

研究论文

旋转薄板的一种高次动力学模型与频率转向¹⁾方建士* 章定国^{†,2)}

*(南京工程学院材料工程学院, 南京 211167)

†(南京理工大学理学院, 南京 210094)

摘要 对固结于转动刚体上柔性薄板的刚柔耦合动力学和频率转向特性进行了深入研究, 建立了系统的高次刚柔耦合动力学模型, 该动力学模型计入了由于横向变形而引起的面内纵向缩短项, 即非线性耦合变形量, 并且完整保留了与非线性耦合变形量相关的所有项. 研究表明, 高次耦合模型不仅适用于小变形问题, 而且还适用于大变形问题, 弥补了一次近似耦合模型在处理大变形问题上的不足. 旋转悬臂薄板相邻两阶模态间既有柔和的频率转向现象也有剧烈的频率转向现象. 柔和的频率转向伴随着的振型转换的过程是连续的, 而剧烈的频率转向伴随着的振型转换的过程则是不连续的. 相隔多阶模态间存在传递性频率转向, 并伴随着振型转移.

关键词 旋转薄板, 高次耦合模型, 动力学, 频率转向, 振型转换

中图分类号: O313.7, O326 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-15-194

A HIGH-ORDER RIGID-FLEXIBLE COUPLING MODEL AND FREQUENCY VEERING OF A ROTATING CANTILEVER THIN PLATE¹⁾

Fang Jianshi* Zhang Dingguo^{†,2)}

*(School of Materials Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China)

†(School of Sciences, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract The rigid-flexible coupling dynamics and frequency veering of a thin flexible plate on a rotating rigid body are further studied. The high-order coupling (HOC) dynamic model is derived by Lagrange's equations. The in-plane longitudinal shortening terms caused by lateral deformation, generally called non-linear coupling deformation terms, are considered here. Furthermore, all derived items associated with the non-linear coupling terms are retained completely in the HOC model. The HOC model can not only be applied in the small deformation case, but also in the large deformation case, and makes up the deficiency of the first-order approximation coupling (FOAC) model in the large deformation case. In addition, the frequency veering phenomena along with the corresponding mode shape variations are exhibited and discussed in detail. When two frequency loci veer, the nodal line patterns of the mode shapes switch their shapes each other, and the changes of the nodal line patterns are continuous in the mild veering region, while those in the abrupt veering region are discontinuous. The transitive frequency veerings among the multiple modes accompanied by mode shape transfer are also exhibited.

Key words rotating thin plate, high-order coupling model, dynamics, frequency veering, mode shape interaction

2015-05-29 收稿, 2015-08-21 录用, 2015-08-28 网络版发表.

1) 国家自然科学基金(11302096, 11272155, 11132007), 江苏省“333 工程”(BRA2011172) 和中央高校基本科研业务专项资金(30920130112009) 资助项目.

2) 章定国, 教授, 主要研究方向: 多体系统动力学和控制. E-mail: zhangdg419@mail.njust.edu.cn

引用格式: 方建士, 章定国. 旋转薄板的一种高次动力学模型与频率转向. 力学学报, 2016, 48(1): 173-180

Fang Jianshi, Zhang Dingguo. A high-order rigid-flexible coupling model and frequency veering of a rotating cantilever thin plate. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, 48(1): 173-180

引 言

做大范围运动柔性构件在航天器、机器人和高速旋转机构等工程技术领域有着广泛的应用,比如涡轮叶片、直升机机翼、卫星天线和太阳帆板等.此类柔性构件的动力学特性受大范围运动与其自身弹性变形之间相互耦合的强烈影响.自凯恩等^[1]对运动基上柔性梁的动力学行为进行研究,并提出“动力刚化”概念后,国内外学者对做大范围运动的梁^[2-4]、薄板^[5-6]的动力刚化问题展开了深入的研究.并逐渐形成了以计入横向变形引起的纵向缩短的二阶非线性耦合变形量为主要方法的刚柔耦合动力学建模法,得到了一次近似耦合模型^[2-4,6].由于在该模型中引入了小变形假设,而忽略了非线性耦合变形量的高阶项.随着柔性构件尺寸的增大或者结构刚度的降低,由于小变形假设而忽略的耦合变形量的高阶项将对柔性构件的动力学性能产生重要影响.目前,对大变形柔性体的动力学研究已经成为多体系统动力学领域的一个热点,然而大部分都是对大变形柔性梁^[7]的动力学问题进行研究,对大变形柔性板的动力学分析则较少见.文献[8]利用绝对节点坐标法研究了小弹性模量柔性薄板的大变形问题.但是,由于绝对节点坐标法在建模过程中没有直接区分刚体的运动变量与节点的弹性变形,导致该方法即使在处理小变形问题时也要按大变形的处理方法.

自索斯韦尔等^[9]对旋转运动梁的固有频率进行研究后,国内外学者开始对做大范围运动柔性体的自由振动特性进行了广泛而深入的研究,其中,绝大部分是对大范围运动柔性梁模型^[10-11]的研究.文献[12]引入非笛卡尔变量表示结构位移场,考虑非线性耦合变形的一阶项,导出了附加动力刚化项的线性方程,并对旋转柔性薄板的模态特性进行了研究,指出旋转薄板的频率转向是柔和的,即当频率转向发生时,两阶频率曲线走向平缓且相距较远.文献[13]利用绝对节点坐标法研究了与文献[12]相同的问题.事实上,文献[12-13]的结论有待进一步拓展.频率转向问题的实质是模态间的振动耦合和与之相伴的振型转换.深入研究这类问题对结构的振动测试和断裂故障诊断具有重要意义.

