第 46 卷 第 5 期 力 学 学 报 Vol. 46, No. 5
2014 年 9 月 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics Sep., 2014

研究论文

航天器最优受控绕飞轨迹推力幅值延拓设计方法[1)]

朱小龙 *,† 刘迎春 * 高 扬 *,2)

*(中国科学院空间应用工程与技术中心, 北京 100094) †(中国科学院大学, 北京 100049)

摘要 针对航天器燃料最优可变周期绕飞轨迹的求解问题, 提出了一种以推力幅值为延拓参数的延拓方法. 问题求解从最为简单的双脉冲绕飞轨迹出发, 首先利用有限推力替代脉冲推力, 设定推力序列为 “开 — 关 — 开”, 然后逐步减小推力幅值, 最终得到最小推力绕飞轨迹; 此后, 再逐步增加推力幅值, 结合主矢量曲线判断最优推力开关序列, 将最小推力解延拓至有限推力以及脉冲推力燃料最优解. 该方法通过对推力幅值的延拓, 实现了有限推力 bang-bang 控制与脉冲推力燃料最优绕飞轨迹优化问题的一并求解, 同时避免了最优控制问题中协态变量的随机猜测. 慢速与快速绕飞算例的优化结果验证了所提出方法的有效性.

关键词 绕飞轨迹, 延拓方法, 轨迹优化, 燃料最优, 有限推力, 脉冲推力

中图分类号: V412.4 **文献标识码**: A doi: 10.6052/0459-1879-14-030

引 言

航天器的绕飞运动是指一个航天器 (本文称为伴星) 围绕另一航天器或其他目标 (本文称为主星) 的周期性相对运动, 它在航天器在轨服务、编队飞行以及空间对抗等任务中具有重要作用. 考虑主星运行在围绕中心天体 (如地球、太阳) 的理想圆轨道上, 通过 Hill–Clohessy–Wiltshire 方程 (HCW 方程) 所描述的相对运动模型 [1] 可知: 存在伴星围绕主星的自然绕飞轨迹, 其周期等于主星的轨道周期 T_0, 绕飞轨迹在轨道面内投影呈现 2:1 的椭圆构型, 在轨道面外则呈现周期为 T_0 的简谐振动. 如果对伴星施加主动的推力控制, 可以改变绕飞轨迹的周期, 形成满足特定任务所需的可变周期绕飞轨迹, 若绕飞周期小于主星轨道周期则称为 “快速绕飞”, 反之则称为 “慢速绕飞”. 目前, 国内外学者针对可变周期绕飞轨迹研究了圆形 [2-4]、“水滴” 形 [4] 和 “田径场” 形 [4] 等多种构型的绕飞轨迹设计问题, 本文将进一步研究不限定构型的燃料最优绕飞轨迹的设计方法.

在给定初始与末端状态、绕飞周期以及推力幅值条件下, 如何确定一条燃料最优绕飞轨迹可以通过最优控制理论求解. 根据庞特里亚金极小值原理得出的最优性一阶必要条件可知 [5-6]: 最优推力方向由主矢量 (速度分量对应的协态变量) 确定; 最优推力幅值曲线一般为 bang-bang 控制的形式, 其开关切换时刻由主矢量的模值来确定. 然而, 由于协态变量初值对约束条件较为敏感, 其本身也没有特定的物理意义, 因此并不容易直接给出合理的初值猜测. 另外, 在求解之初, 最优的推力开关序列往往是未知的, bang-bang 控制与协态变量初值难以建立关联, 这使得燃料最优绕飞轨迹更加难以求解.

针对最优轨迹 bang-bang 控制问题, 国内外学者发展了一系列求解方法, 其中延拓方法是得到较多关注与应用的一种方法, 在轨迹优化问题求解中已取得了良好的效果. 延拓方法的基本思想是从一个相对简单的问题出发, 通过对某些系统参数的连续延拓最终求解出原本较难解决的问题. Bertrand 等 [7] 首先引入同伦延拓方法 (一般称为同伦方法, 包含对同伦参数的延拓), 较为平滑地得到了 bang-bang 控制最优解; 此后, Haberkorn 等 [8]、Mitani 等 [9] 应用同伦方法分别求解了无推力方向约束和含推力方向约束的连续推力最优转移轨迹; Thevenet 等 [10]、Li 等 [11] 应用同伦方法分别求解了编队调度和轨迹重构的燃料优化问题; Martinon 等 [12]、Jiang 等 [13-14] 和 Guo 等 [15] 进一步改进了同伦方法, 改善了延拓过程的鲁

2014–01–22 收到第 1 稿, 2014–04–05 收到修改稿.
1) 国家自然科学基金资助项目 (11372311).
2) 高扬, 研究员, 主要研究方向: 航天飞行动力学与控制. E-mail: gaoyang@csu.ac.cn

棒性和计算效率.

本文提出了一种以推力幅值为延拓参数的延拓方法, 然后基于该方法求解了燃料最优可变周期绕飞轨迹. 该方法解决了协态变量初值不易给出的难点, 可以自动识别出有限推力开关序列从而得到有限推力燃料最优解, 同时还可以得到脉冲推力燃料最优解, 从而将脉冲推力和有限推力轨迹优化问题的求解统一起来. 本文余下章节安排如下: 第 1 节描述了相对运动方程和可变周期绕飞轨迹最优控制问题; 第 2 节建立了将双脉冲解逐步延拓至有限推力以及脉冲推力燃料最优解的推力幅值延拓方法; 第 3 节利用第 2 节提出的延拓方法求解了 “慢速绕飞”(周期大于 T_0) 和 “快速绕飞”(周期小于 T_0) 的算例; 第 4 节总结了研究结论.

