#### 研究论文

# 基于微-细观机理的混凝土疲劳损伤本构模型"

### 丁兆东 李 杰2)

(同济大学,土木工程学院,上海 200092)

**摘要** 该文致力于混凝土疲劳损伤发展机理的微细观解释. 以速率过程理论为基础, 通过考虑裂纹断裂过程 区中的水分子动力作用, 在细观尺度上建立了具有物理机理的疲劳损伤能量耗散表达式. 结合细观随机断裂模 型, 以宏观损伤力学为框架, 建立了疲劳损伤演化方程. 通过数值模拟, 计算了单轴受拉时的疲劳损伤演化以 及不同加载幅度下的疲劳寿命. 与相关试验结果的对比显示出该文模型能够很好地表现混凝土材料的疲劳损伤 演化过程.

关键词 混凝土,疲劳,损伤演化,本构关系,速率过程理论

中图分类号: O346.2 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-14-041

## 引 言

混凝土疲劳问题的研究虽然已有一百多年历 史,但今天用于设计的主要方法仍然是基于试验的 经验方法,即:通过试验获得 *S-N* 疲劳寿命曲线并 结合 Miner 疲劳损伤累积准则进行设计.这种方法既 不能反映混凝土结构疲劳损伤之后的内部应力重分 布,也难以反映疲劳问题中显著的离散性.因此需要 建立基于物理机理分析的混凝土疲劳本构模型,从 而使得分析结构整个寿命周期内的疲劳损伤演化和 疲劳可靠度成为可能.

回顾关于混凝土疲劳机理的研究历史,可以发现3个层次的递进脉络:试验的研究、基于断裂力学的疲劳研究以及基于损伤力学的研究.在试验研究中,比较有代表性的是 Holmen 的研究<sup>[1]</sup>.他的研究不仅给出了混凝土在受压疲劳载荷作用下的疲劳寿命、不可逆应变发展等工程中比较关心的问题的答案,而且由于试验样本量大还能给出在不同概率水平下对应的疲劳寿命的结果.后继的研究者们对于混凝土受压疲劳相关问题也做了大量的试验研究<sup>[2-6]</sup>,但大体上未超过 Holmen 工作的范畴.由于 混凝土材料受拉和受压时的力学性能显著不同,研究者们也在受拉及弯曲疲劳方面进行了大量的试验研究<sup>[7-9]</sup>.但从认识论的角度考察这些研究,可见仍 然只是对经验现象的总结,因此适用性有限.对于具体的问题,往往需要重新通过大量的试验获得比较可靠的经验结果.

从物理的角度考察,疲劳损伤的发展实际上对 应着微裂纹和微缺陷的发展.由于准脆性材料的裂纹 尖端有着显著的非线性特征,因此非线性断裂力学 成为研究准脆性材料疲劳问题的一个主要工具. 在 各类非线性断裂力学模型中, 黏聚裂缝模型 (cohesive crack model) 获得了长足的发展和较为普遍的认 同. 这一模型是 Hillerborg 等<sup>[10]</sup> 首先提出的,而将 其应用于混凝土疲劳裂缝扩展问题上的则是 Hordijk 等<sup>[11]</sup>. Hordijk 工作的主要成果是根据黏聚裂缝模型 建立了疲劳裂纹的  $\sigma-w$  曲线 (即应力-裂纹累积张开 位移),并将其与有限元模拟结合起来.基于黏聚裂 缝模型,后继的研究者纷纷从数值模拟的角度研究 混凝土中单个疲劳裂纹的扩展问题,其重点在于引 入不同的退化模型以更好地模拟试验结果[12-13]. 令 人遗憾的是,这些研究中采用的退化模型大多是经 验性的、且难以模拟大量裂缝存在的情况. 而混凝土 的疲劳破坏,恰恰是大量细、微裂纹不断发展、综合 作用的结果.

为了反映大量疲劳裂纹引起的材料性能退化, 损伤力学给出了一条可能解决问题的途径.在损伤 力学中,把由于不同尺度下裂纹扩展引起的材料性

<sup>2014--02--18</sup> 收到第 1 稿, 2014--04--06 收到修改稿.

<sup>1)</sup> 国家自然科学基金重大研究计划资助项目 (91315301).

<sup>2)</sup> 李杰, 教授, 主要研究方向: 随机动力学、混凝土损伤力学、生命线工程. E-mail: lijie@tongji.edu.cn

能退化通过损伤变量引入到材料的本构关系当中, 这也使得损伤变量的演化成为损伤力学的核心问题. 在唯象的损伤力学模型中,通常类比于塑性力学中 的塑性势函数建立损伤势函数,再通过正交流动法 则获得损伤演化. 由于猜测损伤演化方向应该使某 种自由能减少最快,所以引入 Kuhn-Tucker 条件作为 约束. 这样损伤演化必须发生于某种规范函数 (gauge function) 定义的损伤边界上. 而对于疲劳问题而言, 材料的状态往往处于损伤边界以内,所以上述唯象 的损伤演化法则无法反映疲劳损伤过程. 为了考虑 疲劳损伤, Marigo<sup>[14]</sup> 最早提出取消 Kuhn-Tucker 条 件中损伤边界面的限制,代之以材料状态距损伤边 界的距离来衡量疲劳损伤的快慢. 后来的研究大 体上都是按照这样的模式来处理疲劳损伤的演化问 题.不同研究者的区别主要在两点:一是规范函数的 形式,二是具体的投影空间(应变空间或应力空间). 如 Papa 等<sup>[15]</sup> 采用了一个稍微复杂的规范函数, 并日在分解成球量和偏量的应变空间中处理问题: Alliche<sup>[16]</sup>则将规范函数表述为受拉损伤能释放率 的第二不变量的函数并在应变空间来处理问题. Mai 等[17] 为了获得非线性的疲劳寿命曲线,引入了更为 复杂的损伤演化表达式,但其本质仍是经验的.

