

基于虚拟中心引力场方法的航天器转移轨道设计¹⁾

袁建平^{*,†} 孙冲^{*,†,2)} 方群^{*,†}

^{*}(西北工业大学航天学院, 西安 710072)

[†](航天飞行动力学技术国家级重点实验室, 西安 710072)

摘要 空间机动技术是实现空间操作任务的基础, 具有重要的研究价值. 研究了连续推力作用下航天器转移轨道设计问题, 提出了一种基于虚拟中心引力场的轨道设计方法. 该方法有两大特点: (1) 能够将机动轨道设计问题转化为虚拟中心引力场参数的优化问题, 简化了设计过程; (2) 对轨道形状或推力方向、大小不做任何假定, 能够应用于一般情况下的机动轨道设计. 将该方法应用于航天器二维和三维的转移轨道设计, 并对形状方法进行了对比分析. 仿真结果分析表明, 采用该方法简化了轨道设计过程, 为航天器快速轨道设计提供了新思路.

关键词 轨道机动, 转移轨道, 连续推力, 中心引力场

中图分类号: V412.4+1 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-14-112

引言

空间机动技术是实现空间操作任务的基础, 具有重要的应用价值. 连续推力轨道机动容易控制、机动能力强, 因此成为研究热点^[1-4]. 采用连续推力设计机动轨道存在一个很大的难点, 即无法求其解析解. 针对该问题, 本文提出一种基于虚拟中心引力场 (virtual central gravitational field, VCGF) 的连续推力轨道设计新方法. 该方法是通过设计中心引力场来实现轨道机动. 该方法包含两个步骤: 第一步是设计满足任务约束的虚拟中心引力场; 第二步是计算实现该虚拟中心引力场所需推力. 该方法将航天器轨道设计问题转化为 2 个参数寻优问题, 很大程度上简化了轨道设计过程, 为航天器机动轨道设计提供新思路.

1 虚拟中心引力场的定义

虚拟中心引力场是指引力场中心不在地心上, 且其引力常数不等于地心引力常数的中心引力场. 该引力场可用参数 (\mathbf{r}_0, μ_2) 来定义, 其中 \mathbf{r}_0 为虚拟引力场中心与地心相对位置矢量, 称为虚拟引力场位置参数; μ_2 为虚拟引力场引力常数; 在虚拟中心

引力场中的轨道为虚拟圆锥曲线轨道.

2 轨道动力学建模与虚拟中心引力场设计

2.1 动力学建模

设定地心引力场引力常数为 μ_1 , 航天器在地心惯性坐标系下位置矢量为 \mathbf{r}_0 , 假定在航天器上施加推力加速度为 \mathbf{a}_t , 则有

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + \frac{\mu_1}{|\mathbf{r}_1|^3} \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_t \quad (1)$$

假设地心惯性坐标系为 $OXYZ$, 虚拟中心引力场坐标系为 $O'X'Y'Z'$. 推力与地心引力场的合力形成的虚拟中心引力场参数为 \mathbf{r}_0, μ_2 , 则在虚拟中心引力场坐标系下有

$$\frac{d^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)}{dt^2} + \left(\frac{\mu_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|^3} \right) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = \mathbf{0} \quad (2)$$

设 $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$, 在特定虚拟中心引力场中, \mathbf{r}_0 为定值, 则 $(\mathbf{r}_0)' = 0, \mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_0' = \mathbf{r}_1'$. 地心惯性坐标系下航天器位置和速度与虚拟中心引力场坐标系下位置和速度转化关系为

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \quad (3)$$

2014-05-08 收稿, 2014-08-01 录用, 2014-12-12 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11272255).

2) 孙冲, 博士研究生, 主要研究方向: 航天飞行动力学与控制. E-mail: sunc2011100269@126.com

引用格式: 袁建平, 孙冲, 方群. 基于虚拟中心引力场方法的航天器转移轨道设计. 力学学报, 2015, 47(1): 180-184

Yuan Jianping, Sun Chong, Fang Qun. Spacecraft's transfer orbit design based on the virtual central gravity field method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2015, 47(1): 180-184

由式 (2) 和式 (3) 可知, 在虚拟中心引力场坐标系下, 航天器运动方程可表示为如下形式

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} + \frac{\mu_2}{|\mathbf{r}_2|^3} \mathbf{r}_2 = 0 \quad (4)$$

实现虚拟中心引力场所需推力可由下式得到

$$\mathbf{a}_t = \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + \frac{\mu_1}{|\mathbf{r}_1|^3} \mathbf{r}_1 - \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} - \frac{\mu_2}{|\mathbf{r}_2|^3} \mathbf{r}_2 = \frac{\mu_1}{|\mathbf{r}_1|^3} \mathbf{r}_1 - \frac{\mu_2}{|\mathbf{r}_2|^3} \mathbf{r}_2 \quad (5)$$

由上述分析可知, 通过调整推力, 可形成一种虚拟中心引力场. 在该虚拟中心引力场中, 航天器运动轨迹为虚拟圆锥曲线. 若该虚拟圆锥曲线轨道满足轨道转移约束, 则可实现轨道机动.