1 相对运动方程与最优绕飞轨迹问题描述

1.1 相对运动方程与自然绕飞轨迹

本文研究一颗伴星围绕一颗主星绕飞的情况. 主星轨道为开普勒 (近) 圆轨道, 不对主星施加额外控制, 伴星的轨道控制采用脉冲或有限推力的形式. 本文暂不考虑燃料消耗过程中伴星质量的变化. 假设伴星和主星之间的距离较小, 其相对运动模型可用 HCW 方程描述 [1]. 用于建立 HCW 相对运动模型的坐标系 (后称 HCW 坐标系) 定义如下: 坐标系原点位于主星, x 轴由地心指向主星, y 轴在主星轨道面上与 x 轴垂直, 沿运动方向为正, z 轴垂直于轨道平面, 与 x, y 轴构成右手系.

采用 HCW 方程所描述的相对运动模型可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{r}} \\ \dot{\boldsymbol{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{r} + \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{v} + F\boldsymbol{u} \end{bmatrix}, \quad \|\boldsymbol{u}\| = 1 \tag{1}$$

式中, $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 分别为伴星相对主星的位置与速度矢量; F 为伴星推力加速度幅值并有上限 $F_{\max}$ (设伴星取单位质量, 推力加速度后文中直接称为推力); $\boldsymbol{u}$ 为推力方向的单位矢量; 矩阵 $\boldsymbol{E}_1$ 与 $\boldsymbol{E}_2$ 表示如下

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{bmatrix} 3n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2n & 0 \\ -2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

式中, n 为主星圆轨道的轨道角速度.

令 $F = 0$, 此时无主动的推力控制, 求解式 (1) 可得到

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}(t) \\ \boldsymbol{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}(t_0) \\ \boldsymbol{v}(t_0) \end{bmatrix} \tag{4}$$

式中, t_0 表示初始时刻, t 表示任意时刻. 记 $M = n(t-t_0)$, $s_M = \sin M, c_M = \cos M$, 则式 (4) 中矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4-3c_M & 0 & 0 \\ 6(s_M - M) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_M \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{s_M}{n} & \dfrac{2(1-c_M)}{n} & 0 \\ \dfrac{2(c_M-1)}{n} & \dfrac{(4s_M - 3M)}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{s_M}{n} \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3ns_M & 0 & 0 \\ 6n(c_M - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ns_M \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} c_M & 2s_M & 0 \\ -2s_M & 4c_M - 3 & 0 \\ 0 & 0 & c_M \end{bmatrix} \tag{8}$$

如果令初始与某一末端时刻 $t_{\rm f}$ 的状态相等, 即

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}(t_{\rm f}) \\ \boldsymbol{v}(t_{\rm f}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}(t_0) \\ \boldsymbol{v}(t_0) \end{bmatrix} = 0 \tag{9}$$

求解式 (4) 可以得到周期为 $(t_{\rm f} - t_0)$ 的绕飞轨迹. 若 $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}(t)$ 在 HCW 坐标系中的分量表示为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix}^{\rm T} \\ \boldsymbol{v}(t) &= \begin{bmatrix} v_x(t) & v_y(t) & v_z(t) \end{bmatrix}^{\rm T} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

周期性绕飞轨迹的实现需满足如下初始条件 [16]

$$v_y(t_0) = -2nx(t_0) \tag{11}$$

此时不需要对伴星施加任何控制即可形成周期为 T_0 (T_0 为主星的轨道周期) 的自然绕飞轨迹. 如果绕飞周期不等于 T_0, 则需要对伴星施加推力控制才能实现绕飞. 本文着重研究非自然绕飞周期的绕飞轨迹燃料最优控制问题.

1.2 受控绕飞轨迹燃料最优控制问题

基于式 (1) 所描述的相对运动方程, 给定初始状态 $\boldsymbol{r}(t_0), \boldsymbol{v}(t_0)$ 及周期 $T\ (T = (t_f - t_0), T \neq T_0)$ 的受控绕飞轨迹燃料最优控制问题可以描述如下: 寻找最优推力方向和大小, 在保证约束方程 (9) 的条件下, 使得如下总速度脉冲最小化

$$J = \Delta v = \int_0^T F(t)\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

式中, 性能指标为积分型 [17], 系统哈密顿函数为

$$H = F + \boldsymbol{\lambda}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\lambda}_v^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{r} + \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{v} + F\boldsymbol{u}) \tag{13}$$

协态变量方程可推导为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r^{\mathrm{T}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\lambda}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v^{\mathrm{T}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{\lambda}_r^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\lambda}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

求解式 (14) 可以得到

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_r(t) \\ \boldsymbol{\lambda}_v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{H} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_r(t_0) \\ \boldsymbol{\lambda}_v(t_0) \end{bmatrix} \tag{15}$$