唯象的损伤力学模型,不论是损伤面还是边界 面[18-20],本质都是通过类比塑性力学中屈服面的概 念引入的,并没有物理上的意义.而且归根结底,唯 象学的损伤力学模型并没有回答损伤力学的核心问 题: 损伤内变量如何演化? 无论经过如何繁复的推 导,唯象的损伤力学模型最终都不得不面临这样的 困境:只能通过试验数据经验地给出损伤的演化法 则.因此连续损伤疲劳本构模型在本质上仍然是经 验性的结果.

基于上述认识,本文目标在于给疲劳损伤的演 化建立一个具有细观物理机理的模型. 从微观尺 度出发,着重考察微裂纹尖端断裂时局部能量的变 化,结合速率过程理论 (rate process theory)<sup>[21-23]</sup> 给出 疲劳载荷作用下混凝土材料中的能量耗散关系.基 于这种物理机制,利用能量等效的原则将微观断裂 的物理图景通过损伤概念表示,结合抽象细观随机 断裂模型,建立了混凝土的疲劳损伤演化方程.

### 1 纳米级颗粒间断裂的混凝土疲劳损伤

## 1.1 混凝土材料纳观裂纹尖端扩展的能量分析

在纳米尺度,水泥砂浆主要由水化硅酸钙颗粒

(C-S-H solid) 组成<sup>[24-25]</sup>. 在裂纹尖端的纳米颗粒分 布是杂乱的,裂纹的扩展对应着纳米颗粒之间的分 离(在纳米尺度,水泥砂浆主要由水化硅酸钙颗粒C-S-H). 在裂纹的尖端部分, 由于分子热运动的影响, 纳米微颗粒之间的联系可能会由于距离的扩大而被 切断.反过来,这种相互之间联系已切断的微颗粒 也有可能由于分子热运动而重新建立联系. 若将这 种联系用微弹簧比拟,上述情景可表示为弹簧的断 裂与愈合.在没有外部作用施加于材料的情况下,这 种断裂与愈合的可能性是相同的,因此大量微颗粒 的总体表现处于稳定的状态. 而当有外部载荷作用 于材料时,这种稳定状态就会被打破.从能量的角 度考察,由于颗粒之间的引力作用,两个颗粒之间 想要分离就必须越过某个能量势垒 (activated energy barrier) $Q_0$ . 发生断裂的过程相当材料的势能  $\Pi$  越过 能量势全 Oo. 在越过这个能量势垒之后总势能有一 个微小的下降  $\Delta Q$ , 如图 1 所示. 这个  $\Delta Q$  就是外部 作用的影响.

微颗粒间联系断裂后势能的变化  $\Delta Q$  可以通过 力学分析获得, 而整个体系能够越过断裂过程中的 能量势垒 Oo则依赖于微颗粒的分子热运动,否则材 料中的微裂缝想要扩展就必须提供非常大的外部作 用.因此,材料内部微裂纹的扩展不仅取决于外部作 用引起的势能差 $\Delta Q$ ,而且更依赖于微颗粒的分子热 运动跨过局部的能量势垒 Qo. 换句话说, 在裂纹的 尖端分子热运动造成的波动既会使得微颗粒间联系 发生断裂和也可以使已断裂的联系重新愈合,而外 部作用引起的势能差改变了断裂和愈合所需要跨越 的能量势垒,使得断裂的频率大于愈合的频率,从而 决定了净断裂过程的速度.下面通过断裂力学分析获 得这个过程的定量关系:

为了简便起见,考察三维情况下理想的圆盘状 裂纹. 根据线弹性断裂力学, 在纳米层级的裂缝尖



图 1 微颗粒间联系断裂时越过的能量势垒 Fig. 1 The energy barrier of nano-bond's breakage

913

端,应力强度因子可表示为:  $K_a = \sigma_a \sqrt{l_a} k_a(\alpha)$ ,其 中  $\sigma_a$  为施加于纳米颗粒层次的应力,它与宏观应 力  $\sigma$  通过纳米-宏观应力集中因子 c 联系在一起:  $\sigma_a = c\sigma$ ;  $l_a$  为纳米颗粒的特征尺寸;  $\alpha = a/l_a$  为裂纹 相对尺寸, a 为裂纹半径;  $k_a(\alpha)$  为无量纲的应力强度 因子,对于圆盘状裂纹,  $k_a(\alpha) = 2\sqrt{\alpha/\pi}$ .因此,单位 宽度裂纹扩展时的能量释放率为

$$G(\alpha) = \frac{K_a^2}{E_a} = \frac{k_a^2(\alpha)l_ac^2\sigma^2}{E_a}$$
(1)

其中 *E*<sub>a</sub> 为纳米尺度的弹性模量 (比材料的宏观弹性 模量大).