本文对旋转运动中心刚体-柔性薄板的刚柔耦合动力学建模及模态特性进行深入研究,在动力学建模过程中,保留了非线性耦合变形量的所有高阶

项,建立了旋转悬臂薄板的高次刚柔耦合动力学模型,选用切比雪夫多项式为模态函数的基函数.将本文所建模型与相关文献所用模型的仿真结果进行了对比验证,采用本文高次耦合模型处理了大变形问题,并从能量守恒角度验证该模型的正确性.并将高次板模型的仿真结果与高次梁模型^[7]的仿真结果做比较.最后对旋转运动薄板的模态特性进行更深入地分析,得到了更为复杂的频率转向特性.

1 旋转柔性薄板的变形描述

考虑如图1所示做旋转运动的柔性薄板模型,其中,中心刚体绕 y 轴做定轴转动, x 轴位于薄板未变形时的中面上.薄板的长度为 a ,宽度为 b ,厚度为 h ,弹性模量为 E ,质量密度为 ρ 以及泊松比为 μ .图1中的 P_0 点为薄板未变形时中面任意点, P 点为 P_0 点变形后的位置,则变形后薄板任意一点 P 的矢径可表示为

$$\mathbf{r} = (R + x + u)\mathbf{i} + (y + v)\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (1)$$

其中, R 为中心刚体半径, (x, y) 为 P_0 的中面坐标, u, v 和 w 分别为 P_0 点沿 x, y 和 z 轴方向的变形位移, \mathbf{i}, \mathbf{j} 和 \mathbf{k} 分别为 x, y 和 z 轴方向的单位矢量.

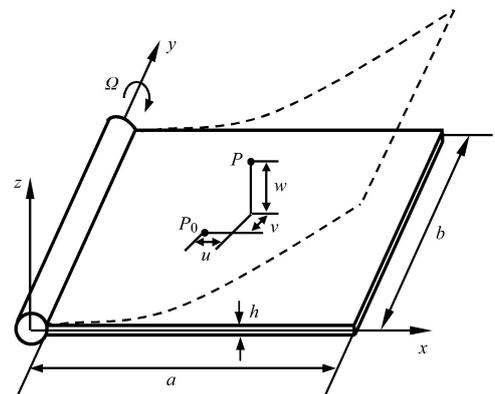


图1 做旋转运动中心刚体-柔性薄板模型

Fig. 1 Model of a rotating hub-flexible thin plate

面内纵向变形表示为

$$u = u_1 + u_c, \quad v = v_1 + v_c \quad (2)$$

式中, u_1 和 v_1 分别为 P_0 点沿 x 和 y 方向的面内伸长量,由于远小于横向弯曲变形量 w ,故在本文中将其忽略. u_c 和 v_c 分别为横向弯曲变形量引起的沿 x 和 y 方向的面内缩短量,又称为非线性耦合变形量,表

示为

$$\left. \begin{aligned} u_c &= -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial w(\xi, y, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \\ v_c &= -\frac{1}{2} \int_0^y \left(\frac{\partial w(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

该耦合变形成在传统的零次近似动力学模型中是不予考虑的，然而在一定条件下它会对系统的动力学特性产生重要影响。

采用瑞利-里兹法描述薄板的变形，表示为

$$w(x, y, t) = \sum_{j=1}^J \phi_j(x, y) q_j(t) \quad (4)$$

其中， $\phi_j(x, y)$ 为模态函数，只要满足柔性薄板几何边界条件的任意函数即可选为模态函数， $q_j(t)$ 为广义模态坐标， J 为模态截断数。本文将模态函数 $\phi_j(x, y)$ 表示为

$$\phi_j(x, y) = F(x, y) P_r(x) P_s(y) \quad (5)$$

其中， $F(x, y)$ 称为边界函数，只需满足几何边界条件；如图 1 所示，其边界函数 $F(x, y) = x^2 P_i(\chi)$ ($i = r, s; \chi = x, y$) 为正交切比雪夫多项式， $r = 1, 2, \dots, N_x, s = 1, 2, \dots, N_y, j = (r-1) \times N_y + s$ 。故式 (4) 中， $J = N_x \times N_y$ 。其中， N_x 和 N_y 分别为沿 x 和 y 方向切比雪夫多项式的截断项数。切比雪夫多项式的余弦函数形式可表示为

$$\left. \begin{aligned} P_r(x) &= \cos \left[(r-1) \arccos \left(2 \frac{x}{a} - 1 \right) \right] \\ P_s(y) &= \cos \left[(s-1) \arccos \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

2 系统动力学方程

将式 (1) 对时间求导，可得 P 点的速度矢量

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{u}_c + \Omega w) \mathbf{i} + \dot{v}_c \mathbf{j} + [\dot{w} - \Omega(R + x + u_c)] \mathbf{k} \quad (7)$$

系统动能可表示为

$$T = \frac{1}{2} J_{oh} \Omega^2 + \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} dV \quad (8)$$

由于忽略面内拉伸引起的伸长量，因此，系统势能只含弯曲变形引起的应变能，表示为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