式中的矩阵 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{I}$ 可表示为

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 4 - 3c_M & -6(s_M - M) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_M \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} -3ns_M & 6n(c_M - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ns_M \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} -\dfrac{s_M}{n} & -\dfrac{2(1 - c_M)}{n} & 0 \\ \dfrac{2(1 - c_M)}{n} & \dfrac{3M - 4s_M}{n} & 0 \\ 0 & 0 & -s_M \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} c_M & 2s_M & 0 \\ -2s_M & 4c_M - 3 & 0 \\ 0 & 0 & c_M \end{bmatrix} \tag{19}$$

该最优控制问题的横截条件为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_r(t_f) \\ \boldsymbol{\lambda}_v(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{\gamma}_r \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{v}}\boldsymbol{\gamma}_v \end{bmatrix}_{t_f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_r \\ \boldsymbol{\gamma}_v \end{bmatrix} \tag{20}$$

式中, $\boldsymbol{\psi}$ 如式 (9) 所示, 变量 $\boldsymbol{\gamma}_r, \boldsymbol{\gamma}_v$ 为相应的乘子, 可取任意值, 因此协态变量在末端时刻无约束.

式 (13) 中共有 2 个控制变量: 推力方向 $\boldsymbol{u}$ 和推力幅值 F. 在满足约束条件 $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ 的情况下使哈密顿函数 H 极小化可得 $\boldsymbol{u}$ 的最优取值形式

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\frac{\boldsymbol{\lambda}_v(t)}{\|\boldsymbol{\lambda}_v(t)\|} \tag{21}$$

由式 (21) 可知, 最优的推力方向与 $-\boldsymbol{\lambda}_v$ 的方向相同, Lawden [6] 将 $\boldsymbol{\lambda}_v$ 称为主矢量此处定义 $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{\lambda}_v(t)$, 其模值表示为 $p(t)$. 将式 (21) 及主矢量代入式 (13), 系统哈密顿函数变为

$$H = (1 - p)F + \boldsymbol{\lambda}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{r} + \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{v}) \tag{22}$$

为使式 (22) 中的 H 达到极小值, 最优推力幅值应取 bang-bang 控制形式 (暂不考虑 $p = 1$ 的奇异情况)

$$F^* = \begin{cases} F_{\max}, & p > 1 \\ 0, & p < 1 \end{cases} \tag{23}$$

式中, $F_{\max}$ 为推力幅值的上限值.

至此, 受控绕飞轨迹最优控制问题已经转换为微分方程 ((1), (14), (21) 和 (23)) 的边值问题 (边值约束 (9)), 微分方程边值问题的解即为满足最优性一阶必要条件的解. 然而, 该问题并不容易直接求解, 主要原因是协态变量没有特定的物理意义, 不易给出合理的初始估计值, 而且式 (23) 中的开关函数必要条件使得协态变量初值更加难以猜测. 本文将针对以上问题提出推力幅值延拓方法, 从而较为平滑地得到有限推力以及脉冲推力情况下满足最优性一阶必要条件的解 (认为是最优解).

2 推力幅值延拓方法

本文提出的延拓方法以推力幅值为延拓参数, 其延拓流程如图 1 所示, 主要分为 3 步: 第 1 步是从双脉冲解延拓至能实现绕飞轨迹的最小推力解 (记该解的推力幅值为 $F_{\min}$); 第 2 步是从最小推力解延拓至有限推力 bang-bang 控制最优解; 第 3 步, 当推力幅值足够大时, 利用有限推力燃料最优解直接优化出脉冲推力燃料最优解. 需要指出的是, 在第 2 步的推力幅值延拓过程中, 最优推力开关序列有可能发生变化.

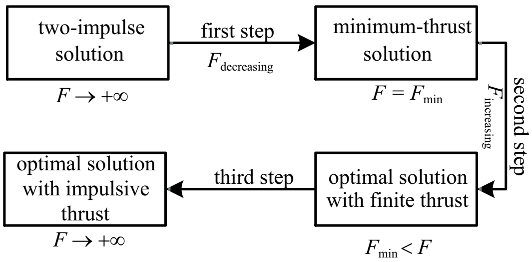


图 1 推力幅值延拓流程示意图

Fig. 1 Flowchart of continuation on thrust amplitude

2.1 双脉冲解延拓至最小推力解

2.1.1 双脉冲解

双脉冲解是指在初始时刻 t_0 和末端时刻 t_f 分别施加一次脉冲所形成的绕飞轨迹. 结合式 (4) 和式 (9) 可求出两次速度脉冲

$$\left.\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{B}_T^{-1}(\boldsymbol{r}(t_f) - \boldsymbol{A}_T\boldsymbol{r}(t_0)) - \boldsymbol{v}(t_0)\\ \Delta\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{v}(t_f) - \boldsymbol{C}_T\boldsymbol{r}(t_0) - \boldsymbol{D}_T\boldsymbol{B}_T^{-1}(\boldsymbol{r}(t_f) - \boldsymbol{A}_T\boldsymbol{r}(t_0))\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

式中, $\boldsymbol{A}_T$, $\boldsymbol{B}_T$, $\boldsymbol{C}_T$, $\boldsymbol{D}_T$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ 在 $T = (t_f - t_0)$ 时刻的值. 需要指出的是, 当绕飞周期 T 为自然绕飞周期 T_0 的半整数倍 ($T = 0.5T_0, 1.5T_0...$) 时, $\boldsymbol{B}_T$ 具有如下形式

$$\boldsymbol{B}_T = \begin{bmatrix} 0 & 4/n & 0\\ -4/n & -3M/n & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{25}$$