令 $\eta$ 为几何常数使得 $\eta a$ 为裂纹尖端的宽度,则 当裂纹扩展一个纳米微颗粒间间距 $\delta_a$ 时,释放的能 量为

$$\Delta Q_f = \delta_a(\eta \alpha l_a) G(\alpha) = V_a(\alpha) \frac{c^2 \sigma^2}{E_a}$$
(2)

其中  $V_a(\alpha) = \delta_a \eta \alpha l_a^2 k_a^2(\alpha)$  为激活体积.

根据 Griffith 的断裂理论<sup>[26]</sup>,当裂纹尖端的微颗粒间联系破裂时,除了断裂能的释放外,还对应着新表面产生所引起的表面能增加.记裂纹扩展一个纳米微颗粒间间距  $\delta_a$ 时增加的表面能为  $\gamma_0$ ,则在 微裂纹扩展  $\delta_a$  的过程中释放的净能量为

$$\Delta Q_{\rm net} = \Delta Q_f - \gamma_0 \tag{3}$$

根据经典的速率过程理论<sup>[22-23]</sup>,2个亚稳态之间的迁移速率取决于2个亚稳态之间的能量差异、能量壁垒以及外力作用等,可表示为

$$f = v \left( e^{[-Q_0 + (\Delta Q_f - \gamma_0)/2]/(kT)} - e^{[-Q_0 - (\Delta Q_f - \gamma_0)/2]/(kT)} \right) = 2v e^{-Q_0/(kT)} \sinh\left(\frac{\Delta Q_f - \gamma_0}{kT}\right)$$
(4)

其中, v 为特征频率, v = kT/h; k, T 和 h 分别是 Boltzmann 常数、绝对温度和 Plank 常数.

令  $\Delta Q/(kT) = V_a(\alpha)/V_T$ ,  $V_T = 2E_akT/(c^2\sigma^2)$ . 对 于激活体积  $V_a$ ,由于纳米微颗粒的距离一般在 10<sup>-10</sup> 尺度,根据前文中  $V_a$  的表达式可知其约为 10<sup>-26</sup>m<sup>3</sup>.  $V_T$  是  $E_a$  和  $\sigma_a = c\sigma$  的函数. 一般地,应力集中系 数 c > 10,纳米尺度的弹性模量  $E_a$  约大于宏观的 弹性模量 E 一个数量级.对于水泥凝胶体的纳米结 构而言,若宏观应力在数十兆帕的水平,则  $V_T$  约为 1×10<sup>-25</sup>m<sup>3</sup>. 因此  $V_a/V_T < 0.1$ . 注意到当 x 较小时有 sinh(x)  $\approx x$ ,则式 (4) 可以简化为

$$f = 2\nu e^{-Q_0/(kT)} \frac{\Delta Q_f - \gamma_0}{kT}$$
(5)

式中, f 反映的是裂纹尖端分子键的净破裂频率 (即 2 个亚稳态之间的迁移速率),而纳米层级的裂纹扩 展速率则可以表示为裂纹尖端粒子的漂移,即

$$\dot{a} = \delta_a f \tag{6}$$

式 (6) 即为静力加载条件下混凝土材料的微裂纹尖端扩展速率基本表达式.

对于疲劳加载,实际情况与静力加载又有所不同.这种不同表现在宏观上,就是疲劳问题中材料的损伤发展比相应的静态载荷作用下要快.典型的例子是:材料在从 *P*<sub>max</sub> 到 *P*<sub>min</sub> 变化的动态载荷作用下,其疲劳损伤发展要比在以 *P*<sub>max</sub> 为恒载作用下引起的徐变损伤发展快<sup>[27]</sup>.

对于这个问题,通常唯象的解释是疲劳加载下 裂纹尖端的某些指标量具有累积性,从而造成疲劳 损伤的持续发展 (loading-unloading irreversibility).如 在黏聚裂纹模型中,裂纹尖端累积张开位移 (the accumulation of crack opening displacement)就是这样一 个指标量.但是这些模型都难以解释这种指标量是 如何具体地起作用的.在这里尝试引入裂纹断裂过 程区中的分子动力作用,给出上述问题的物理解释.

一些相关研究表明:由于周边环境影响引起的 裂纹尖端物理化学反应会使裂纹扩展速率发生变 化<sup>[28-32]</sup>.但将其引入疲劳问题解释疲劳作用与静态 作用的区别则尚未见诸于文献.本文认为:正是由于 环境介质的参与,才导致疲劳载荷作用下微裂纹尖 端的扩展速率相对静力加载情况要快.事实上,在混 凝土中存在着大量水分,因而在缺陷处也存在着大 量的自由水分子.在裂纹尖端处水分子的存在,使得 在疲劳加载情况下裂纹尖端的局部自由能处于一个 不稳定的振荡状态,进而影响到裂纹的开展.换句话 说,水分子进入裂纹尖端黏聚区,改变了正在发生断 裂的那部分混凝土的表面能,从而也影响到微裂纹 尖端纳米微颗粒间的愈合(图 2 和图 3).

在图 3 中,横坐标表示尖端张开位移,纵坐标表 示尖端部分的表面能.当张开位移为水分子直径的整 数倍时,水分子可以形成规律的排列,使得微裂纹尖 端局部材料整体能量处于能量谷处;当张开位移不 是水分子直径的整数倍时,水分子间无法形成规律 的排列,使得局部能量处于能量峰处<sup>[29]</sup>.在能量峰 处,材料之间的连接更容易发生断裂,从而使得局部 材料总能量降低.而在能量谷处时,局部材料处于比 较稳定的状态,所以不容易发生断裂.