其中，薄板的弯曲刚度 $D = Eh^3/[12(1-\mu^2)]$ 。

取广义坐标列阵 $\mathbf{q} = (\theta, q_1, q_2, \dots, q_J)^T$ ，将式 (8) 和式 (9) 代入第二类拉氏方程，可得系统动力学方程

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (10)$$

其中， \mathbf{M} 为广义质量阵， \mathbf{Q} 为广义力阵，表示为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \mathbf{M}^{12} \\ \mathbf{M}^{21} & \mathbf{M}^{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_\theta \\ \mathbf{Q}^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{11} &= J_{oh} + J_1 + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J M_{ij} q_i q_j - \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J C_{ij} q_i q_j + \\ &\quad \frac{1}{4} \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \sum_{l=1}^J G_{ijkl}^X q_i q_j q_k q_l \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i^{12} &= \mathbf{M}_i^{21} = -S_i - \sum_j \sum_k E_{ijk} q_j q_k + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_j \sum_k E_{jki} q_j q_k \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_{ij}^{22} = M_{ij} + \sum_{k=1}^J \sum_{l=1}^J G_{ijkl}^X q_k q_l + \sum_{k=1}^J \sum_{l=1}^J G_{ijkl}^Y q_k q_l \quad (14)$$

$$\begin{aligned} Q_\theta &= \tau - 2\dot{\theta} \left(\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J M_{ij} q_i \dot{q}_j - \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J C_{ij} q_i \dot{q}_j \right) - \\ &\quad \dot{\theta} \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \sum_{l=1}^J G_{ijkl}^X q_i q_j q_k \dot{q}_l + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J E_{ijk} \dot{q}_i \dot{q}_j q_k \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i^2 &= \dot{\theta}^2 \left(\sum_{j=1}^J M_{ij} q_j - \sum_{j=1}^J C_{ij} q_j \right) - \sum_{j=1}^J K_{ij}^B q_j + \\ &\quad 2\dot{\theta} \left(\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J E_{ijk} q_j \dot{q}_k - \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J E_{jki} q_j \dot{q}_k \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \sum_{l=1}^J G_{ijkl}^X q_j q_k q_l - \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \sum_{l=1}^J G_{ijkl}^X q_j \dot{q}_k \dot{q}_l - \\ &\quad \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \sum_{l=1}^J G_{ijkl}^Y q_j \dot{q}_k \dot{q}_l \end{aligned} \quad (16)$$

其中，式 (15) 中的 τ 为施加于中心刚体上的驱动力偶矩，上述各式中的相关常量表述略。

式 (10) 为旋转柔性薄板的高次刚柔耦合动力学模型 (简称高次耦合模型). 式 (12) ~ 式 (16) 中的下划线项是由于非线性耦合变形量 (即 u_c 和 v_c) 而引起的. 其中, 单下划线项为非线性耦合变形量的一阶项, 双下划线项为非线性耦合变形量的高阶项. 在传统零次近似模型中是不考虑下划线项的, 即忽略非线性耦合变形量; 而一次近似耦合模型只考虑了非线性耦合变形量引起的一阶项, 即单下划线项. 从动力学方程可以看出, 系统的刚性旋转运动与柔性薄板的弹性变形高度耦合, 因此, 上述三种动力学模型将随旋转运动状态的改变而表现出强烈的差别.

3 系统刚柔耦合动力学分析

为了验证本文方法的正确性, 首先将本文所建动力学耦合模型的数值仿真结果与文献 [5] 的数值仿真结果进行比较. 柔性薄板模型选用与文献 [5] 相同的结构与材料参数: 刚体的半径 $r = 0$, 板的长度 $a = 1.0\text{ m}$, 宽度 $b = 0.5\text{ m}$, 厚度 $h = 0.0025\text{ m}$, 质量密度 $\rho = 3.0 \times 10^3\text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E = 70\text{ GPa}$, 泊松比 $\mu = 0.3$. 假定旋转运动角速度变化规律已知, 表示为

$$\Omega = \begin{cases} \Omega_s \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \right), & 0 \leq t \leq T \\ \Omega_s, & t > T \end{cases} \quad (17)$$

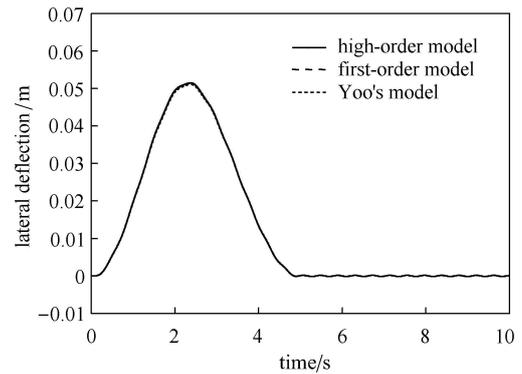
其中, $T = 5\text{ s}$, 截取 3×4 阶模态进行仿真计算.

图 2 为 $\Omega_s = 20\text{ rad/s}$ 时, 柔性薄板自由端面中点的变形位移历程. 从图 2 可以看出, 本文的高次耦合模型, 一次近似耦合模型与文献 [5] 的线性模型的仿真结果高度吻合. 在加速旋转过程中, 薄板自由端面中点的最大变形位移约为 0.05 m , 相对于 1.0 m 长的柔性薄板而言只是小变形. 通过此算例可以说明: (1) 本文动力学模型的正确性; (2) 在小变形范畴, 一次近似模型与高次耦合模型的仿真结果高度吻合. 不过, 一次近似模型的计算效率较高次耦合模型的计算效率更高. 因此, 在处理小变形问题时尽量采用一次近似模型以提高计算效率.