此时, $\boldsymbol{B}_T$ 不满秩, 因此 $\boldsymbol{B}_T^{-1}$ 不存在, 按照式 (24) 求解双脉冲解会出现奇异. 对于 $\Delta\boldsymbol{v}_1$, 式 (24) 中第 1 个方程可改写为 $\boldsymbol{B}_T(\Delta\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}(t_0)) = \boldsymbol{r}(t_f) - \boldsymbol{A}_T\boldsymbol{r}(t_0)$, 若等式右边项 z 分量取值为零, $\Delta\boldsymbol{v}_1$ 的 z 方向分量有无穷多解, 若等式右边项 z 分量取值不为零, $\Delta\boldsymbol{v}_1$ 的 z 方向分量将趋向于无穷大.

根据式 (21) 中的最优推力方向取值形式, 在双脉冲解中, 将速度脉冲方向 (推力方向) 设定为主矢量方向, 可以得到初始时刻速度矢量对应的协态变量

$$\boldsymbol{\lambda}_v(t_0) = -\frac{\Delta\boldsymbol{v}_1}{\|\Delta\boldsymbol{v}_1\|} \tag{26}$$

与末端时刻速度矢量对应的协态变量

$$\boldsymbol{\lambda}_v(t_f) = -\frac{\Delta\boldsymbol{v}_2}{\|\Delta\boldsymbol{v}_2\|} \tag{27}$$

将式 (26) 和式 (27) 代回式 (15), 即可得到初始时刻位置矢量对应的协态变量

$$\boldsymbol{\lambda}_r(t_0) = \boldsymbol{H}_T^{-1}[\boldsymbol{\lambda}_v(t_f) - \boldsymbol{I}_T\boldsymbol{\lambda}_v(t_0)] \tag{28}$$

与末端时刻位置矢量对应的协态变量

$$\boldsymbol{\lambda}_r(t_f) = \boldsymbol{F}_T\boldsymbol{H}_T^{-1}\boldsymbol{\lambda}_v(t_f) + \left(\boldsymbol{G}_T - \boldsymbol{F}_T\boldsymbol{H}_T^{-1}\boldsymbol{I}_T\right)\boldsymbol{\lambda}_v(t_0) \tag{29}$$

将式 (26) 与式 (28) 代回式 (15), 即可得到双脉冲解的任意时刻协态变量. 双脉冲解的协态变量可以解析给出, 而且其最优性可以通过检验主矢量曲线是否满足文献 [6] 中的脉冲推力燃料最优解一阶必要条件得到. 双脉冲解的主要作用是赋予协态变量一组解析的初值, 避免了随机猜测.

2.1.2 最小推力解

为实现从双脉冲解至最小推力解的延拓, 首先分析以下子问题: 如图 2 所示, 利用有限推力替代脉冲推力, 与双脉冲解的两次脉冲相对应, 设定推力开关序列为 “开 — 关 — 开”, 始末两段推进时间分别为 Δt_1 和 Δt_2, 确定最优推力大小与方向, 使得式 (12) 中的总速度脉冲最小化.

该子问题中, 最优控制问题的推导过程与 1.2 节相同, 可依次得到式 (13)~ 式 (22). 给定推力幅值, 由于推力序列被强制为 “开 — 关 — 开”, 为使哈密顿函数达到极小值, 必要条件式 (23) 蜕变为

$$\left.\begin{aligned}&p^*(t) > 1, &&\text{if thrust is On}\\ &p^*(t)\ \text{is arbitrary}, &&\text{if thrust is Off}\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

事实上, 由式 (21) 可知, 最优推力方向只与主矢量的方向有关, 与主矢量模值无关. 协态变量按比例增大或减小 (见式 (35) 和式 (36) 与图 3 的描述) 不影响式 (21), 也不影响协态变量方程式 (15). 对于任意 “开 — 关 — 开” 推力序列的满足约束条件式 (9) 的可行解, 通过对主矢量的处理总能满足必要条件式 (30)(如图 3 所示), 必要条件式 (30) 对得到最优解并无实际贡献. 这里, 采用直接/间接混合法 [18] 的

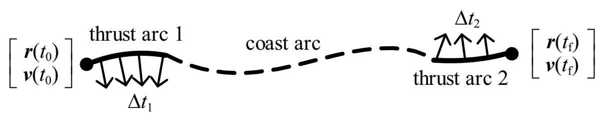
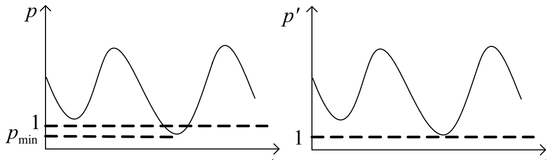


图 2 “开 – 关 – 开” 推力序列转移轨迹示意图

Fig. 2 Schematic diagram of a transfer trajectory with an On-Off-On thrusting sequence



(a) Before processing (b) After processing

(a) 处理前 (b) 处理后

图 3 最小推力解主矢量示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the primer vector of the minimum-thrust solution

思想, 即利用协态变量方程与式 (21), 通过对性能指标直接优化从而不再寻求对部分必要条件与充分条件的满足, 在数值优化意义上获得 “开 — 关 — 开” 推力序列的燃料最优解.