图 2 水分子在裂纹尖端与材料结合示意图

Fig. 2 The schematic diagram of water molecules arrangement at the crack tip



图 3 水分子在裂纹尖端的分布对局部能量分布的影响<sup>[30-31]</sup> Fig. 3 The local energy fluctuation due to the water molecules arrangement at the crack tip<sup>[30-31]</sup>

在静力作用情况下,裂纹尖端断裂过程区尾部 将相对稳定地处于能量谷 (若加载时其张开位移不 是水分子的整数倍而处于能量峰处,这部分纳米微 颗粒的连接会很快断裂). 它的断裂就会耗时长, 所 以断裂过程相对变慢.而在疲劳载荷作用下,裂纹尖 端断裂过程区纳米颗粒之间的连接会一直经历能量 谷-能量峰-能量谷 … 这样的循环往复过程, 而不 会长时间停留在能量谷处. 在这样的循环过程中, 当 处于能量峰处时相对容易发生断裂,因此在疲劳载 荷作用下, 微裂纹黏聚区尾部总是会经历能量峰, 从而更容易发生断裂. 这就是静力蠕变损伤和动态 循环疲劳损伤过程不同的物理细观机理. 值得指出 的是,分子热运动的频率约为1×10<sup>14</sup>s<sup>-1</sup>,所以在疲 劳载荷作用下裂纹尖端的运动相对于分子来说可以 看作准静态过程,因而水分子有充分的时间自由排 歽.

考虑这种效应,式(3)中的表面能γ<sub>0</sub>实际上受 裂纹断裂过程区尾部张开-闭合过程的影响.疲劳过 程引起的微裂纹张开-闭合过程越快,单位时间内断 裂过程区经历的能量峰就越多,其断裂速率就越快. 根据文献 [28,31]的研究, 脆性材料在分离时其表面 力的振荡过程峰值可以用一个指数衰减函数拟合, 相应的能量积分也是相应的振荡形式.考虑局部应 变率的影响, 它从总体上对应着各个微裂纹的张开 闭合过程.因此, 表面能在疲劳循环载荷作用下的变 化也采用一个指数衰减函数形式表征, 即

$$\gamma^*(\dot{\varepsilon}) = \gamma_0 \mathrm{e}^{-\beta|\dot{\varepsilon}|} \tag{7}$$

式中β为一常系数.

这样,在疲劳过程中微裂纹尖端扩展 $\delta_a$ 时相应的净能量的释放可表示为

$$\Delta Q_{\text{net}} = \Delta Q_f - \gamma^*(\dot{\varepsilon}) = \Delta Q_f - \gamma_0 e^{-\beta|\dot{\varepsilon}|}$$
(8)

相应地, 微裂纹扩展速率可以表示为

$$\dot{a} = \delta_a f = 2\delta_a v \mathrm{e}^{-Q_0/(kT)} \frac{\Delta Q_f - \gamma_0 \mathrm{e}^{-\beta|\dot{e}|}}{kT} \tag{9}$$

虽然混凝土中每个微裂纹局部的张开位移都各 不相同,但从宏观上看其总体趋势是与宏观应变成 正比,因此相应的能量的变化必然与宏观应变率有 关系.为此,可以定义如下的能量等效应变,并以它 的应变率作为微裂纹张开位移变化速率的度量

$$\varepsilon_{\rm eq} = \sqrt{\frac{2Y}{E_0}} \tag{10}$$

式中, Y 为损伤能释放率, E<sub>0</sub> 为混凝土的初始弹性模量.

#### 1.2 疲劳损伤发展过程中的能量耗散

在其发展过程中,纳米尺度微裂纹不是演化成 更高尺度的裂纹就是处于更高层级裂纹引起的应力 卸载区内.而在同一层级,则大量存在且其尺度在同 一量纲尺度范围内.因此,可以用统计平均量来表征 低层的纳米尺度微裂纹,而不用考虑其个体的差异. 假定微裂纹平均的初始尺寸和最终尺寸分别为 *a*<sub>0</sub> 和 *a*<sub>c</sub>,则在其寿命期间释放的断裂能平均值为

$$\Delta \tilde{Q}_f = \frac{\int_{a_0}^{a_c} \Delta Q_f \mathrm{d}a}{a_c - a_0} = \tilde{V}_\mathrm{a} \frac{c^2 \sigma^2}{E_\mathrm{a}} \tag{11}$$

式中,符号"~"表示相关物理量的平均值,  $\tilde{v}_a$ 表示纳 米层级微裂纹在其寿命期内的平均激活体积.

由于已经将纳米尺度微裂纹扩展过程中释放的断裂能在时间上平均化了,所以从损伤力学的角度 看,当纳米层次的裂纹向前扩展 δ<sub>a</sub> 时 (对于混凝土 来说就是 2 个纳米微颗粒间的间距),宏观损伤微小 的增加 δ<sub>d</sub> 就是一个固定值. 这意味着虽然在连续损伤力学中损伤变量是连续的, 但考虑到物理背景, 实际的损伤存在这样一个最小的损伤步. 在这个过程中损伤能的释放为

$$\Delta Q_d = V \int_{d_0}^{d_0 + \delta_d} Y \mathrm{d}d \tag{12}$$

式中, ΔQ<sub>d</sub> 表示损伤能的变化, d<sub>0</sub> 表示初始损伤, V 表示损伤影响的体积, 可视为经典损伤力学中被称 为代表体积元的特征体积.

