** switched system, generalized BVP oscillator, switch related to two states, Lyapunov exponents

## 引 言

非线性切换系统具有广泛的工程背景,其复杂动力学行为及其机理研究是当前国内外动力学与控制领域的热点课题之一<sup>[1-7]</sup>,如电路系统中继电、饱和、滞环等环节以及发电机组或大型设备进出电网<sup>[8]</sup>,汽车行驶过程中的换挡<sup>[9]</sup>等都有非线性切换系统的应用.目前关于非线性切换系统的工作大都局限于系统的稳定性及稳定条件分析,如Zhang等<sup>[10]</sup>给出了一类非线性切换系统的稳定性条件,Xiang等<sup>[11]</sup>基于状态更新探讨了一类不确定非线性切换系统的鲁棒性,Jin等<sup>[12]</sup>提出了一种控制非线性切换序列稳定性的新方法.但是,上述相关工作包括其他一些相关类型的研究<sup>[13-17]</sup>基本上都是围绕平衡点的稳定性开展的,即使对于控制,其目标也是尽快实现平衡点的稳定<sup>[18-24]</sup>,而实际系统存在着各种各样的平衡态,可能是周期振荡、概周期振荡、有时甚至是混沌振荡.同时,不同参数的变化会影响切换系统的特性,因此需要深入探讨切换系统的动力学演化过程,进而揭示其复杂性本质.

非线性切换系统有不同的切换模式,主要有时间切换、状态切换和混合切换等模式.对于时间切换模式如周期切换等非线性切换系统,国内外学者开展了研究工作,取得了一定成果<sup>[25-28]</sup>.而切换模式依赖于状态变量的非线性切换系统的研究相对较少,如Kousaka等<sup>[29]</sup>介绍了一种二维非线性切换系统在状态切换模式下的动力学特性,给出了一种切换系统分岔的一种验证方法,并且发现切分岔和全局分岔是产生各种周期解和混沌的主要原因;另外张春等<sup>[30]</sup>在Duffing振子和van der Pol振子之间引入混合切换条件,给出了相关Lyapunov指数的算法,并研究了其动力学特性.但是Kousaka给出的系统维数较低,而张春所做的混合切换没有具体的物理模型进行验证,还存在可优化之处,因此相关工作尚处在初步阶段,许多问题尤其是各种状态切换下的

振荡行为及机理分析还有待进一步深入.

本文为了分析双状态切换面导致的各种复杂行为及其演化过程,引入典型的广义BVP振子<sup>[31]</sup>,构建双状态切换下的非线性系统模型,以期揭示其复杂本质.这对于深入理解非线性状态切换系统的各种新的复杂现象,进而发展非线性理论具有一定的科学意义,同时对于实际切换系统中的新现象解释、参数识别、模型论证以及控制技术等等也具有一定的实际应用价值.

## 1 切换系统的数学模型

考察引入双向开关切换的广义BVP振子,如图1所示.该系统由一个线性电阻 $r$ ,2个电容 $C$ ,一个电感 $L$ 和2个不同的非线性电阻 $R_{N1}$ 和 $R_{N2}$ 组成.开关 $S$ 随电压 $v_1$ 的不同会在 $SW_1$ 和 $SW_2$ 两点间切换.其切换规律为,开关首先位于 $SW_1$ ,在系统振荡过程中电压 $v_1$ 的值达到 $v_1 = v_{S2}$ 时,开关切换到 $SW_2$ ,当系统振荡过程中 $v_1$ 的值达到 $v_1 = v_{S1}$ 时,开关切回到 $SW_1$ .当开关固定于 $SW_1$ 或 $SW_2$ 时,均为一广义BVP振子.系统状态可以由如下方程描述

$$\left. \begin{aligned} C \frac{dv_1}{dt} &= -i_1 - g_\sigma(v_1), \\ C \frac{dv_2}{dt} &= i_1 - \frac{v_2}{r}, \\ L \frac{di_1}{dt} &= v_1 - v_2. \end{aligned} \right\} \sigma = 1, 2 \quad (1)$$

其中 $\sigma = 1$ 为开关 $S$ 位于 $SW_1$ ,系统受子系统1控制; $\sigma = 2$ 则开关位于 $SW_2$ ,系统受子系统2控制. $g_\sigma(v_1) = -a_\sigma v_1 - b_\sigma \tanh(c_\sigma v_1)$ 表示非线性电阻的电压和电流特性, $a_\sigma, b_\sigma$ 和 $c_\sigma$ 为常数( $\sigma = 1, 2$ ).

$$\begin{aligned} \text{引入 } \tau &= \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad A_\sigma = a_\sigma \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad B_\sigma = b_\sigma c_\sigma \sqrt{\frac{L}{C}}, \\ \delta &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad x = \frac{v_1}{b_\sigma} \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad y = \frac{v_2}{b_\sigma} \sqrt{\frac{C}{L}}, \end{aligned}$$

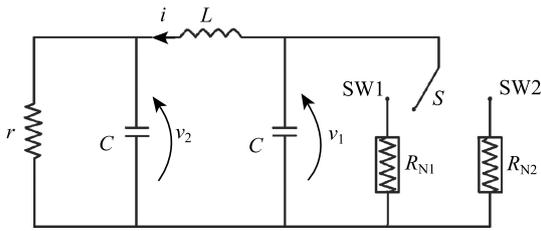


图 1 广义 BVP 切换电路

Fig. 1 The extended BVP switching circuit

$z = \frac{i_1}{b_\sigma} (\sigma = 1, 2)$ , 式 (1) 可表示为如下无量纲形式

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -z + A_\sigma x + \tanh B_\sigma x \\ \dot{y} &= z - \delta y \\ \dot{z} &= x - y \end{aligned} \right\}, \quad \sigma = 1, 2 \quad (2)$$

切换系统方程 (2) 可简写为

$$\dot{X} = F_\sigma(X), \quad \sigma = 1, 2 \quad (3)$$

其中  $X = \{x, y, z\}^T$ ,  $F_\sigma$  为相应的向量场,  $\sigma$  表示上述切换律, 数学定义如下

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma = 2 \\ 2, & \sigma = 1 \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} x = x_{01} \\ x = x_{02} \end{cases}$$

其相应的无量纲数学模型以一定的规律在两个子系统之间切换, 显然该切换系统存在两个不同的状态切换面, 即  $\Sigma_1: X = X_1$ ,  $\Sigma_2: X = X_2$ . 双状态切换可能导致更为丰富的动力学行为.