上述子问题的求解可以转化为如表 1 所示的非线性规划问题 (记为 NLP1) 的求解, 其中约束条件中等式左边的 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\lambda}_r, \boldsymbol{\lambda}_v$ 由初始时刻的状态和协态变量经推进段 1 和自由滑行段正向计算得到; 等式右边的 $\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{\lambda}_r', \boldsymbol{\lambda}_v'$ 由末端时刻的状态和协态变量经推进段 2 逆向计算得到. 这是一个标准的包含等式与不等式约束的非线性规划问题, 本研究采用 MATLAB 软件中的 fmincon 函数进行求解, 性能指标及约束条件对于优化参数的梯度均由数值微分计算得到, 无需推导解析式. 后文所列出的非线性规划问题采用同样方法求解.

表 1 子问题非线性规划模型 (NLP1)

Table 1 Nonlinear programming model of the proposed subproblem (NLP1)

optimization parameters	$\boldsymbol{\lambda}_r(t_0), \boldsymbol{\lambda}_v(t_0), \boldsymbol{\lambda}_r(t_f), \boldsymbol{\lambda}_v(t_f), \Delta t_1, \Delta t_2$
performance index	$\min\left(\int_0^T F(t)\,\mathrm{d}t\right)$
constraint conditions	$\begin{cases} \boldsymbol{r}(t_f-\Delta t_2)=\boldsymbol{r}'(t_f-\Delta t_2) \\ \boldsymbol{v}(t_f-\Delta t_2)=\boldsymbol{v}'(t_f-\Delta t_2) \\ \boldsymbol{\lambda}_r(t_f-\Delta t_2)=\boldsymbol{\lambda}'_r(t_f-\Delta t_2) \\ \boldsymbol{\lambda}_v(t_f-\Delta t_2)=\boldsymbol{\lambda}'_v(t_f-\Delta t_2) \\ (\Delta t_1+\Delta t_2)\leqslant T \end{cases}$
equation for costate variables	Eq. (15)
equation for state variables	$\begin{cases} \text{thrustarc : Eq. (1)} \\ \text{coastarc : Eq. (4)} \end{cases}$

如果将双脉冲解看作是推力幅值为无穷大、推进时间为无穷小的一个解, 由于该解满足上述子问题的最优性必要条件 (式 (21) 和式 (30) 未考虑), 因此可以认为双脉冲解是上述子问题在推力幅值为无穷大、推进时间为无穷小时的最优解. 不难理解, 当推力幅值逐步减小时, NLP1 收敛解中的总推进时间 $(\Delta t_1+\Delta t_2)$ 会逐步增加直至等于绕飞周期 T. 每次求解 NLP1 均得到数值优化意义上的最小化总速度脉冲, 那么如果总推进时间 $(\Delta t_1+\Delta t_2)$ 等于绕飞周期 T 时, 此时对应的推力幅值 $F_{\min}$ 即定义为形成绕飞轨迹的 “最小推力”. 如果推力幅值比 “最小推力” 还要小, NLP1 无解. 本研究中, 通过延拓推力幅值 (逐步减小) 将双脉冲解最终过渡至最小推力解.

针对 NLP1, 首先求解一个具有较大推力幅值 F_0 的解, 并将双脉冲解作为初始估计值. 第一个求解的推力幅值可取为

$$F_0=\frac{\|\Delta\boldsymbol{v}_1\|+\|\Delta\boldsymbol{v}_2\|}{aT} \tag{31}$$

式中, a 为给定的小参数 $(a>0)$, 当 a 足够小时, 有限推力近似为脉冲. 初始与末端时刻的协态变量初值由速度脉冲计算得到 (式 (26)~ 式 (29)), Δt_1 的估计值为 $\|\Delta\boldsymbol{v}_1\|/F_0$ (Δt_2 估计值同法得到). 若 a 足够小, NLP1 可快速收敛.

此后, 逐步减小推力幅值, 建立同样的 NLP1 进行求解. 在这个延拓过程中, 每一步的解均为下一步优化的初值, 推力幅值的取值方式如下: 如果第 i 步求解得到收敛解 (推力幅值记为 F_i), 第 $i+1$ 步的推力幅值取为

$$F_{i+1}=0.5F_i \tag{32}$$

基于式 (32) 中的推力幅值, 若 NLP1 收敛, 则第 $i+1$ 步得到收敛解 (推力幅值记为 F_{i+1}); 若 NLP1 不收敛, F_{i+1} 重新设置为

$$F_{i+1}=0.5(F_i+F_{i+1}) \tag{33}$$

直至得到收敛解.

随着推力幅值的减小, 指标函数 $J=(\Delta t_1+\Delta t_2)$ 逐步变大, 设置小参数 b $(b>0)$, 当满足以下条件时停止求解 NLP1(即停止减小推力幅值)

$$T-(\Delta t_1+\Delta t_2)\leqslant bT \tag{34}$$

此时, 将 “开 — 关 — 开” 推力序列替换为推力全程开启的形式, 并建立如表 2 所示的非线性规划问题 (记为 NLP2), 其中约束条件中的 $\boldsymbol{r}(t_f), \boldsymbol{v}(t_f)$ 由 $\boldsymbol{r}(t_0)$, $\boldsymbol{v}(t_0)$ 经正向积分得到.