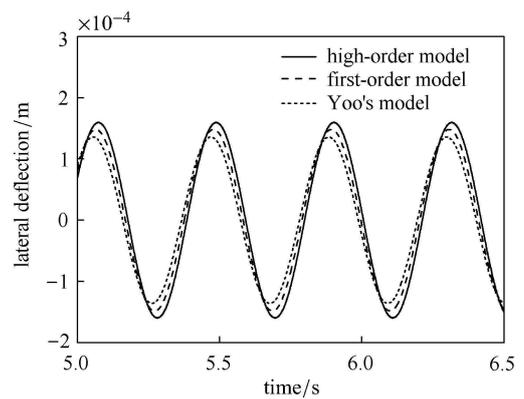
上述算例中大范围运动是已知的, 接下来再针对中心刚体大范围运动为未知的情形进行仿真. 假定施加在中心刚体上的外力偶矩为

$$\tau(t) = \begin{cases} \tau_0 \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (18)$$

其中, $T = 2\text{ s}$.



(a)



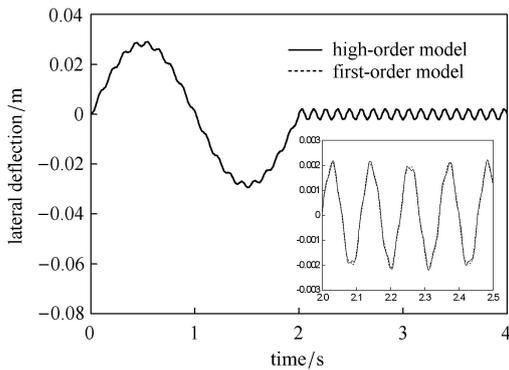
(b)

图 2 柔性薄板自由端面中点的变形位移 ($\Omega_s = 20\text{ rad/s}$)

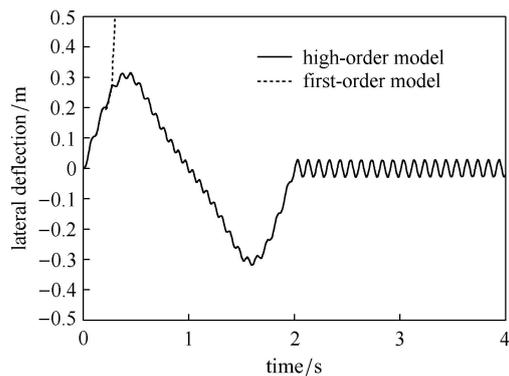
Fig. 2 The lateral deflection of middle point of the free end of the thin plate ($\Omega_s = 20\text{ rad/s}$)

图 3 分别为驱动力偶矩 $\tau_0 = 5\text{ N}\cdot\text{m}$ 和 $\tau_0 = 60\text{ N}\cdot\text{m}$ 时, 悬臂柔性薄板自由端面中点的变形位移历程. 从图 3(a) 可以发现, 在 $\tau_0 = 5\text{ N}\cdot\text{m}$ 时, 高次耦合模型与一次近似耦合模型的仿真结果高度吻合. 由图 3(a) 可以看出, 在加载过程中, 柔性薄板自由端面中点的最大变形位移约为 0.029 m , 属于小变形, 这再一次说明了两种模型在小变形情况下都是适用的. 如图 3(b) 所示, 当驱动力偶矩 $\tau_0 = 60\text{ N}\cdot\text{m}$ 时, 采用一次近似耦合模型的仿真结果很快发散, 而高次耦合模型的仿真结果依然收敛. 在此加载过程中, 高次耦合模型下薄板自由端面中点的最大变形位移约为 0.31 m , 已属大变形. 由此可见, 在大变形情况下, 一次近似耦合模型已不再适用, 而高次耦合模型仍然适用.

为了进一步验证本文高次耦合模型的正确性, 对系统的能量进行分析. 从式 (18) 可以看出, 当



(a) $\tau_0 = 5 \text{ N}\cdot\text{m}$



(b) $\tau_0 = 60 \text{ N}\cdot\text{m}$

图 3 柔性薄板自由端面中点的变形位移

Fig. 3 The lateral deflection of middle point of the free end of the thin plate

$t > 2 \text{ s}$ 时, 中心刚体-柔性薄板系统即进入自由转动状态, 系统能量应该守恒, 即

$$T + U = \text{const} \quad (19)$$

图 4 为 $\tau_0 = 60 \text{ N}\cdot\text{m}$ 加载过后, 系统开始自由转动时系统动能、势能和总能量曲线图. 从图 4 可以看

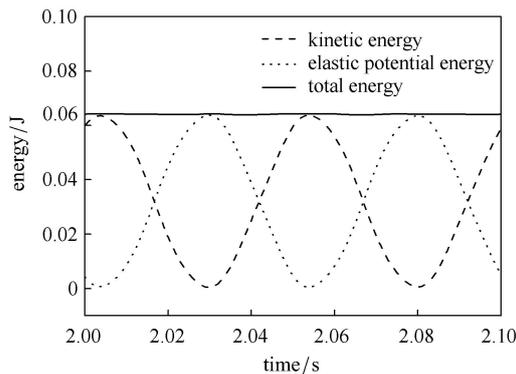


图 4 柔性薄板自由转动的能量时变曲线

Fig. 4 The energy loci of the thin plate

出, 系统动能和板的弹性势能之和恒等于常量, 即总能量, 符合系统能量守恒, 从而验证了本文高次耦合模型的正确性.