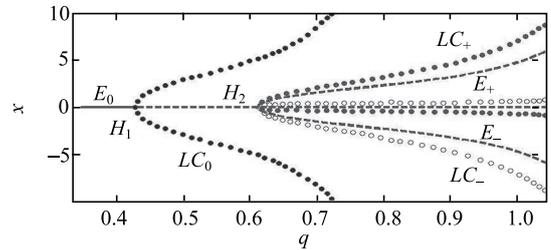
### 2 子系统分岔分析

由于切换系统 (3) 涉及到两个向量场, 其动力学行为与两个向量场的动力学特性密切相关. 为揭示该切换系统的复杂行为, 首先讨论两子系统的分岔特性.

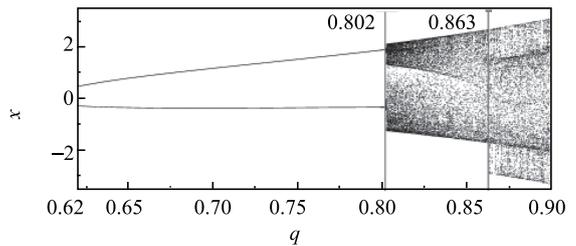
为方便起见, 在此假设参数  $\delta = 1.2$ ,  $A_\sigma = B_\sigma = q$ , ( $\sigma = 1, 2$ ). 显然, 随  $q$  的变化, 两子系统具有相同的动力特性 (见图 2, 图中实线表示稳定的平衡点, 虚线表示不稳定的平衡点).

从图 2 可以看出, 随着参数  $q$  的增加, 当  $q < 0.425$  时, 子系统具有稳定的焦点, 记为  $E_0$ . 在  $q = 0.425$  即  $H_1$  点处, 其相应的特征值出现一对纯虚根, 进一步分析可以发现, 此时会产生超临界 Hopf 分岔, 也即从平衡点  $E_0$  处出现稳定的极限环, 记为  $LC_0$  (图 2(a) 中用实心点表示). 当  $q$  增大到  $q = 0.62$  时, 平衡点数量发生变化, 出现叉式分岔. 不稳定的

平衡点  $E_0$  分岔为三个不稳定的平衡点, 记为  $E_0, E_\pm$ . 其中  $E_\pm$  相互对称. 同时  $E_\pm$  在  $H_2$  相应的特征值又出现一对纯虚根, 也即从  $E_\pm$  由超临界 Hopf 分岔导致两对称的极限环  $LC_\pm$ .



(a) 平衡点图  
(a) The equilibrium diagram



(b) 分岔图  
(b) The bifurcation

图 2 子系统随参数变化的分岔图

Fig. 2 The bifurcation diagram of the subsystem

数值仿真可以发现与上述平衡点分岔特性相吻合的动力学演化过程, 即在  $H_1$  处出现围绕平衡点  $E_0$  的稳定的极限环. 当  $q$  增大到  $q = 0.62$  时有三个稳定的极限环共存, 其中围绕  $E_0$  的极限环在  $q = 0.833$  时折回消失. 而围绕平衡点  $E_\pm$  的极限环具有相互对称的演化特征, 所以图 2(b) 仅给出了围绕  $E_+$  的极限环  $LC_+$  的演化过程. 稳定的极限环  $LC_+$  在  $q = 0.802$  会失稳导致混沌运动. 在  $q = 0.863$ , 由  $LC_\pm$  分别产生的两相互对称的混沌运动会相互作用, 导致混沌激变现象, 产生扩大了混沌吸引子.  $LC_\pm$  在  $q = 1.17$  处折回消失.

### 3 切换系统的李雅普诺夫指数计算

由于切换系统是一个非光滑系统, 其诸如周期运动和混沌运动的动力学行为必须通过一定的统计规律加以验证, 本文用 Lyapunov 指数加以验证.

对于平衡点和周期运动, 很多学者常用系统在平衡点的 Jacobi 矩阵特征值实部以及周期运动扰动方程的特征指数实部来判断其稳定性. Lyapunov 指数是对上述特征值和特征指数的一种推广, 给出了对系统任意相邻相轨线平均发散程度或平均收敛程

度的一种度量. 因此, 它可以度量系统吸引子的稳定性, 还可以判定吸引子的类型, 如平衡点、周期运动、概周期运动及混沌运动等, 是目前判断各种动力学行为的一种可靠定量方法. 但对于非光滑系统 (尤其是状态切换系统), 李雅普诺夫指数的计算不能直接使用光滑系统的方法, 需要采用复合系统的微分包含理论和 Poincaré 映射的数学方法, 对于切换部分需要使用复合映射及复合映射的链式法则进行计算, 并进行必要的处理. 下面分 2 节介绍其具体计算原理.