表 2 最小推力解非线性规划模型 (NLP2)

Table 2 Nonlinear programming model of the minimum-thrust solution (NLP2)

optimization parameters	$\lambda_r(t_0), \lambda_v(t_0), F$
performance index	$\min(F)$
constraint conditions	$\boldsymbol{r}(t_f) = \boldsymbol{r}(t_0), \boldsymbol{v}(t_f) = \boldsymbol{v}(t_0)$
equation for costate variables	Eq. (15)
equation for state variables	Eq. (1)

利用已经得到的 NLP1 问题的解作为初值 (b 取值足够小), 即可通过直接寻优得到最小推力解. 需要指出的是, 获得 “最小推力” 采用了逐步减小推力幅值的技术手段, 即多次求解 NLP1, 这有利于避免 “最小推力” 陷入局部最优.

得到最小推力 $F_{\min}$ 后, 记最小推力解的协态变量为 $\boldsymbol{\lambda}(t)$, 主矢量曲线为 $p(t)$, 最小值为 $p_{\min}$, 如图 3(a) 所示, 对 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 做如下处理

$$\boldsymbol{\lambda}'(t) = \frac{\boldsymbol{\lambda}(t)}{p_{\min}} \tag{35}$$

由式 (21) 可知: 处理后的协态变量并不影响最小推力解. 相应地, 主矢量曲线按比例变为

$$p'(t) = \frac{p(t)}{p_{\min}} \tag{36}$$

图 3(b) 为处理后的主矢量曲线 $p'(t)$ 的示意图. 此时, 任意时刻的主矢量模值均不小于 1, 并且其最小值 (可能不止一个) 等于 1. 根据式 (21) 与式 (23) 可知, $p'(t)$ 亦满足 $F = F_{\min}$(推力全程开启) 条件下的燃料最优解必要条件, 因此最小推力解也成为 $F = F_{\min}$ 时的燃料最优解, 并将为后续求解有限推力燃料最优解提供初始估计值.

2.2 最小推力解延拓至有限推力/脉冲推力燃料最优解

2.2.1 主矢量曲线变化趋势与最优推力开关序列分析

由式 (21) 式与 (23) 可知, 主矢量决定着最优推力方向和推力开关序列. 本节首先分析燃料最优解主矢量曲线随推力幅值的变化关系.

根据式 (23) 可知 (如图 4 所示):

(1) 对于脉冲推力燃料最优解 (impulsive-thrust solution), 任意时刻的主矢量模值均不大于 1, 仅在脉冲作用时刻为 1;

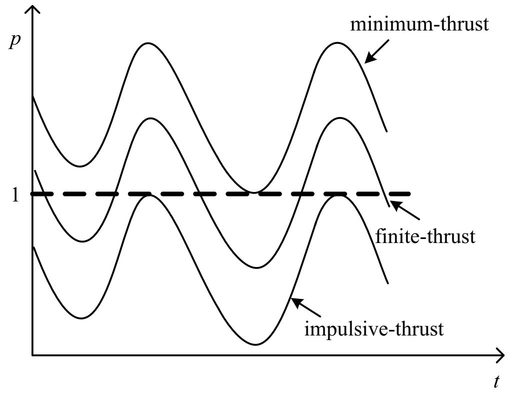


图 4 主矢量曲线变化示意图

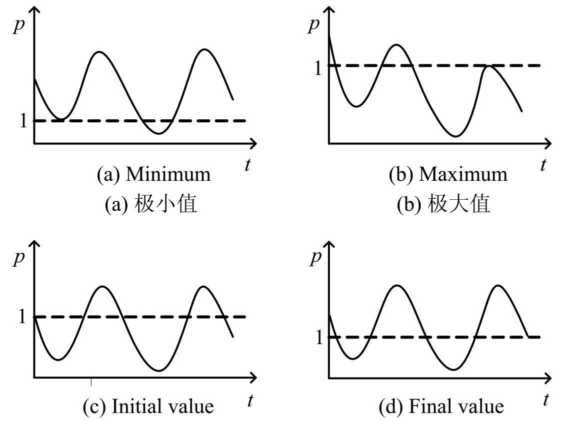
Fig. 4 Schematic diagram of the change of the primer vector

(2) 对于最小推力解 (minimum-thrust solution), 任意时刻的主矢量模值均不小于 1, 仅在某一个或多个离散点处为 1;

(3) 其他有限推力水平下的最优解 (finite-thrust solution) 主矢量则介于 (1) 和 (2) 之间, 推力开关切换时刻为主矢量模值取值为 1 的时刻.