由于纳米微颗粒间破裂过程所经历的时间很 短,因此可以认为在此期间损伤能释放率不变.而 且,由于损伤和断裂都是描述同一个能量耗散过 程,造成裂纹持续发展的能量差从损伤的角度可以 表示为

$$\Delta \tilde{Q}_f = \tilde{V}_{\rm a} \frac{c^2 \sigma^2}{E_{\rm a}} = \Delta Q_d \approx Y \delta_d V \tag{13}$$

因此,可以将式(9)中的纳米裂纹扩展速率的平均值通过损伤能释放率表示

$$\dot{a} = \delta_a \tilde{f} = 2\delta_a v e^{-Q_0/(kT)} \frac{\Delta Q_f - \gamma^*(\dot{\varepsilon}_{eq})}{kT} = 2\frac{\delta_a \delta_d V}{h} (Y - \gamma(\dot{\varepsilon}_{eq})) e^{-Q_0/(kT)}$$
(14)

式中 $\gamma(\dot{\epsilon}_{eq}) = \gamma^*(\dot{\epsilon}_{eq})/(V\delta_d)$ 为均匀化表面能. 相应的,平均能量释放率可表示为

$$G = \frac{\Delta \tilde{Q}_f}{\delta_a \eta a_{\rm m}} = \frac{Y \delta_d V}{\delta_a \eta a_{\rm m}}$$
(15)

式中 am 表示纳米微裂纹的平均尺寸.

单个纳米微裂纹扩展引起的能量耗散为

$$G\dot{a} = \frac{2\delta_d^2 V^2}{h\eta a_{\rm m}} Y(Y - \gamma(\dot{\varepsilon}_{\rm eq})) {\rm e}^{-Q_0/(kT)}$$
(16)

纳米级微裂纹的扩展如何发展为宏观裂纹的扩展,是一个很复杂的问题,它涉及到多尺度问题的物理本质. Bazant 等<sup>[23]</sup>给出一个较为简单的模型来考虑这一问题:裂纹的层级模型.这一模型认为:一个宏观裂纹的尖端断裂过程区内包含着大量低一级尺度的次级裂纹,而在这个次级裂纹的尖端存在着类似的断裂过程区与更次级的裂纹,以此类推直至纳米尺度(如图4所示).



Fig. 4 Hierarchical cracks system

在图 4 的裂纹分布模型中, 宏观裂缝的断裂过 程区中含有 n<sub>1</sub> 个次级裂纹, 而每个次级裂纹下的断 裂过程区又 n<sub>2</sub> 个次次级裂纹, 以此类推直至纳米尺 度的微裂纹. 设其中有 p 个层次, 则微裂纹总数可表 示为

$$N = n_1 n_2 \cdots n_p \tag{17}$$

在每个尺度上,裂纹的数量应该与这个尺度上 相应的裂纹驱动力有关.显然,这个驱动力就是损伤 能释放率 Y.另一方面,材料的固有表面能起着阻碍 裂纹生成和扩展的作用.不妨假定各个尺度被激活 的裂纹数量与损伤能释放率成正比、与表面能成反 比,即

$$n_i = f\left(\frac{k_i Y}{\gamma(\dot{\varepsilon}_{\rm eq})}\right) \tag{18}$$

其中, f 为单调增函数, ki 为各个层级的常系数.

进一步根据前述层级模型及损伤的分形特征 <sup>[33]</sup>,可认为各层级裂纹具有统计自相似的特征,即

$$n_i = f\left(\frac{k_i Y}{\gamma(\dot{\varepsilon}_{eq})}\right) = \left(\frac{k_i Y}{\gamma(\dot{\varepsilon}_{eq})}\right)^{q_i}$$
(19)

式中 q<sub>i</sub> 为第 i 个尺度的分形指数.

于是, 微裂纹总数可以表示为

$$N = n_1 n_2 \cdots n_p = \left(\prod_{i=1}^p k_i\right) \left(\frac{Y}{\gamma(\dot{\varepsilon}_{eq})}\right)^{q_1 + q_2 + \cdots + q_p}$$
(20)

而总的能量耗散为

$$\dot{E}_{f} = 2N \frac{\delta_{d}^{2} V^{2}}{h \eta a_{m}} Y(Y - \gamma(\dot{\varepsilon}_{eq})) e^{-Q_{0}/(kT)} = C_{0} Y(Y - \gamma(\dot{\varepsilon}_{eq})) \left(\frac{Y}{\gamma(\dot{\varepsilon}_{eq})}\right)^{m} e^{-Q_{0}/(kT)}$$
(21)

式中,  $C_0 = \frac{2\delta_d^2 V^2\left(\prod_{i=1}^{l} k_i\right)}{h\eta a_m}$ ,  $m = q_1 + q_2 + \dots + q_p$ , 均为 材料常数. 显然这样的能量耗散表达式实际上综合了多尺度的特征.而每一层级的能量耗散是在相应层级上的各裂纹尖端发生的.

式 (20) 是在所考虑体积内宏观裂纹密度一定的 情况下得到的结果. 但实际情况是在一定体积内的 裂纹数量会随着损伤的发展发生变化, 这是因为存 在应力屏蔽效应 (屏蔽区裂纹上的应力卸载) 以及裂 纹群的发展会导致裂纹间的贯通 (减少裂纹尖端效 应, 也可视为另一种意义上的应力屏蔽效应). 若不 考虑这些效应, 会导致损伤发展过快的问题.