### 3.1 Lyapunov 指数

在计算非线性切换动力系统 Lyapunov 指数时, 采用 Poincaré 映射的数学方法, 即应用 Poincaré 映射  $P$  将三维切换系统 (3) 转化为三维离散动力系统

$$\mathbf{X}_{(k)} = P(\mathbf{X}_{(k-1)}), \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3, k = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

注意到在  $(k-1)$  时刻, 若基准轨道  $\mathbf{X}_{(k-1)}(\mathbf{X}_0)$  和邻近轨道  $\mathbf{X}_{(k-1)}(\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}_0)$  的距离

$$\delta\mathbf{X}_{(k-1)} = \mathbf{X}_{(k-1)}(\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}_0) - \mathbf{X}_{(k-1)}(\mathbf{X}_0)$$

充分小, 式 (4) 在  $\mathbf{X}_{(k-1)}$  处的线性化方程为

$$\delta\mathbf{X}_{(k)} = DP(\mathbf{X}_{(k-1)})\delta\mathbf{X}_{(k-1)}$$

由上式递推得到

$$\delta\mathbf{X}_{(k)} = DP_k(\mathbf{X}_{(0)})\delta\mathbf{X}_{(0)}, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3, \\ k = 1, 2, \dots, N$$

式中

$$DP_k(\mathbf{X}_{(0)}) = DP(\mathbf{X}_{(k-1)}) \times DP(\mathbf{X}_{(k-2)}) \times \dots \times DP(\mathbf{X}_{(0)}) \quad (5)$$

由此离散系统可得整个切换系统的 Lyapunov 指数

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln |DP_k(\mathbf{X}_{(0)})| \quad (6)$$

对于非光滑系统如切换系统必须使用复合映射及复合映射求导的链式法则求出对应的 Poincaré 映射  $P(\mathbf{X})$  及  $DP(\mathbf{X})$ .

### 3.2 三维状态切换系统的复合映射

设  $\varphi_1(\mathbf{X}, \tau), \varphi_2(\mathbf{X}, \tau)$  分别为切换系统 (3) 中两子系统的解, 由于整个系统是由两个不同子系统通过状态切换面连接的切换系统, 因此存在两个切换面

即局部超曲面  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$ , 另外由于状态切换, 这里还存在一个投影面  $\Sigma$  (如图 3), 3 个超曲面分别表示为

$$\Sigma_1 = \{(\mathbf{X}, t) = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ | x = x_{01}\}$$

其中,  $x_{01}$  为固定值, 即切换曲面方程为  $q_1(\mathbf{X}) = x - x_{01} = 0$

$$\Sigma_2 = \{(\mathbf{X}, t) = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ | x = x_{02}\}$$

其中,  $x_{02}$  为固定值, 即切换曲面方程为  $q_2(\mathbf{X}) = x - x_{02} = 0$

$$\Sigma = \{\mathbf{X} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = x_{\text{ref}}\}$$

这样在  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  之间就存在两个局部映射  $P_1$  和  $P_2$ . 而在  $\Sigma_1$  和  $\Sigma$  之间存在两个投影映射  $h$  和  $h^{-1}$ . Poincaré 映射  $P$  将被分成 4 个部分

$$\Sigma \xrightarrow{h^{-1}} \Sigma_1 \xrightarrow{P_1} \Sigma_2 \xrightarrow{P_2} \Sigma_1 \xrightarrow{h} \Sigma$$

其中

$$P_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$$

$$\mathbf{X}_{2i-1} \mapsto \mathbf{X}_{2i} = \varphi_1(T_1, \mathbf{X}_{2i-1})$$

$$P_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$$

$$\mathbf{X}_{2i+1} \mapsto \varphi_2(T_2, \mathbf{X}_{2i}) = \varphi_2(T_2, \varphi_1(T_1, \mathbf{X}_{2i-1})) =$$

$$\varphi_2 \circ \varphi_1(T_1 + T_2, \mathbf{X}_{2i-1})$$

$$h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma, (x, y, z) \mapsto (y, z) \text{ 即}$$

$$h_1(x, y, z) = y, \quad h_2(x, y, z) = z$$

$$h^{-1} : \Sigma \rightarrow \Sigma_1, (y, z) \mapsto (x, y, z) \text{ 即}$$

$$h_1^{-1}(y, z) = x, \quad h_2^{-1}(y, z) = y$$

$$h_3^{-1}(y, z) = z$$

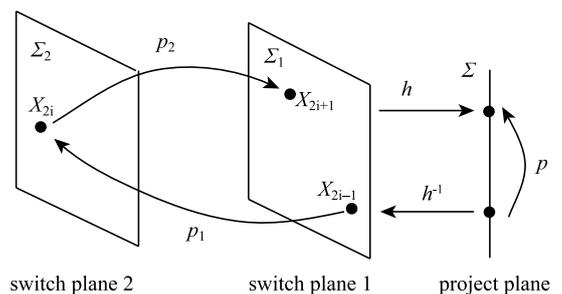


图 3 Poincaré 截面和 Poincaré 映射示意图

Fig. 3 Poincaré section and Poincaré mapping

于是  $P$  的复合映射为  $P = h \circ P_2 \circ P_1 \circ h^{-1}$ . 由复合映射求导的链式法则得出

$$DP = \nabla h \circ DP_2 \circ DP_1 \circ \nabla h^{-1} \quad (7)$$

设映射  $P_\sigma$  为

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}_\sigma(\mathbf{X}), \quad \sigma = 1, 2$$

由于  $P_1$  为状态切换<sup>[20]</sup>, 所以

$$DP_1 = \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{F}_1(\mathbf{X}_{2i}) \times \nabla q_1}{\nabla q_1 \cdot \mathbf{F}_1(\mathbf{X}_{2i})} \right) \times \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{X}_{2i-1}} \right)$$

同理  $P_2$  也为状态切换, 所以

$$DP_2 = \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{F}_2(\mathbf{X}_{2i+1}) \times \nabla q_2}{\nabla q_2 \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{X}_{2i+1})} \right) \times \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{X}_{2i}} \right)$$

其中,  $\nabla q_\sigma = [1, 0, 0]$ , ( $\sigma = 1, 2$ ) 为两切换曲面的法向量. 而  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{X}_{2i-1}}$  和  $\frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{X}_{2i}}$  由

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial \mathbf{u}} \right] &= \frac{\partial \mathbf{F}_\sigma}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{I} \end{aligned} \right\}, \quad \sigma = 1, 2$$

方程组求出, 这里  $\mathbf{I}$  为单位矩阵,  $\mathbf{u}$  为  $\mathbf{X}_{2i-1}$  或  $\mathbf{X}_{2i}$ ,  $\sigma$  分别等于 1 或 2. 而

$$\nabla h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial z} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