基于上述认识, 随着推力幅值的增大, 燃料最优解主矢量曲线将呈现整体下移的趋势, 并且当初始值、末端值、极大值或极小值越过 1 时, 最优推力开关序列发生改变. 因此, 如果将推力幅值从 $F_{\min}$ 逐步延拓至无穷大, 则可以遍历所有可行推力幅值 ($F \geqslant F_{\min}$) 的最优开关序列. 将主矢量的初始值、末端值、极大值和极小值称为决定最优推力开关序列的 “特征值”(characteristic value). “特征值” 或大于 1 或小于 1, 若有 “特征值” 恰好等于 1, 则称该解为临界推力解, 对应的推力幅值称为临界推力幅值, 如图 5 所示. 最小推力解和脉冲推力燃料最优解也是临界推力解. 需要指出的是, 虽然燃料最优解主矢量曲线的整体趋势是随推力幅值的增大而下移, 但是其特征值可能会在局部有相反的变化趋势, 并且由于主矢量曲线的形状本身也是一个渐变的过程, 可能会出现极大或极小值个数发生变化的情况, 3.3 节的平面快速绕飞算例对此情况给出了相应的描述.

在推力幅值延拓过程中, 在得到下一个临界推力解之前, 最优推力开关序列保持不变, 而一旦遇到临界推力解 (至少一个特征值变为 1), 最优推力开关序列将被重新设置. 结合图 5 可以得到, 新设置的最优推力开关序列较原推力开关序列的变化如表 3 所示. 其中, “$1^+ \to 1^-$” 表示特征值由大于 1 变为小于



(a) Minimum (b) Maximum
(a) 极小值 (b) 极大值
(c) Initial value (d) Final value
(c) 初始值 (d) 末端值

图 5 临界推力幅值主矢量示意图

Fig. 5 Schematic diagram of the primer vector of the critical thrust amplitude

表 3 最优推力开关序列重新设置

Table 3 Reset of optimal thrusting switching sequence

Characteristic value	change of characteristic value	change of switching sequence
minimum	$1^+ \to 1^-$	add Off—On
	$1^- \to 1^+$	remove Off—On
maximum	$1^+ \to 1^-$	remove On—Off
	$1^- \to 1^+$	add On—Off
initial value	$1^+ \to 1^-$	add initial coast
	$1^- \to 1^+$	remove initial coast
terminal value	$1^+ \to 1^-$	add terminal coast
	$1^- \to 1^+$	remove terminal coast

1, “$1^- \to 1^+$” 表示特征值由小于 1 变为大于 1, 增加或合并开关以及增加或去除始末自由滑行段的时刻均在特征值等于 1 的时刻附近.

2.2.2 有限推力燃料最优解

为求解每一步的有限推力燃料最优解, 建立如表 4 所示的非线性规划问题 (记为 NLP3). 其中, t_i 表示推力开关切换时刻 (推力开关序列已给定), 该时刻主矢量模值为 1, p_u 为上一步最优解中主矢量不小于 1 的特征值, p_l 为上一步最优解中主矢量不大于 1 的特征值. 约束条件中 $\boldsymbol{r}(t_f), \boldsymbol{v}(t_f)$ 由 $\boldsymbol{r}(t_0), \boldsymbol{v}(t_0)$ 正向积分得到 (按照设定的开关序列), 优化变量初值由上一步最优解给出. NLP3 的解 (若收敛) 必定满足必要条件 (23), 同时, 对燃料消耗直接寻优也是基于混合法的思想 [18], 即在一定程度上弥补未推导与利用充分条件的不足. 若将指标函数改为 $\min[\sum\limits_i (p(t_i)-1)^2]$, 将 $p(t_i)=1$ 从约束条件中去除, 期望得到的仅为满足必要条件的解.

表 4 有限推力燃料最优解参数优化模型（NLP3）

Table 4 Parameter optimization model of the fuel-optimal solution with finite thrust (NLP3)

optimization parameters	$\lambda_r(t_0), \lambda_v(t_0), t_i$
performance index	$\min\left(\int_0^T F(t)\,dt\right)$
constraint conditions	$\begin{cases} \boldsymbol{r}(t_f)=\boldsymbol{r}(t_0), \boldsymbol{v}(t_f)=\boldsymbol{v}(t_0); \\ p(t_i)=1, p_u \geqslant 1, p_l \leqslant 1 \end{cases}$
equation for costate variables	Eq. (15)
equation for state variables	$\begin{cases} \text{thrustarc : Eq. (1);} \\ \text{coastarc : Eq. (4)} \end{cases}$

每次求解 NLP3, 对应 “开” 推力序列的推力幅值是固定的, 但从最小推力幅值开始逐步增大. 取第 1 步优化的推力幅值为

$$F'_0 = (1+c)\,F_{\min} \tag{37}$$

式中, c 为给定的小参数 ($c > 0$). 将最小推力解作为初始估计值. 此后, 逐步增加推力幅值, 建立同样的 NLP3 进行求解. 在这个延拓过程中, 每一步的解均为下一步优化的初值, 推力幅值的取值方式如下: 如果第 i 步求解得到收敛解 (推力幅值记为 F'_i, 以区分求解最小推力解过程中的 F_i), 第 $i+1$ 步的推力幅值取为

$$F'_{i+1} = (1+c)\,F'_i \tag{38}$$

基于式 (38) 中的推力幅值, 若 NLP3 收敛, 则第 $i+1$ 步得到收敛解 (推力幅值记为 F'_{i+1}); 若 NLP3 不收敛, F'_{i+1} 重新设置为

$$F'_{i+1} = 0.5\left(F'_i + F'_{i+1}\right) \tag{39}$$

直至得到收敛解.

因此, 只要推力幅值尚未达到下一个临界推力幅值, 则如果式 (37) 中的 c 足够小, 在不改变最优推力开关序列的情况下, NLP3 总能得到收敛解.