为便于计算, 在工程中经常会将薄板模型简化为梁模型. 图 5 为当驱动力偶矩 $\tau_0 = 60 \text{ N}\cdot\text{m}$ 时, 采用高次耦合板模型和高次梁模型^[7]的自由端面中点的变形位移历程. 从图 5 可以发现, 采用板模型的最大变形位移稍小于采用梁模型的最大变形位移. 究其原因, 应该是薄板模型中引入泊松比所致. 这个算例进一步说明本文的高次耦合薄板模型在处理大变形问题时的正确性.

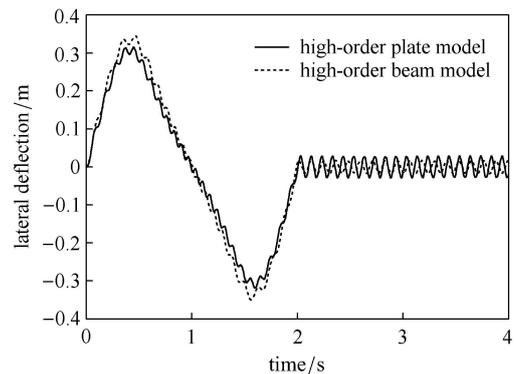


图 5 薄板和梁自由端面中点变形位移的比较

Fig. 5 The lateral deflection of a thin plate and a beam

4 频率转向与振型转换

假定中心刚体的旋转角速度恒定, 只保留非线性耦合变形量的一阶项, 由式 (10) 可得旋转悬臂薄板的自由振动微分方程

$$\sum_{j=1}^J [M_{ij}\ddot{q}_j - \theta^2(M_{ij} - \bar{C}_{ij})q_j + K_{ij}^B q_j] = 0 \quad (20)$$

引入无量纲变量和参数

$$\varsigma = t/T^*, \quad \xi = x/a, \quad \zeta = y/b, \quad \kappa_i = q_i/a$$

$$\delta = R/a, \quad \sigma = a/b, \quad \gamma = \Omega T^*$$

其中 $T^* = \sqrt{\rho h a^4 / D}$, δ 为中心刚体半径比率, σ 为板的长宽比, γ 为无量纲角速度. 因此, 式 (20) 可写成

$$\sum_{j=1}^J [\bar{M}_{ij}\ddot{\kappa}_j - \gamma^2(\bar{M}_{ij} - \bar{C}_{ij})\kappa_j + \bar{K}_{ij}^B \kappa_j] = 0 \quad (21)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ij} &= \int_0^1 \int_0^1 \psi_i \psi_j d\xi d\zeta \\ \bar{C}_{ij} &= \int_0^1 \int_0^1 (\delta + \xi) \bar{H}_{ij}^X d\xi d\zeta \\ \bar{K}_{ij}^B &= \int_0^1 \int_0^1 [\psi_{i,\xi\xi} \psi_{j,\xi\xi} + \psi_{i,\zeta\zeta} \psi_{j,\zeta\zeta} + \mu \psi_{i,\xi\xi} \psi_{j,\zeta\zeta} + \\ &\quad \mu \psi_{i,\zeta\zeta} \psi_{j,\xi\xi} + 2(1 - \mu) \psi_{i,\xi\zeta} \psi_{j,\xi\zeta}] d\xi d\zeta \end{aligned} \tag{22}$$

其中 $\bar{H}_{ij}^X(\xi, \zeta) = \int_0^\xi \psi_{i,\epsilon} \psi_{j,\epsilon} d\epsilon$.

引入关于无量纲时间量 ζ 的调和函数 $\kappa = e^{j\omega\zeta} \theta$. 其中, j 为虚数, ω 为无量纲固有频率, θ 为特征值常值系数阵. 则系统特征方程表示为

$$(\hat{K} - \omega^2 \hat{M})\theta = 0 \tag{23}$$

其中, $\omega = \nu T^*$, ν 为旋转悬臂板薄板自由振动的圆频率 (单位: rad/s), \hat{M} 和 \hat{K} 为对称矩阵, 表示为

$$\hat{M}_{ij} = \bar{M}_{ij}, \hat{K}_{ij} = \gamma^2 (\bar{C}_{ij} - \bar{M}_{ij}) + \bar{K}_{ij}^B \tag{24}$$

表 1 为 $\delta = 0$ 时, 旋转悬臂正方形薄板的前 5 阶无量纲固有频率的比较. 其中, 本文采用前 5×7 阶模态. 从表 1 可以看出, 由本文方法所得结果与采用组合梁模态函数 (前 5×7 阶模态)^[12], 绝对节点坐标法^[13] 的结果高度吻合. 因此, 在后文的模态特性分析过程中, 选用前 35 阶模态.