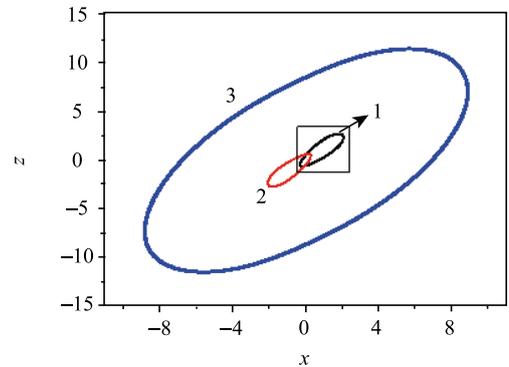
$$\nabla h^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y} & \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial z} \\ \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial y} & \frac{\partial h_2^{-1}}{\partial z} \\ \frac{\partial h_3^{-1}}{\partial y} & \frac{\partial h_3^{-1}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意到, 由于此处切换面均与  $x$  有关, 由上式可知  $\nabla h, \nabla h^{-1}$  两个投影映射的第一列和第一行元素均为零, 根据式 (7),  $DP$  变成了  $2 \times 2$  的矩阵, 故 Lyapunov 指数只有两个. 通过式 (4)~ 式 (7) 推导, 作者编写了状态切换系统随参数变化的 Lyapunov 指数的计算程序, 对状态切换系统进行了数值模拟, 以便于分析其动力学行为.

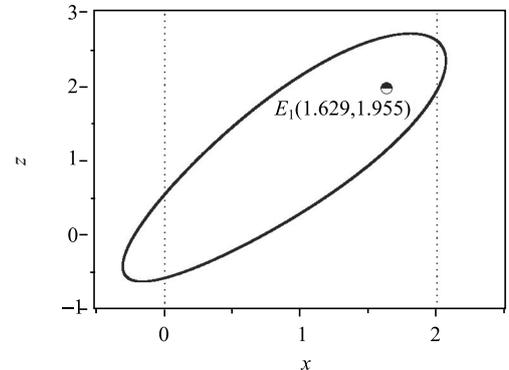
### 4 切换系统的动力学行为分析

由于状态切换条件的引入, 整个系统轨迹会依次受到不同向量场的控制, 从而引起复杂的动力学行为. 首先考察两子系统的运动特征.

在子系统 1 中选取参数为  $\delta = 1, 2, A_1 = B_1 = 0.7$ , 由第 2 节分析可知, 子系统 1 在该参数下存在 3 个稳定周期运动, 如图 4(a) 所示. 由于选取切换系统的初始条件为  $(0.1, 0.1, 0.1)$ , 故该子系统表现为围绕平衡点  $E_1(1.629, 1.629, 1.955)$  的周期振荡, 如图 4(b) 所示.



(a) 三共存的周期振荡  
(a) The coexistence of three limit cycles



(b) 围绕平衡点  $E_1$  的周期振荡  
(b) The limit cycle around equilibrium  $E_1$

图 4 子系统的稳定吸引子 ( $\delta = 1.2, A_1 = B_1 = 0.7$ )

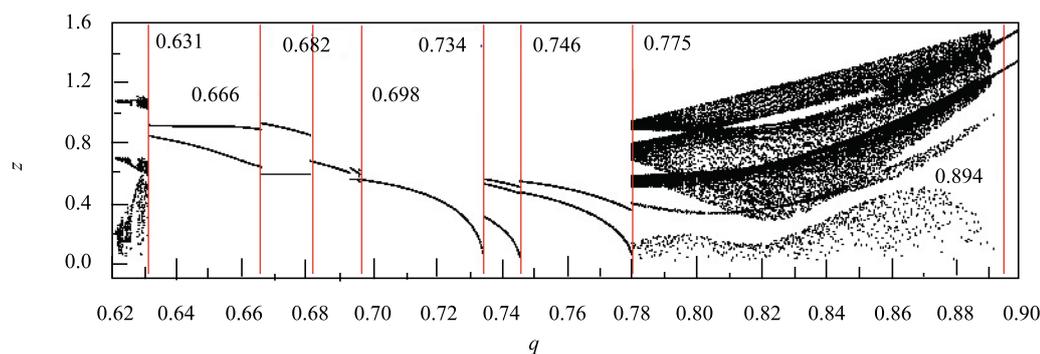
Fig. 4 The stable attractors of subsystem ( $\delta = 1.2, A_1 = B_1 = 0.7$ )

在子系统二中固定参数  $\delta = 1.2$ , 取参数  $A_2 = B_2 = q$  为分岔参数, 两切换面为

$$\Sigma_1 = \{(\mathbf{X}, t) = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^+ | x = 0.0\}$$

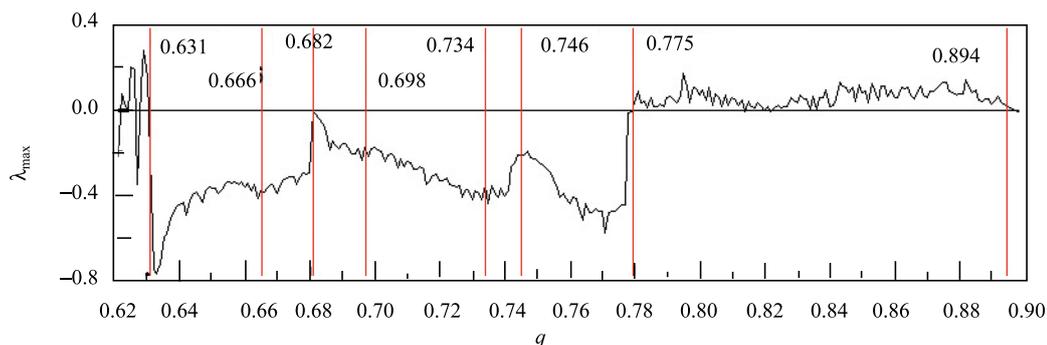
$$\Sigma_2 = \{(\mathbf{X}, t) = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^+ | x = 2.0\}$$

确定两子系统参数及切换面之后, 利用数值仿真画出切换系统随参数  $q$  变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数图 (图 5). 从图 5(a) 中可以看出, 当混沌在  $q = 0.631$  消失后, 在  $q \in [0.631, 0.780]$  区域会产生各种类型的稳定的周期振荡, 这也可以从其相应的最大 Lyapunov 指数得到证实 (见图 5(b)).