为了定量地考虑上述效应,设想:高密度的微裂 纹应力屏蔽效应会引起活动微裂纹的减少,微裂纹 的数量越多、因应力屏蔽而失活的微裂纹也就越多. 这种设想类似于塑性材料中高密度位错的闭锁效应 <sup>[34]</sup>.

以损伤变量表征当前阶段的裂纹总量,则因损 伤增加而引起的活动微裂纹减少可以用下式表示

$$\frac{\partial N}{\partial d} = -\kappa N \tag{22}$$

上式的解为

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\kappa d} \tag{23}$$

式中, N<sub>0</sub> 表示当前总的微裂纹数量, 可根据式 (20) 获得; N 表示活动微裂纹的数量, d 是当前损伤水平, 而 κ 为材料常数.

考虑上式的修正,可得最终的疲劳过程能量耗 散表达式为

$$\dot{E}_f = C_0 \mathrm{e}^{-Q_0/(kT)} \mathrm{e}^{-\kappa d} Y(Y - \gamma(\dot{\varepsilon}_{\mathrm{eq}}) \left(\frac{Y}{\gamma(\dot{\varepsilon}_{\mathrm{eq}})}\right)^m \qquad (24)$$

#### 2 混凝土疲劳损伤的细观随机断裂模型

在唯象的损伤力学理论中,损伤演化律必然是 是通过试验拟合的经验函数.针对这一问题,在过去 十余年中,本研究小组从损伤细观物理研究入手,逐 步发展了一类细观随机断裂模型<sup>[35-38]</sup>.本文试图将 上节分析结果与这类模型相结合,以期建立完整的 疲劳损伤演化模型.为此,首先简单介绍这类模型.

以单轴受拉为例,首先将一维受力试件简化成 一组串并联弹簧系统,如图 5 所示(图中 σ 为应力, ε 为应变, Δ<sub>i</sub> 为断裂应变).其中每个弹簧代表一个 次级的微观损伤单元,可以用一并联微弹簧系统表 示,这个次级系统中的微弹簧具有线弹性-断裂特 性,且断裂应变是随机的.



图 5 细观物理模型 Fig. 5 Meso-physical model

对于基本的损伤单元令微弹簧总数 N 趋于无 穷,可将损伤变量表示为如下的随机积分形式

$$d = \int_0^1 H(\varepsilon - \Delta(x)) \,\mathrm{d}x \tag{25}$$

其中, Δ(x) 为一维断裂应变随机场, x 为微弹簧所在随机场的空间坐标, H(x) 表示 Heaviside 函数. 微弹簧的断裂应变或其等效断裂能的分布可取对数正态分布形式, 即断裂应变场 Δ(x) 为对数正态随机场.

在上述细观随机断裂模型中,微弹簧的断裂阈 值对应于代表体积元中有一条或几条主要裂纹发生 动态失稳而瞬间贯穿那部分材料. 而对于疲劳问 题,外界载荷提供的能量不足以引发主要裂纹的瞬 间动态失稳,而只是引起主要裂纹尖端断裂过程区 中的纳米层级微裂纹发生扩展,从而使得主要的裂 纹处于亚稳态.换句话说,前文所获得的能量耗散 表达式实际上是一个代表性体积元内的不同尺度微 裂纹扩展而导致的能量耗散.因此,将前文获得的疲 劳过程能量耗散表达式引入上述细观随机断裂模型 中,损伤表达式(25)应改写成如下形式

$$d = \int_{0}^{1} H\left(E_{f} - E_{s}\right) dx$$

$$E_{f} = \int_{0}^{t} C_{0} e^{-Q_{0}/(kT)} e^{-\kappa d} Y(Y - \gamma(\dot{\varepsilon}_{eq}) \left(\frac{Y}{\gamma(\dot{\varepsilon}_{eq})}\right)^{m} dt$$

$$E_{s} = \frac{1}{2} E_{0} \Delta^{2}(x)$$
(26)

式中, Heaviside 函数说明在疲劳载荷作用下, 当不同 层级微裂纹的累积能量耗散超过了代表性体积元所 保有的固有能量 *E*<sub>s</sub> 时, 将导致疲劳损伤的发展.

#### 3 模型的初步验证

考虑单轴受拉状态、在等幅疲劳载荷作用下的 情况.受拉损伤能释放率(弹性自由能部分)为

$$Y^{+} = \frac{(\bar{\sigma}^{+})^{2}}{2E_{0}} = \frac{1}{2E_{0}} \left(\frac{\sigma}{1-d^{+}}\right)^{2}$$
(27)

式中,"+"表示受拉作用, σ表示有效应力.

在常温条件下,根据文献 [22] 的试验结果混凝 土中 e<sup>-Q₀/(kT)</sup> ≈ 3.75 × 10<sup>-18</sup>.疲劳模型中各参数通过 识别获得的取值如下表所示 (其中均匀化表面能的 数量级参考文献 [39])

#### 表1 疲劳损伤模型参数

Table 1 Parameters in fatigue damage model

$C_0/(J^{-1} \cdot m \cdot s^{-1})$	$\gamma/(J \cdot m^{-3})$	β	т	к
$1.2 \times 10^{-3}$	0.155	0.006	10.5	25

为了便于与有关文献中内容比较,本文选取 C30 混凝土,初始弹性模量 *E* = 34.7 GPa.