表 1 旋转薄板的前 5 阶无量纲固有频率的比较

Table 1 Comparison of first five dimensionless natural frequencies

Mode	$\gamma = 1$		$\gamma = 2$			
	Article	Ref.[12]	Ref.[13]	Article	Ref.[12]	Ref.[13]
1	3.5028	3.5156	3.6391	3.5842	3.5963	4.1007
2	8.5201	8.5328	8.5711	8.5380	8.5507	8.7552
3	21.419	21.520	21.469	21.767	21.865	21.877
4	27.213	27.353	27.194	27.245	27.384	27.284
5	31.076	31.206	31.068	31.348	31.477	31.379

文献 [12-13] 仅研究了旋转悬臂薄板前 5 阶模态特性, 指出某相邻二阶模态间将随角速度的增大会出现柔和的频率转向现象, 即频率发生转向时, 两阶频率曲线走向平缓且相距较远. 图 6 为中心刚体半径比率 $\delta = 2$ 时, 旋转悬臂正方形薄板前 8 阶无量纲固有频率随角速度的变化曲线. 从图 6 可以发现, 较高阶模态间存在更为复杂的频率转向特性: (1) 相邻

二阶模态间既出现了柔和的频率转向现象: 比如, 在 $\gamma \approx 4$ 时, 第 3 阶与第 4 阶模态之间, 在 $\gamma \approx 13.5$ 时, 第 5 阶与第 6 阶模态之间; 也出现了急剧的频率转向现象 (即频率转向时, 两阶频率曲线转折明显且相距较近): 比如, $\gamma \approx 3$ 时, 第 7 阶与第 8 阶模态之间; $\gamma \approx 8.5$ 时, 第 6 阶与第 7 阶模态之间; $\gamma \approx 14.5$ 时, 第 4 阶与第 5 阶模态之间. (2) 多阶模态间的传递性频率转向现象: 随角速度的增大, 比如, 第 8 阶、第 7 阶和第 6 阶模态之间出现连续的频率转向现象. (3) 在非常小的速度区域内, 柔和的频率转向现象和急剧的频率转向现象几乎同时存在且相互交叉影响: 比如, 在 γ 约为 13 ~ 15 区间内, 第 4、第 5 和第 6 阶模态间的频率转向现象.

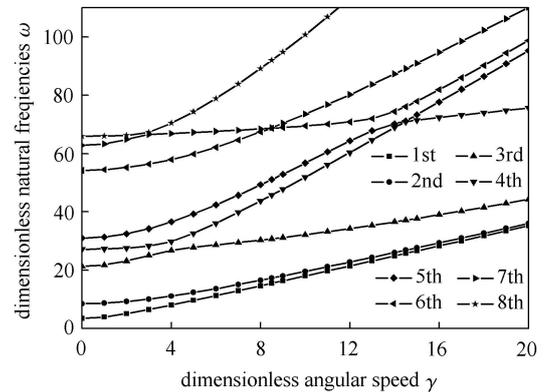


图 6 旋转悬臂柔性方板的前 8 阶无量纲固有频率随角速度的变化曲线

Fig. 6 The first eight dimensionless natural frequencies versus angular speed

频率转向的实质是不同模态间的振动耦合和振型的相互转换. 图 7 ~ 图 9 分别为与图 6 所对应的悬臂柔性方板的第 4、第 5 和第 6 阶模态振型节线随无量纲角速度的变化规律. 从图 7 可以发现, 在 $\gamma = 14.4$ 时, 第 4 阶模态为主弯模态; 而在 $\gamma = 14.5$ 时, 其已转变为主扭模态; 从图 8 可以发现, 在 $\gamma = 14.4$ 时, 第 5 阶模态为主扭模态; 而在 $\gamma = 14.5$ 时, 其已转变为主弯模态. 显然, 这两阶模态的振型在 γ 为 14.4 ~ 14.5 的速度区域内发生了相互转换, 而且这种转换似乎瞬间完成, 其过程并不是连续的. 再结合图 6 所示的频率曲线, 我们可以发现, 在 $\gamma = 14.5$ 附近, 第 4 阶和第 5 阶的频率曲线正处于急剧转向区域. 这就说明对应于急剧频率转向区域内的振型转换过程是不连续的. 而从图 8 和图 9 可以发现, 对应于柔和频率转向区域内的第 5 阶和第 6 阶模态振型节线的变化过

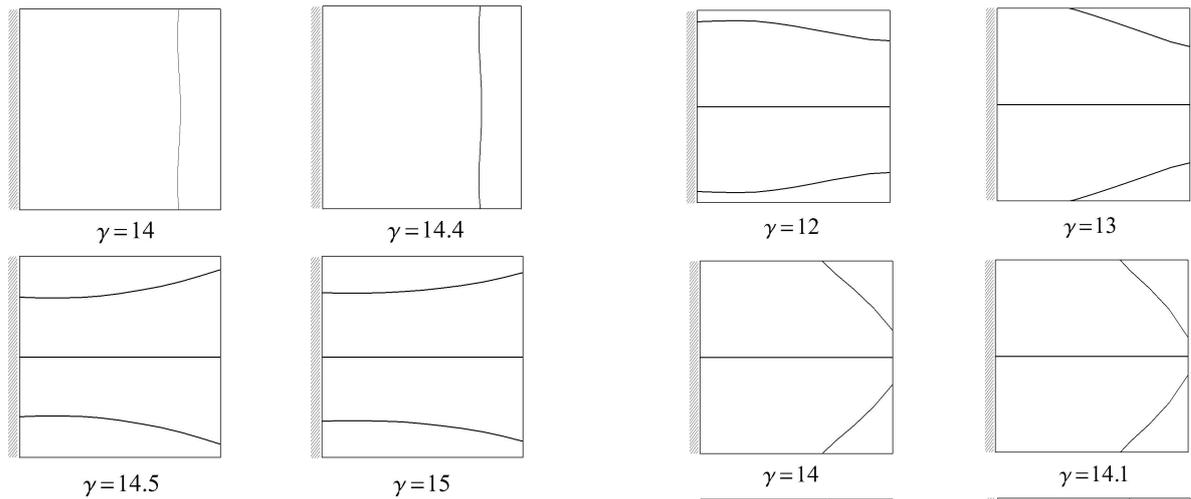


图 7 第 4 阶模态振型节线随无量纲角速度的变化规律
Fig. 7 Variation of the fourth mode shape nodal lines versus dimensionless rotational speed