(a) 切换系统分岔图

(a) The bifurcation diagram of switched system



(b) 最大Lyapunov指数图

(b) The associated maximal Lyapunov exponent

图 5 切换系统的分岔图和最大 Lyapunov 指数图

Fig. 5 The bifurcation characteristic of switched system

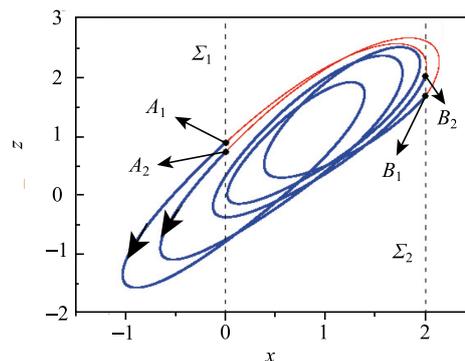
稳定的周期振荡在  $q = 0.775$  会进入混沌运动, 也即由周期振荡直接进入混沌, 从图 5(b) 中也可以发现, 其最大 Lyapunov 指数在  $q = 0.775$  时穿越零值, 而在  $q = 0.894$  时, 其最大 Lyapunov 指数再次穿越零值, 导致混沌现象消失, 产生周期振荡. 随着  $q$  的变化, 切换系统会产生周期突变的特殊现象并且存在特殊的通往混沌的路径, 下面分 2 小节对这 2 种行为进行分析.

### 4.1 周期突变现象

值得注意的是, 当参数  $q = 0.666, 0.682, 0.698, 0.734$  及  $0.746$  时, 切换系统虽然均表现为周期振荡, 但在这些参数值处, 其相应的分岔图上对应的  $z$  值却出现了不连续现象, 这说明在这些参数的相邻参数  $q$  两区间中, 其对应的周期振荡的形式不一样, 也即在这些参数处周期振荡会产生突变现象. 现以  $q = 0.666$  和  $q = 0.698$  为例, 说明其周期振荡的突变行为.

图 6 分别给出了  $q = 0.650$  和  $q = 0.670$ , 即突变点  $q = 0.666$  两边的不同周期振荡行为. 其中轨迹从  $A_1$  点出发, 受子系统 1 控制. 显然两周期运动的轨迹

可以分为 4 个部分, 亦即  $A_1B_1, B_1A_2, A_2B_2$  和  $B_2A_1$ , 其中  $A_1B_1$  和  $A_2B_2$  受子系统 1 控制, 而  $B_1A_2$  和  $B_2A_1$  受子系统 2 控制, 其振荡轨迹的运动可以详细描述如下: 当轨迹运行到位于分界面  $\Sigma_1$  上的  $A_1$  点时, 系统受子系统 1 控制, 此时子系统 1 存在着稳定的周期振荡, 也即围绕平衡点  $E_1$  的周期吸引子 (见图 4(b)). 显然, 轨迹表现为以  $A_1$  点为初值, 向稳定的极限环逼近的暂态过程. 在这过程中, 其振荡幅值不断增加, 当运行到  $B_1$  点时, 轨迹穿越分界面  $\Sigma_2$ , 使得系



(a)  $q=0.650$ 相图

(a) Phase diagram of  $q=0.650$

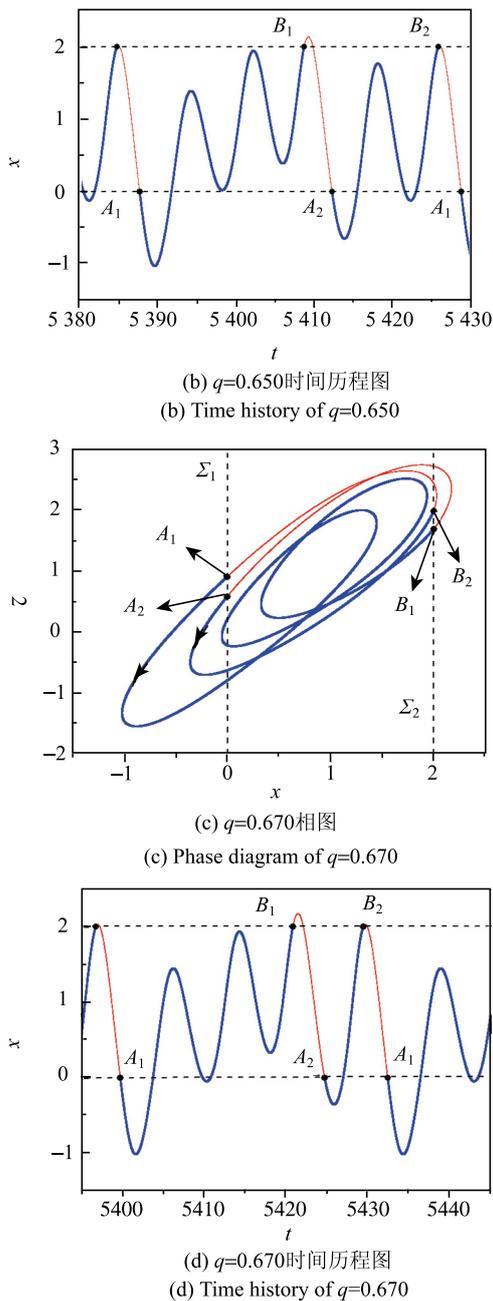


图 6 突变点  $q = 0.666$  两相邻参数域内的不同周期运动  
Fig. 6 The suddenly changed different periodic movements for  $q = 0.666$