模型中微弹簧断裂应变随机场为对数正态随机 场,设其均值和方差为(λ, ζ<sup>2</sup>),而断裂应变场的空间 相关性可下式表示

$$\rho_Z(|x_2 - x_1|) = e^{-\xi |x_2 - x_1|}$$
(28)

式中 & 为材料的相关长度.

通过静力试验可以识别得到随机场各参数,表 2 给出了文献 [40] 的试验识别结果.

#### 表 2 单轴受拉模型参数

Table 2 Parameters under uniaxial tension

Concrete	Tensile	Parameter of	Parameter of	Parameter of
type	strength/MPa	mean $\lambda$	variance $\zeta$	correlation $\xi$
C30	2.21	4.7536	0.6560	0.0270

图 6 为利用本文模型获得的 C30 混凝土在整个 寿命周期内疲劳损伤演化的发展过程.

从图 6 可以看出:疲劳损伤具有明显的 3 个阶段,即初始阶段的较快发展、中间阶段相对稳定平缓的发展以及最后阶段的迅速发展直至破坏.



Fig. 6 Fatigue damage evolution under uniaxial tension

对于混凝土疲劳寿命的预测,关系到实际工程的寿命预测的准确性. 图 7 给出了按照本文模型计算出的不同应力幅作用下的混凝土疲劳寿命 (图中 $R = \sigma_{\min}/f_t$ ). 作为对比,图中同时依据 Cornelissen<sup>[7]</sup>的试验结果,给出了试验结果的均值.可见:本模型的结果能较好地与试验回归的均值结果吻合. 这说明模型在主要方面把握了混凝土的疲劳机理,能够反映其主要的疲劳特性.





## 4 结 论

本文从纳米层级的裂纹扩展出发,给出了混凝 土微观断裂过程的物理解释.将纳米层级的裂纹扩 展表示成以损伤能释放率为驱动力的形式,在损伤 力学框架下建立了混凝土的疲劳损伤演化公式.通 过引入断裂过程区中的水分子动力作用,解释了静 态作用与疲劳作用下损伤演化速率不同的原因,从 而可以在统一的框架下考虑疲劳和徐变问题.相应 地,也可以获得在不同疲劳加载幅度下的混凝土疲 劳寿命.

实际上,混凝土的疲劳损伤发展也表现出极大的随机性,这表现在各种试验结果极大的离散性

#### 参考文献

- 1 Holmen J. Fatigue of concrete by constant and variable amplitude loading. *ACI Special Publication*, 1982, 75: 71-110
- 2 Hsu T. Fatigue of plain concrete. ACI Journal, 1981, 78 (4): 292-305
- 3 Kim J, Kim Y. Experimental study of the fatigue behavior of high strength concrete. *Cement and Concrete Research*, 1996, 26 (10): 1513-1523
- 4 Gao L, Hsu CTT. Fatigue of concrete under uniaxial compression cyclic loading. *ACI Materials Journal*, 1998, 95 (5): 575-581
- 5 Breitenbücher R, Ibuk H. Experimentally based investigations on the degradation-process of concrete under cyclic load. *Materials and Structures*, 2006, 39 (7): 717-724
- 6 Breitenbücher R, Ibuk H, Alawieh H. Influence of cyclic loading on the degradation of mechanical concrete properties. *Advances in Construction Materials* 2007, 2007: 317-324
- 7 Cornelissen H. Fatigue failure of concrete in tension. *Heron*, 1984, 29 (4): 1-68
- 8 Bazant ZP, Xu K. Size effect in fatigue fracture of concrete. ACI Materials Journal, 1991, 88 (4): 390-399
- 9 Oh B. Fatigue life distributions of concrete for various stress levels. ACI Materials Journal, 1991, 88 (2): 122-128
- 10 Hillerborg A, Modeer M, Petersson PE. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 1976, 6 (6): 773-781
- Hordijk D. Local approach to fatigue of concrete. [PhD Thesis]. Delft: Delft University of Technology, 1991
- 12 Nguyen O, Repetto E, Ortiz M, et al. A cohesive model of fatigue crack growth. *International Journal of Fracture*, 2001, 110 (4): 351-369
- 13 Yang B, Mall S, Ravi-Chandar K. A cohesive zone model for fatigue crack growth in quasibrittle materials. *International Journal* of Solids and Structures, 2001, 38 (22-23): 3927-3944
- 14 Marigo J. Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids. *Engineering Fracture Mechanics*, 1985, 21 (4): 861-874
- 15 Papa E, Taliercio A. Anisotropic damage model for the multiaxial static and fatigue behaviour of plain concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 1996, 55 (2): 163-179
- 16 Alliche A. Damage model for fatigue loading of concrete. International Journal of Fatigue, 2004, 26 (9): 915-921
- 17 Mai SH, Le-Corre F, Foret G, et al. A continuum damage modeling of quasi-static fatigue strength of plain concrete. *International Journal of Fatigue*, 2012, 37: 79-85
- 18 Suaris W, Ouyang C, Fernando V. Damage model for cyclic loading of concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 1990, 116 (5): 1020-1035
- 19 Al-Gadhib A, Baluch M, Shaalan A, et al. Damage model for monotonic and fatigue response of high strength concrete. *International Journal of Damage Mechanics*, 2000, 9 (1): 57