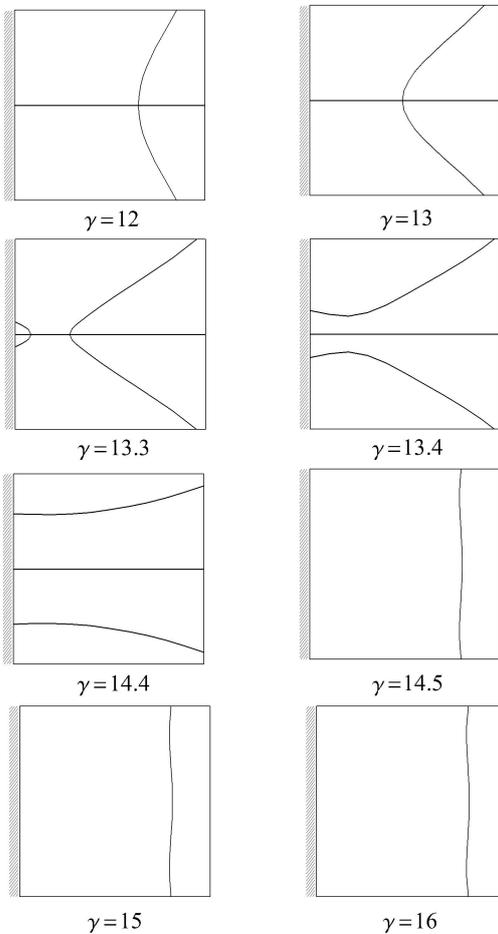


图 8 第 5 阶模态振型节线随无量纲角速度的变化规律
Fig. 8 Variation of the fifth mode shape nodal lines versus dimensionless rotational speed

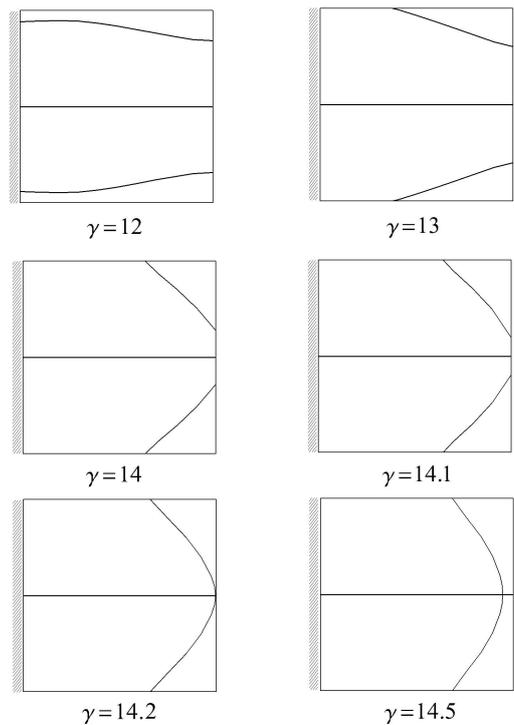


图 9 第 6 阶模态振型节线随无量纲角速度的变化规律
Fig. 9 Variation of the sixth mode shape nodal lines versus dimensionless rotational speed

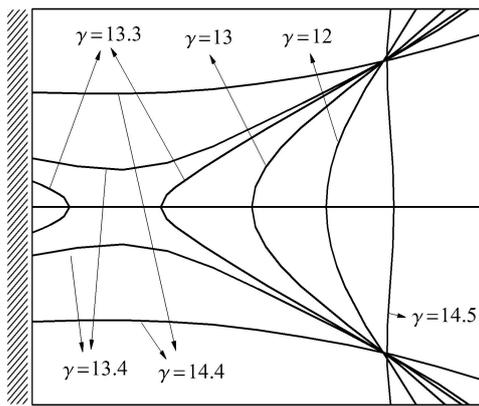
程则是连续的.

从图 7 ~ 图 9 还可以发现, 当 $\gamma = 12$ 时, 第 6 阶模态为主扭模态, 当 $\gamma = 13.4$ 时, 第 5 阶模态已转变为主扭模态, 当 $\gamma = 14.5$ 时, 第 4 阶模态也已转变为主扭模态. 结合图 6 所示的频率曲线, 不难发现在 γ 为 13 ~ 15 的区域内, 第 4、第 5 和第 6 阶模态间相互耦合, 出现传递性频率转向. 这个多阶模态间的传递性频率转向从某种意义上讲是通过中间模态 (即第 5 阶模态) 将第 6 阶的主扭模态“转移”至第 4 阶模态.

图 10 分别是由图 8 和图 9 中的振型节线整合而成. 从图 10 可以发现, 连续变化的振型节线都经过两个固定点, 而不连续变化的振型节线 ($\gamma = 14.5$ 时的第 5 阶模态振型节线, 如图 10(a) 所示) 则明显偏离了这两个固定点.