2.2 虚拟中心引力场设计

如图 1 所示, 在地心引力场中, 航天器在 A 点的速度、位置矢量、真近点角分别为 $\mathbf{V}_{a1} = (V_{ax}, V_{ay})$, $\mathbf{r}_{a1} = (r_{ax}, r_{ay})$, f_{a1} ; 在 B 点速度、位置矢量、真近点角分别为 $\mathbf{V}_{b1} = (V_{bx}, V_{by})$, $\mathbf{r}_{b1} = (r_{bx}, r_{by})$, f_{b1} . 在虚拟中心引力场中, A 点速度矢量为 $\mathbf{V}_{a2} = (V_{ax}, V_{ay})$, A 点位移矢量为 $\mathbf{r}_{a2} = \mathbf{r}_{a1} + \mathbf{r}_0 = (r_{ax} + r_{0x}, r_{ay} + r_{0y})$, 真近点角为 f_{a2} ; B 点速度矢量为 $\mathbf{V}_{b2} = \mathbf{V}_b = (V_{bx}, V_{by})$, 位置矢量为 $\mathbf{r}_{b2} = \mathbf{r}_{b1} + \mathbf{r}_0 = (r_{bx} + r_{0x}, r_{by} + r_{0y})$, 真近点角为 f_{b2} . 实现轨道转移, \mathbf{r}_0 应该满足以下条件

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{a2} &= \mathbf{r}_{a1} + \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_{b2} &= \mathbf{r}_{b1} + \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{h}_2 &= \mathbf{r}_{a2} \times \mathbf{V}_{a2} = \mathbf{r}_{b2} \times \mathbf{V}_{b2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

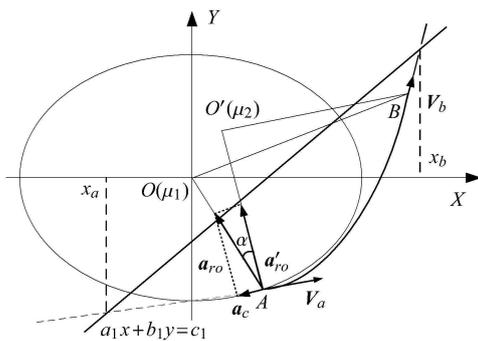


图 1 在虚拟中心引力场中的转移轨道及受力分析
Fig. 1 Transfer orbit and force analysis using VCGF

而虚拟引力常数 μ_2 应满足以下条件

$$\left. \begin{aligned} r_{a2} &= \frac{h_2^2}{\mu_2} \frac{1}{1 + e_2 \cos(f_{a2})} \\ r_{b2} &= \frac{h_2^2}{\mu_2} \frac{1}{1 + e_2 \cos(f_{b2})} \\ f_{b2} &= f_{a2} + \Delta f \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

求解方程组 (7) 需要确定 2 个参数值, \mathbf{r}_0, f_{a2} , 其中 $f_{a2} \in [0, 2\pi]$; 而 \mathbf{r}_0 的范围可以由方程 (6) 确定. 在平面轨道设计问题中, $\mathbf{r}_0 = (r_{0x}, r_{0y})$, 式 (6) 化为

$$a_1 r_{0x} - b_1 r_{0y} = c_1 \quad (8)$$

其中, a_1, b_1, c_1 为常值系数.

如图 2 所示, $\mathbf{r}_0 = (r_{0x}, r_{0y})$ 的取值可以用一条直线来表示. 在圆锥曲线轨道上任何一点的矢径和其速度夹角小于 180° , 由此可知 \mathbf{r}_0 范围. 如图 1 所示, 虚拟中心引力场位置参数范围为 $r_{0x} \in (x_a, x_b)$, 代入式 (8) 可知 \mathbf{r}_0 范围. 在三维轨道设计问题中, 由式 (7) 约束条件亦可得到 \mathbf{r}_0 .