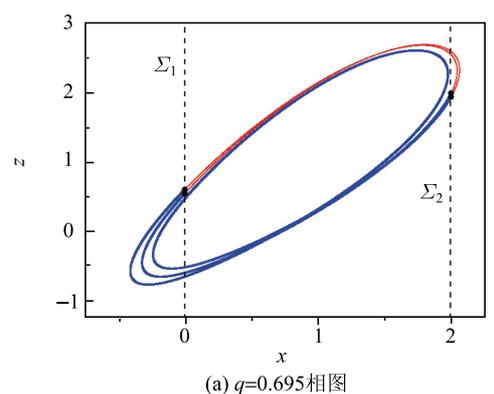
统转向受子系统 2 控制. 由图 2(a) 中的分岔图可知, 此时子系统 2 也存在着围绕平衡点  $E_+$  的稳定极限环, 因而, 轨迹将以  $B_1$  为初值, 向该极限环逐渐逼近. 当运动到  $A_2$  点时, 轨迹再次穿越分界面  $\Sigma_1$ , 使得其转向受子系统 1 控制, 当轨迹运行到  $B_2$  点处, 穿越分界面  $\Sigma_2$ , 导致系统受子系统 2 控制. 当轨迹回到出发点  $A$  时, 完成一个周期的运动.

从图 6 可以看出, 两周期振荡的轨迹存在着很大的差异, 导致这种差异的原因在于参数  $q$  的不同,

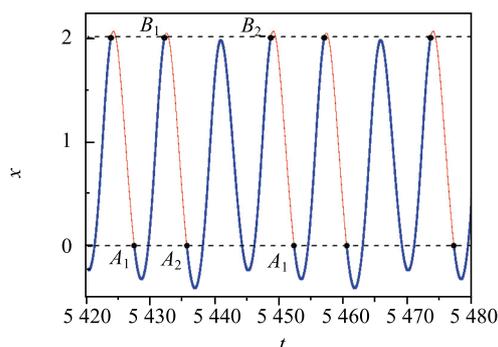
使得轨迹在两子系统之间切换的具体位置会存在着一定的区别. 虽然从  $A_1$  点出发的轨迹受子系统 1 的控制, 到达  $B_1$  点的过程不受  $q$  变化的影响 (图 6 中  $A_1B_1$  一段), 但当轨迹从  $B_1$  点出发受子系统 2 控制时, 由于  $q$  值的不同, 子系统 2 存在的稳定极限环也不同,  $q = 0.650$  时的稳定极限环振动幅值要略小于  $q = 0.670$  时的稳定极限环, 从而导致从相同的  $B_1$  出发的轨迹在子系统 2 控制下到达截面  $\Sigma_1$  时的  $A_2$  点位置不同, 进一步计算可以发现, 在  $q = 0.650$  时,  $A_2$  点到其相应的极限环的距离为  $d_1 = 0.342$ , 而在  $q = 0.670$  时,  $A_2$  点到其相应的极限环的距离为  $d_1 = 0.0431$ ,  $d_1 \gg d_2$ , 导致在各自的子系统 2 控制下, 在  $q = 0.650$  时, 轨迹趋于其相应的极限环存在较长的暂态过程, 才能到达截面  $\Sigma_2$ , 而在  $q = 0.670$  时, 由于  $A_2$  点离其相应的稳定极限环很近, 轨迹很快就到达截面  $\Sigma_2$ , 从而造成两周期振荡存在着周期突变现象. 进一步计算可得,  $q = 0.650$  时其周期为  $T_1 = 41.077$ , 而  $q = 0.670$  时其相应的周期为  $T_1 = 32.725$ .

同样在突变点  $q = 0.698$  两侧, 也会存在着不同的周期振荡. 图 7 分别给出了  $q = 0.695$  和  $q = 0.710$  时的周期振荡. 显然图 7(a) 中的周期轨迹可以分为 4 部分, 而图 7(c) 中的周期轨迹则可以分为 2 部分, 分别受子系统 1 和 2 交替控制.

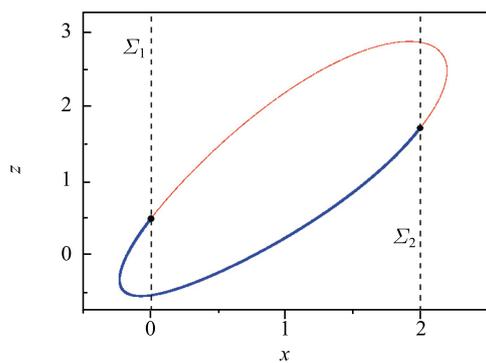
依然从相同的  $A_1$  点出发, 系统受子系统 1 控制, 在到达位于截面  $\Sigma_2$  上的  $B_1$  点时, 轨迹经历了相同的过程 (图 7(b) 和图 7(d) 中的  $A_1B_1$  段). 从  $B_1$  点出发, 轨迹将分别受  $q = 0.695$  和  $q = 0.710$  时相应的子系统 2 控制. 由于在不同的  $q$  值时子系统 2 对应于不同的稳定极限环, 在  $q = 0.710$  时  $B_1$  出发的轨迹将很快到达截面  $\Sigma_1$  上的  $A_1$  点, 完成了一个周期的振荡, 而在  $q = 0.695$  时,  $B_1$  出发的轨迹也会较快到达截面  $\Sigma_1$  上的与出发点  $A_1$  不同的  $A_2$  点, 然后受子系统 1 控制, 经历较长的振荡过程, 到达截面  $\Sigma_2$  上的  $B_2$  点, 再受子系统 2 控制, 到达截面  $\Sigma_1$  上的  $A_1$  点, 完成一个周期的振荡. 造成这一差别的原因依然在于切换点的具体位置和相应极限环的不同. 在  $q = 0.710$  时, 两子系统的稳定极限环非常接近, 从而导致只存在两个切换点, 而在  $q = 0.695$  时, 其相应的稳定极限环与子系统 1 的稳定极限环存在较大的差距, 同时, 经过子系统 2 控制后的  $A_2$  点与子系统 1 的稳定极限环之间的距离较大,  $d_s$  大致等于 0.126, 导致在子系统 1 的控制下, 轨迹需要很