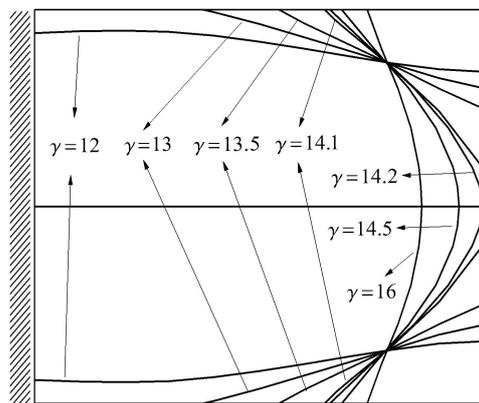
5 结论

本文以做旋转运动中心刚体和柔性薄板组成的刚柔耦合系统为对象, 建立了系统的高次刚柔耦合动力学模型, 在动力学方程中完整保留了与非线性耦合变形量相关的所有项. 研究发现, 高次耦合模型



(a) 第5阶模态振型节线

(a) The fifth mode shape nodal lines



(b) 第6阶模态振型节线

(b) The sixth mode shape nodal lines

图10 旋转悬臂柔性方板的模态振型节线随无量纲角速度的变化规律

Fig. 10 Variation of the fifth and sixth mode shape nodal lines versus dimensionless rotational speed

既能适用于小变形,也能适用于大变形,弥补一次近似耦合模型在处理大变形问题上的不足;在处理小变形问题时,尽量采用一次近似模型以提高计算效率.在相同的驱动条件下,由于薄板模型中考虑了泊松比效应致使板模型的最大变形位移稍小于梁模型的最大变形位移.本文还对旋转柔性薄板的频率转向特性进行了深入研究,指出旋转悬臂薄板既有柔和的频率转向现象,也有剧烈的频率转向现象;还存在多阶模态间的传递性频率转向现象;在非常小的速度区域内,柔和的频率转向现象和急剧的频率转向现象几乎同时存在且相互交叉影响.在柔和的频率转向区域内,振型转换的过程是连续的;而急剧的频率转向所对应的振型转换过程则是突变、不连续的.多阶模态间的传递性频率转向伴随着的是振

型的“转移”.

参 考 文 献

- 1 Kane TR, Ryan RR, Banerjee AK. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1987, 10(2): 139-151
- 2 Cai GP, Hong JZ, Yang SX. Dynamic analysis of a flexible hub-beam system with tip mass. *Mechanics Research Communications*, 2005, 32(2): 173-190
- 3 王新栋, 邓子辰, 王艳等. 基于时间有限元方法的旋转叶片动力学响应分析. *应用数学与力学*, 2015, 35(4): 353-363 (Wang Xindong, Deng Zichen, Wang Yan, et al. Dynamic behavior analysis of rotational flexible blades based on time-domain finite element method. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, 35(4): 353-363 (in Chinese))
- 4 杜超凡, 章定国, 洪嘉振. 径向基点插值法在旋转柔性梁动力学中的应用. *力学学报*, 2015, 47(2): 279-288 (Du Chaofan, Zhang Dingguo, Hong Jiazhen. A meshfree method based on radial point interpolation method for the dynamic analysis of rotating flexible beams. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(2): 279-288 (in Chinese))
- 5 Yoo HH, Chung J. Dynamics of rectangular plates undergoing prescribed overall motion. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 239(1): 123-137
- 6 刘锦阳, 洪嘉振. 做大范围运动矩形薄板的建模理论和有限元离散方法. *振动工程学报*, 2003, 16(2): 175-179 (Liu Jinyang, Hong Jiazhen. Dynamic modeling theory and finite element method for a rectangular plate undergoing large overall motion. *Journal of Vibration Engineering*, 2003, 16(2): 175-179 (in Chinese))
- 7 陈思佳, 章定国, 洪嘉振. 大变形旋转柔性梁的一种高次刚柔耦合动力学模型. *力学学报*, 2013, 45(2): 251-256 (Chen Sijia, Zhang Dingguo, Hong Jiazhen. A high-order rigid-flexible coupling model of a rotating flexible beam under large deformation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 45(2): 251-256 (in Chinese))
- 8 邹凡, 刘锦阳. 大变形薄板多体系统的动力学建模. *应用力学学报*, 2010, 27(4): 740-745 (Zou Fan, Liu Jinyang. Dynamic formulation for thin plate system with large deformation. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2010, 27(4): 740-745 (in Chinese))
- 9 Southwell R, Gough F. The free transverse vibration of airscrew blades. *British A. R. C. Report and Memoranda*, 1921, 766
- 10 Li L, Zhang DG, Zhu WD. Free vibration analysis of a rotating hub-functionally graded material beam system with the dynamic stiffening effect. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333: 1526-1541
- 11 Saurabh K, Anirban M. Large amplitude free vibration analysis of axially functionally graded tapered rotating beam by energy method. *Mechanisms and Machine Science*, 2015, 23: 473-483
- 12 Yoo HH, Pierre C. Modal characteristic of a rotating rectangular cantilever plate. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 259(1): 81-96
- 13 Zhao J, Tian Q, Hu HY. Modal analysis of a rotating thin plate via absolute nodal coordinate formulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2011, 6(041013): 1-8

(责任编辑: 陆启韶)

(责任编辑: 刘希国)