在虚拟中心引力场中, 转移轨道就是虚拟圆锥曲线轨道, 可以虚拟开普勒轨道要素来表示. 同样实现转移轨道消耗能量和时间也可以采用这些虚拟轨道要素表示. 这样, 转移轨道设计可以转化为 2 个参数优化问题. 优化参数为 $\mathbf{x} = (\mathbf{r}_0, f_{a2})$, 其中优化参数 \mathbf{r}_0 的取值范围由式 (6) 确定; 而优化参数 $f_{a2} \in [0, 2\pi]$; 优化目标函数为采用虚拟轨道参数表示的能量消耗或转移时间. 假定 f_E 为虚拟圆锥曲线轨道 (转移轨道) 所消耗的能量, 则目标函数为 $F(\mathbf{x}) = \min(f_E, \mathbf{x})$. 当求出优化参数 $\mathbf{x} = (\mathbf{r}_0, f_{a2})$, 转移轨道就唯一确定了. 求解优化问题, 本文采用了粒子群优化算法, 具体算法详见文献 [9].

3 实现虚拟圆锥曲线轨道所需推力

3.1 二维平面轨道转移推力计算

实现平面轨道转移所需推力可由式 (9) 求出

$$\left. \begin{aligned} a_{ro} &= \mu_1 / r_1^2 \\ a'_{ro} &= \mu_2 / r_2^2 \\ \alpha &= \arccos(a'_{ro} / a_{ro}) \\ a_c &= a_{ro} \sin(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中, a_{ro}, a'_{ro}, a_c 分别为地心引力, 虚拟中心引力, 及控制力.

3.2 三维轨道转移推力计算

虚拟引力场中 A 点速度和位置矢量为 $\mathbf{v}_{a2} = [v_{ax}, v_{ay}, v_{az}]$; $\mathbf{r}_{a2} = \mathbf{r}_{a1} + \mathbf{r}_0$; B 点位置矢量 $\mathbf{r}_{b2} = \mathbf{r}_{b1} + \mathbf{r}_0$. 则在虚拟中心引力场中有:

$$\left. \begin{aligned} r_{a2} &= \frac{h_2^2}{\mu_2} \frac{1}{1 + e_2 \cos(f_{a2})} \\ r_{b2} &= \frac{h_2^2}{\mu_2} \frac{1}{1 + e_2 \cos(f_{b2})} \\ \mathbf{h}_1 &= \mathbf{r}_{a2} \times \mathbf{v}_{a2} \\ \mathbf{h}_2 &= \mathbf{r}_{b2} \times \mathbf{v}_{b2} \\ \mathbf{h}_1 &= \mathbf{h}_2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

假定航天器在机动轨道上所受地心引力加速度为 a_{Mr1} , 在虚拟引力场引力加速度 a_{Mr2} , 推力加速度为 $\mathbf{T}_{ac} = [T_{acn}, T_{act}]$, 其中, T_{acn}, T_{act} 方向分别为法向和周向, 则有

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \pi - \arccos\left(\frac{|\mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{h}_2||\mathbf{r}_1|}\right) \\ a_{Mr1} &= \frac{\mu_1}{r_1^2} \\ a_{Mr2} &= \frac{\mu_2}{r_2^2} \\ \alpha &= \arcsin\left(\frac{a_{Mr2}}{a_{Mr1} \cos \beta}\right) \\ T_{act} &= a_{Mr1} \cos \beta \sin \alpha \\ T_{acn} &= a_{Mr1} \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中, β 为 \mathbf{r}_1 与虚拟圆锥曲线轨道平面的夹角. α 为周向力加速度 T_{act} 与地心引力在虚拟圆锥曲线平面投影的夹角.

4 仿真分析

4.1 二维转移轨道设计

初始点和终端点位置矢量和速度矢量分别为 $\mathbf{r}_{a1} = [8491.2, 133.9]$ km, $\mathbf{r}_{b1} = [-9993, -2913.3]$ km, $\mathbf{v}_{a1} = [0, 6.6872]$ km/s, $\mathbf{v}_{b1} = [1.6960, -4.9478]$ km/s. 时间约束为 10402 s, 实现轨道转移的虚拟中心引力场参数为 $\mathbf{r}_0 = [734.5, 108.7]$ km, $\mu_2 = 2.98946 \times 10^5$. 仿真结果见图 2 和图 3, 采用虚拟中心引力场方法实现轨道转移所需要推力加速度小于 3.5×10^{-4} km/s², 整段轨道消耗能量 $\Delta V = 1.4973$ km/s. 而采用形状方法所需推力加速度小于 7×10^{-2} km/s², 整段轨道消耗能量 $\Delta V = 10.4728$ km/s.