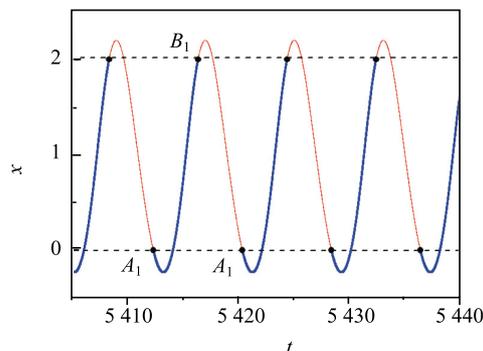
(a)  $q=0.695$ 相图  
(a) Phase diagram of  $q=0.695$



(b)  $q=0.695$ 时间历程图  
(b) Time history for  $q=0.695$



(c)  $q=0.710$ 相图  
(c) Phase diagram of  $q=0.710$



(d)  $q=0.710$ 时间历程图  
(d) Time history for  $q=0.710$

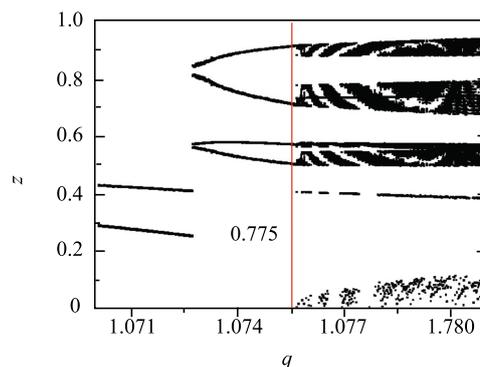
图 7 突变点  $q = 0.695$  两相邻参数域内的不同周期运动  
Fig. 7 The suddenly changed different periodic movements for  $q = 0.695$

长的暂态过程才能到达截面  $\Sigma_2$  上的  $B_2$  点, 从而产生周期突变现象, 进一步计算可得,  $q = 0.695$  时振荡的周期为  $T_3 = 24.790$ , 而  $q = 0.710$  时振荡的周期为  $T_4 = 8.044$ .

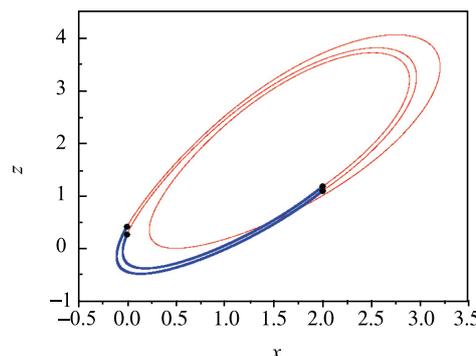
### 4.2 混沌道路

稳定的周期振荡在  $q = 0.775$  会由倍周期分岔进入混沌, 图 8(a) 为切换系统  $q = 0.775$  附近的分岔图, 图 8(b)~ 图 8(d) 分别给出了混沌道路上的周期二和周期四窗口以及混沌振荡, 随着  $q$  的增加, 在两截面上的切换点的数目会成倍地增加, 从而导致倍周期分岔序列.

必须指出的是, 切换系统的倍周期分岔序列与光滑系统中的倍周期分岔序列不同, 因为在光滑系统中只存在单个系统, 而在切换系统中, 轨迹的运动涉及到两个不同的子系统, 而且, 其中的一个子系统随参数  $q$  的变化而变化, 从而导致其倍周期分岔序列不是严格的周期成倍增加, 而是切换点数目的成倍增加, 如图 8 中周期二窗口周期  $T_5 = 22.497$ , 而周期四窗口的周期  $T_6 = 60.539$ .



(a)  $q=0.775$ 附近的分岔图  
(a) Bifurcation diagram of  $q=0.775$



(b)  $q=0.772$ 相图  
(b) Phase diagram for  $q=0.772$

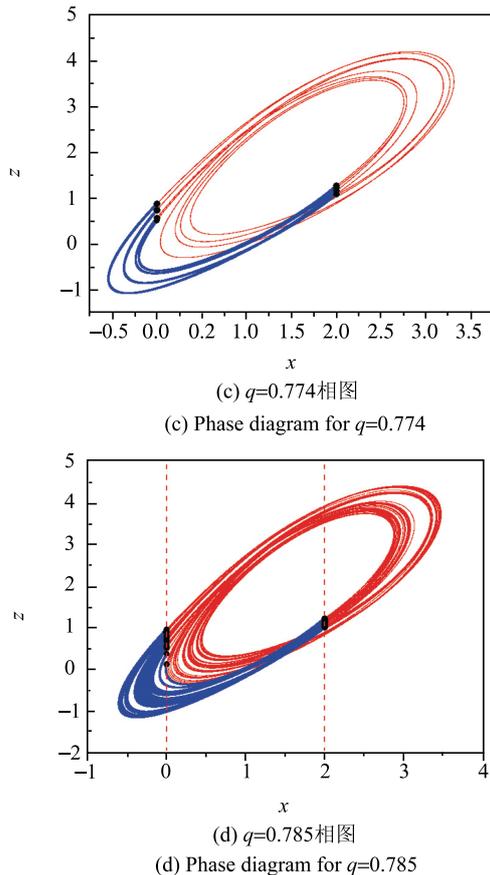


图 8 周期直接分岔为混沌

Fig. 8 Period-doubling bifurcation to chaos

## 5 结论

与固定时间切换和单状态切换系统不同, 双临界状态切换系统存在着更为复杂的非线性现象, 如周期突变现象, 即在突变点参数的两侧, 虽然同样是周期运动, 但其运动模式和相应的周期均会存在很大的差异, 导致这一现象的主要原因在于切换点的位置及相应的子系统的吸引子存在明显的区别. 同时, 系统也存在着倍周期分岔序列导致混沌的道路, 然而, 与光滑系统中的倍周期分岔序列不同, 切换系统的倍周期分岔序列只对应于切换点数目的成倍增加, 而其相应的周期一般不对应于严格的周期倍化过程.