- 20 Lü P, Li Q, Song Y. Damage constitutive of concrete under uniaxial alternate tension-compression fatigue loading based on double bounding surfaces. *International journal of solids and structures*, 2004, 41 (11-12): 3151-3166
- 21 Tobolsky A, Eyring H. Mechanical properties of polymeric materials. *The Journal of Chemical Physics*, 1943, 11: 125-134
- 22 Krausz AS, Krausz K. Fracture Kinetics of Crack Growth. Dordrecht: Springer, 1988
- 23 Le JL, Bažant ZP, Bazant MZ. Unified nano-mechanics based probabilistic theory of quasibrittle and brittle structures: I. Strength, static crack growth, lifetime and scaling. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2011, 59 (7): 1291-1321
- 24 Mondal P. Nanomechanical properties of cementitious materials. [PhD Thesis]. Evanston: Northwestern University, 2008
- 25 Ulm FJ, Constantinides G, Heukamp FH. Is concrete a poromechanics materials?—A multiscale investigation of poroelastic properties. *Materials and Structures*, 2004, 37 (1): 43-58
- 26 Griffith AA. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 1921, 221: 163-198
- 27 Suresh S. Fatigue of Materials. Cambridge: Cambridge University Press, 1998
- 28 Horn RG, Israelachvili JN. Direct measurement of structural forces between two surfaces in a nonpolar liquid. *The Journal of Chemical Physics*, 1981, 75 (3): 1400-1411
- 29 Horn RG. Surface forces and their action in ceramic materials. Journal of the American Ceramic Society, 1990, 73 (5): 1117-1135
- 30 Lawn B. Fracture of Brittle Solids. Cambridge: Cambridge University Press, 1993
- 31 Maali A, Cohen-Bouhacina T, Couturier G, et al. Oscillatory dissipation of a simple confined liquid. *Physical Review Letters*, 2006, 96 (8): 086105
- 32 Christov NC, Danov KD, Zeng Y, et al. Oscillatory structural forces due to nonionic surfactant micelles: Data by colloidal-probe AFM vs theory. *Langmuir*, 2009, 26 (2): 915-923
- 33 谢和平. 分形 岩石力学导论. 北京: 科学出版社, 1996 (Xie Heping. Introduction to Fractals-rock Mechanics. Beijing: Science Press, 1996 (in Chinese))
- 34 Johnston WG, Gilman JJ. Dislocation velocities, dislocation densities, and plastic flow in lithium fluoride crystals. *Journal of Applied Physics*, 1959, 30 (2): 129-144
- 35 李杰. 混凝土随机损伤本构关系研究新进展. 东南大学学报(自然科学版), 2002, 32 (5): 750-755 (Li Jie. Recent research progress on the stochastic damage constitutional law of concrete. *Journal of Southeast University* (Natural Science Edition), 2002, 32 (5): 750-755 (in Chinese))
- 36 李杰. 混凝土随机损伤力学的初步研究. 同济大学学报 (自然科学版), 2004, 32 (10): 1270-1277 (Li Jie. Research on the stochastic damage mechanics for concrete materials and structures. *Journal of Tongji University* (Natural Science Edition), 2004, 32 (10): 1270-1277 (in Chinese))
- 37 李杰, 卢朝辉, 张其云. 混凝土随机损伤本构关系 —— 单轴受 压分析. 同济大学学报 (自然科学版), 2003, 31 (5): 505-509 (Li

学 报

Jie, Lu Zhaohui, Zhang Qiyun. Study on stochastic damage constitutive law for concrete material subjected to uniaxial compressive stress. *Journal of Tongji University* (Natural Science Edition), 2003, 31 (5): 505-509 (in Chinese))

38 李杰,张其云. 混凝土随机损伤本构关系. 同济大学学报 (自然 科学版), 2001, 29 (10): 1135-1141 (Li Jie, Zhang Qiyun. Study of stochastic damage constitutive relationship for concrete material. *Journal of Tongji University* (Natural Science Edition), 2001, 29 (10): 1135-1141 (in Chinese))

- 39 Mehta PK, Monteiro PJ. Concrete: Microstructure, Properties, and Materials. New York: McGraw-Hill, 2006
- 40 曾莎洁. 混凝土随机损伤本构模型与试验研究. [博士论文]. 上海: 同济大学, 2012 (Zeng Shajie. Dynamic experimental research and stochastic damage constitutive model for concrete. [PhD Thesis]. Shanghai: Tongji University, 2012 (in Chinese))

(责任编委:冯西桥) (责任编辑:周冬冬)

## THE FATIGUE CONSTITUTIVE MODEL OF CONCRETE BASED ON MICRO-MESO MECHANICS<sup>1)</sup>

Ding Zhaodong Li Jie<sup>2)</sup>

(College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract** In this paper we focus on the explanation of concrete fatigue damage on micro-meso-scales. Base on the rate process theory, the physical meaningful expression of fatigue damage energy dissipation is built on meso-scale with considering the dynamic effect of water molecules in the fracture process zone. Combing with meso-stochastic fracture model, the fatigue damage evolution equation is acquired under the framework of macro-damage mechanics. The fatigue damage evolution curve and fatigue life under various loading levels in uniaxial tension are computed with numerical simulation and the comparisons with test results show that the model proposed here gives a correct description of fatigue damage evolution process of concrete.

Key words concrete, fatigue, damage evolution, constitutive relation, rate process theory

Received 18 February 2014, revised 6 April 2014.

<sup>1)</sup> The project was supported by the Major Research Plan of the National Natural Science Foundation of China (91315301).

<sup>2)</sup> Li Jie, professor, research interests: stochastic dynamics, concrete damage mechanics, lifeline engineering. E-mail: lijie@tongji.edu.cn