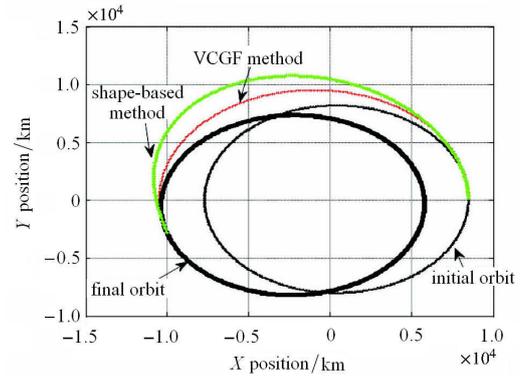
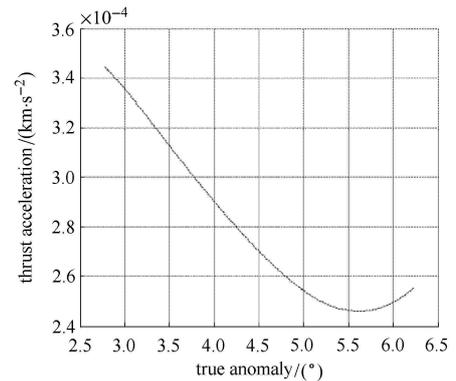
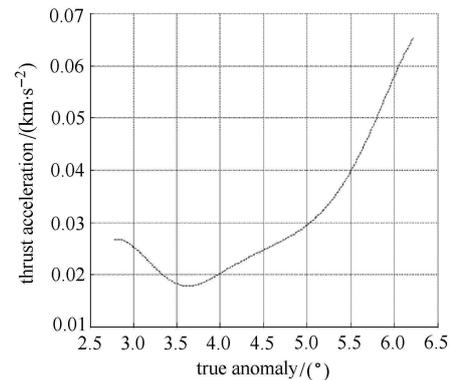


图 2 采用 VCGF 方法和形状方法的转移轨道
Fig. 2 Transfer trajectories using VCGF and SB methods



(a)



(b)

图 3 采用 VCGF(a) 和形状方法 (b) 所需推力
Fig. 3 Thrust profiles using VCGF (a) and SB methods (b)

4.2 三维平面机动轨道设计

初始点和终端点的位置矢量和速度矢量分别为 $\mathbf{r}_{a1} = [-7032, -4490, 3600]$ km, $\mathbf{r}_{b1} = [7572, 305.8, 0]$ km, $\mathbf{v}_a = [-2.457, 4.618, 2.533]$ km/s, $\mathbf{v}_b = [-0.6387, -6.644, 0]$ km/s 时间约束为 4353 s. 虚拟中心引力场参数为 $\mathbf{r}_0 = [-634, 710.5, -691.7]$ km, $\mu_2 = 3.18880 \times 10^5$.

仿真结果图 4 和图 5, 采用 VCGF 方法其推力小于 3.0 m/s^2 , 能量消耗 $\Delta V = 5.46 \text{ km/s}$. 采用形状方法实现转移轨道所需推力小于 60 km/s^2 , 能量消耗 $\Delta V = 15.5106 \text{ km/s}$.

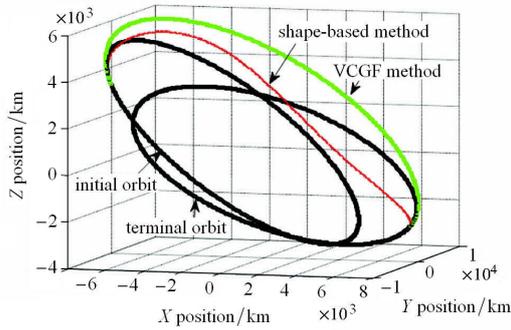
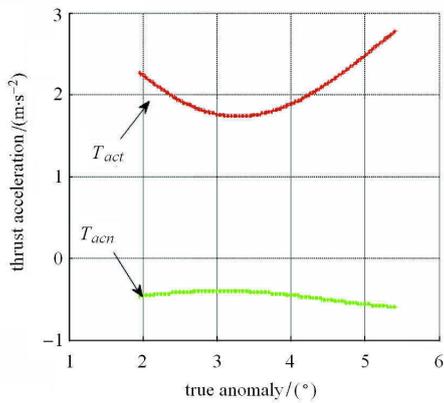
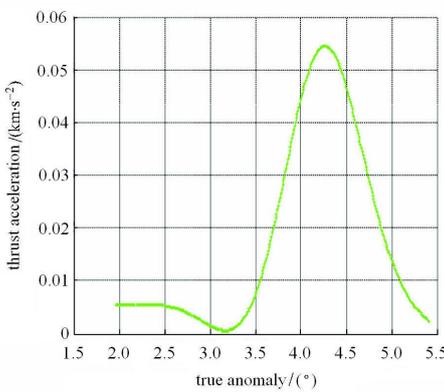