## 参 考 文 献

- 1 Pérez C, Bensítez F. Switched convergence of second-order switch nonlinear systems. *Journal of Control, Automation, and Systems*, 2012, 10(5): 920-930
- 2 王仁明, 关治洪, 刘新芝. 一类非线性切换系统的稳定性分析. 系统工程与电子技术. 2004, 26(1):68-71 (Wang Renming, Guan Zhi-

- hong, Liu Xinzhi. Stability analysis for a class of nonlinear switched systems. *Systems Engineering and Electronics*, 2004, 26(1): 68-71(in Chinese))
- 3 Davila J, Pisano A, Usai E. Continuous and discrete state reconstruction for nonlinear switched system via high-order sliding-mode observers. *International Journal of System Science*, 2011, 42(5): 725-735
- 4 刘正凡, 蔡晨晓, 段文勇等. 不确定切换时滞非线性系统状态切换的指数稳定性. 控制与决策, 2014, 29(12): 2247-2252(Liu Zhengfan, Cai Chenxiao, Duan Wenyong, et al. Exponential stability of uncertain switched nonlinear time-delay systems with state-dependent switching. *Control and Decision*, 2014, 29(12): 2247-2252(in Chinese))
- 5 Oishi M, Mitchell I, Bayen AM, et al. Hybrid verification of an interface for an automatic landing. *Proceeding of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2002, 2: 1607-1613
- 6 Bishop BE, Spong MW. Control of redundant manipulators using logic-based switching. *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, 1998, 2:16-18
- 7 Horowitz R, Varaiya P. Control design of an automated highway system. *Proceedings of IEEE*, 2000, 88(7): 913-925
- 8 方志明. 切换系统稳定性分析与优化控制若干问题研究. [博士学位论文]. 南京: 南京理工大学, 2012(Fang Zhiming. Study on several problems of stability and optimal control of switched systems. [PhD Thesis]. Nanjing: Nanjing University of Science & Technology, 2012 (in Chinese))
- 9 Goncalves JM. Constructive global analysis of hybrid systems. [PhD thesis]. MA, USA:Massachusetts Institute of Technology, 2000
- 10 Zhang JF, Han ZZ, Zhu FB, et al. Absolute exponential stability and stabilization of switched nonlinear systems, *Systems & Control Letters*, 2014, 66(1): 51-57
- 11 Xiang WM, Xiao J, Iqba MN. Robust fault detection for a class of uncertain switched nonlinear systems via the state updating approach. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2014, 12(2): 132-146
- 12 Jin Y, Fu J, Zhang YM, et al. Reliable control of a class of switched cascade nonlinear systems with its application to flight control. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2014, 11(1): 11-21
- 13 Yu Aleksandrov A, Chen Y, Platonov AV, et al. Stability analysis for a class of switched nonlinear systems. *Automatica*, 2011, 47(10): 2286-2291
- 14 Moulay E, Bourdais R, Perruquetti W. Stabilization of nonlinear switched systems using control Lyapunov functions. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2007, 1(4): 482-490
- 15 Liu YY, Zhao J. Stabilization of switched nonlinear systems with passive and non-passive subsystems. *Nonlinear Dyn*, 2012, 67(3): 1709-1716
- 16 Colaneria P, Geromelb JC, Astolfic A. Stabilization of continuous-time switched nonlinear systems. *Systems & Control*, 2008, 57(1): 95-103
- 17 Alessandria A, Sanguineti M. Connections between  $L_p$  stability and asymptotic stability of nonlinear switched systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2007, 1(1): 501-509
- 18 Hajiahmadi M, De Schutter B, Hellendoorn H. Stabilization and

- robust  $H_\infty$  control for sector-bounded switched nonlinear systems. *Automatica*, 2014, 50(10): 2726-2731
- 19 Han TT, Ge SS, Lee TH. Adaptive neural control for a class of switched nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 2009, 58(2): 109-118
- 20 Elfarra NH, Mhaskar P, Christofider PD. Output feedback control of switched nonlinear systems using multiple Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(12): 1163-1182
- 21 Chiang ML, Fu LC. Robust output feedback stabilization of switched nonlinear systems with average dwell time. *Asian Journal of Control*, 2014, 16(1): 264-276
- 22 Jouili K, Braiek NB. Stabilization of non-minimum phase switched nonlinear systems with the concept of multi-diffeomorphism. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2015, 23(1-3): 282-293
- 23 Mojica-Nava E, Quijano N, Rakoto-Ravalontsalama N. A polynomial approach for optimal control of switched nonlinear systems. *Robust Nonlinear Control*, 2014, 24(12): 1797-1808
- 24 Lin Q, Loxton R, Teo KL. Optimal control of nonlinear switched systems: computational methods and applications. *Journal of the Operations Research Society of China*, 2013, 1(3): 275-311
- 25 陈章耀, 雪增红, 张春等. 周期切换下 Rayleigh 振子的振荡行为及机理. *物理学报*, 2014, 63(1): 1-8 (Chen Zhangyao, Xue Zhenhong, Zhang Chun, et al. Oscillation behaviors and mechanism of Rayleigh oscillator with periodic switches. *Acta Phys. Sin*, 2014, 63(1): 1-8 (in Chinese))
- 26 Jerome JW. Time dependent closed quantum systems: nonlinear Kohn-Sham potential operators and weak solutions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, 429(2): 995-1006
- 27 Yang JQ, Chen YT, Zhu FL, et al. Synchronous switching observer for nonlinear switched systems with minimum dwell time constraint. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(11): 4665-4681
- 28 Ma RC, Zhao SZ, Wang M. Global robust stabilisation of a class of uncertain switched nonlinear systems with dwell time specifications. *International Journal of Control*, 2014, 87(3): 589-599
- 29 Kousaka T, Ueta T, Kawakami H. Bifurcation of switched nonlinear dynamical systems. *IEEE Trans. Circuits Syst*, 1999, 46(7): 878-885
- 30 Zhang C, Bi QS, Han XJ, et al. On two-parameter bifurcation analysis of switched system composed of Duffing and van der Pol oscillators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, 19(3): 750-757
- 31 Nishiuchi Y, Ueta T, Kawakami H. Stable torus and its bifurcation phenomena in a simple three-dimensional autonomous circuit. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 27(4): 941-951