图 4 三维空间机动轨道 (VCGF 和 SB)

Fig. 4 Transfer orbits using VCGF and SB method



(a)



(b)

图 5 采用 VCGF(a) 和形状方法 (b) 所需推力

Fig. 5 Thrust profile using VCGF (a) and SB methods (b)

5 结论

本文针对连续推力航天器机动轨道设计问题, 提出了虚拟中心引力场的轨道设计新方法. 并将其应用到转移轨道设计中, 得到以下结论:

(1) 虚拟中心引力场方法将航天器转移轨道设计问题转化为 2 个参数寻优问题. 大大减少了轨道设计参数, 简化了求解转移轨道设计过程;

(2) VCGF 方法能够适用于一般情况, 扩大了航天器机动范围. 在同样条件下, 相比形状方法, 虚拟中心引力场方法在实现轨道转移时所需推力以及所需能量较小.

参 考 文 献

- 李俊峰, 蒋方华, 连续小推力航天器的深空探测轨道优化方法综述, 力学与实践, 2011, 33(3): 1-6 (Li Junfeng, Jiang Fanghua. Survey of low-thrust trajectory optimization methods for deep space exploration. *Mechanics and Engineering*, 2011, 33(3): 1-6 (in Chinese))
- 汤国建, 张洪波. 小推力轨道机动动力学与控制, 北京: 科学出版社, 2013 (Tang Guojian, Zhang Hongbo. *Dynamics and Control of Low-thrust Orbital Maneuver*. Beijing: Science Press, 2013 (in Chinese))
- Tisen H. Take-off from satellite orbit. *Journal of the American Rocket Society*, 1953, 23(4): 233-236
- Boltz FW. Orbit motion under continuous radial thrust. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1991, 14(3): 667-670;
- Petropoulos AE, Longuski JM. Automated design of low-thrust gravity-assist trajectories. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2004, 41(5): 787-796
- Bradley W. Shape-based approximation method for low-thrust trajectory optimization. AIAA 2008-6616, 2008. 1-9
- Wall BJ, Conway BA. Shape-based approach to low-thrust rendezvous trajectory design. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, 32 (1): 95-101
- Hudson J, Scheeres D. Fourier coefficient selection for low-thrust control shaping. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, 36 (6): 1783-1786
- 潘峰, 李位星. 粒子群优化算法与多目标优化. 北京: 北京理工大学出版社, 2013(Pan Feng, Li Weixing. *Particle Swarm Optimization Algorithm and Multiply Variables Optimization*. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2013 (in Chinese))

(责任编辑: 陆启韶)

(责任编辑: 周冬冬)

SPACECRAFT'S TRANSFER ORBIT DESIGN BASED ON THE VIRTUAL CENTRAL GRAVITY FIELD METHOD¹⁾

Yuan Jianping^{*,†} Sun Chong^{*,†,2)} Fang Qun^{*,†}

^{*}(*College of Astronautics, Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710072, China*)

[†](*National Key Laboratory of Aerospace Flight Dynamics, Xi'an 710072, China*)

Abstract The space maneuver technology is the basis of space mission operation. In this paper, a novel method named virtual central gravitational field method for continuous thrust maneuver trajectory design for the spacecraft is proposed, which can decrease the number of trajectories' parameters. Because there is no assumption in this approach, it can be used in general case. This approach applies in orbit transfer in both 2-D and 3-D spaces, and the results show that in the same condition, the required thrust acceleration and energy cost are smaller than that of shape-based methods.

Key words trajectory maneuver, transfer orbit, continuous thrust, central gravitational field

Received 8 May 2014, accepted 1 August 2014, available online 12 December 2014.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11272255).

2) Sun Chong, PhD candidate, research interests: spacecraft dynamics and control. E-mail: sunc2011100269@126.com