随着推力幅值的增大, 燃料最优解逐渐逼近下一个临界推力解, 设置一小参数 d ($d > 0$), 当以下集合为非空时则停止求解 NLP3 问题 (即停止增加推力幅值)

$$S = \{p_c \,|\, |p_c - 1| \leqslant d\} \tag{40}$$

式中, p_c 为主矢量的特征值, 并记满足上式的特征值 (可能不止一个) 所对应的时刻为 t_s, 此时建立如表 5

所示的非线性规划问题 (记为 NLP4) 直接优化出临界推力幅值. 其中, $p_{\rm u}, p_{\rm l}$ 为不在集合 S 中的特征值, 其含义与表 4 中的 $p_{\rm u}, p_{\rm l}$ 相同. 上述各变量定义如图 6 所示. 只要 d 足够小, NLP4 的问题总能收敛.

表 5 临界推力幅值非线性规划模型（NLP4）

Table 5 Nonlinear programming model for solving the critical thrust amplitude (NLP4)

optimization parameters	$\lambda_r(t_0), \lambda_v(t_0), t_i, t_{\rm s}, F$
performance index	$\min\left(\int_0^{\rm T} F(t)\,{\rm d}t\right)$
constraint conditions	$\begin{cases} \boldsymbol{r}(t_{\rm f}) = \boldsymbol{r}(t_0), \boldsymbol{v}(t_{\rm f}) = \boldsymbol{v}(t_0) \\ p(t_i) = 1, p(t_{\rm s}) = 1, p_{\rm u} \geqslant 1, p_{\rm l} \leqslant 1 \end{cases}$
equation for costate variables	Eq. (15)
equation for state variables	$\begin{cases} \text{thrustarc : Eq. (1);} \\ \text{coastarc : Eq. (4)} \end{cases}$

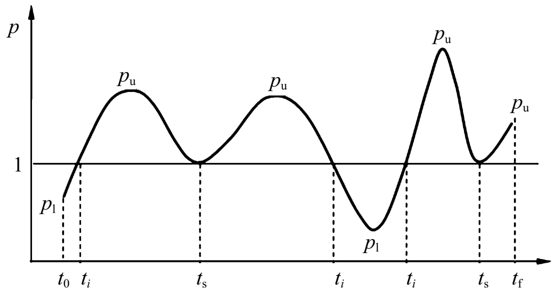


图 6 NLP4 中相关变量示意图

Fig. 6 Schematic diagram of some variables in NLP4

得到临界推力幅值后, 根据表 3 中所列的情况, 重新设置推力开关序列, 再回到求解 NLP3 的步骤. 在推力幅值延拓过程中, 是否会遇到有限幅值临界推力 (即求解 NLP4) 将依据具体问题, 当推力幅值增大到一定程度后, 认为不会再出现有限幅值临界推力, 此时, 有限推力也逐步逼近脉冲推力.

2.2.3 脉冲推力燃料最优解

当推力幅值增加至无穷大时, 总推进时间趋向于 0, 有限推力幅值燃料最优解逼近脉冲推力燃料最优解. 设置推力幅值阈值如式 (31) 所示, 当推力幅值达到该阈值时, 建立如表 6 所示的非线性规划问题 (记为 NLP5) 直接优化出脉冲推力燃料最优解. 其中, 总的推进段数目为最优脉冲数目 $N_{\Delta v}$, 第 i 个推进段的中间时刻为最优脉冲 $\Delta\boldsymbol{v}_{im}$ 作用时刻 t_{im}, 推力幅值与第 i 个推进段的持续时间乘积为第 i 个脉冲的大小 $\|\Delta\boldsymbol{v}_{im}\|$. 若式 (31) 中的 a 足够小, NLP5 可快速收敛. 对总速度脉冲直接寻优的含义如 NLP3.

表 6 脉冲推力最优解非线性规划模型 (NLP5)

Table 6 Nonlinear programming model of the fuel-optimal solution with impulsive thrust (NLP5)

optimization parameters	$\lambda_r(t_0), \lambda_v(t_0), t_{im}, \Delta\boldsymbol{v}_{im}$
performance index	$\sum_{im=1}^{N_{\Delta v}} \|\Delta\boldsymbol{v}_{im}\|$
constraint conditions	$\begin{cases} \boldsymbol{r}(t_{\rm f}) = \boldsymbol{r}(t_0), \boldsymbol{v}(t_{\rm f}) = \boldsymbol{v}(t_0) \\ p(t_{im}) = 1 \end{cases}$
equation for costate variables	Eq. (15)
equation for state variables	coast arc: Eq. (4)

3 最优受控绕飞轨迹设计算例

3.1 慢速绕飞

设主星轨道为围绕地球运行的 400 km 高的圆轨道, 轨道角速度 $n = 1.1314\times10^{-3}$ rad/s. 伴星的初始和末端状态设为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}(t_{\rm f}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{\rm T} \text{ km} \\ \boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{v}(t_{\rm f}) &= \begin{bmatrix} 0 & -0.002\,3 & 0 \end{bmatrix}^{\rm T} \text{ km/s} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

如果不对伴星施加推力控制, 则伴星的自然绕飞轨迹周期 $T_0 = 5\,553.6$ s, 在 x–y 平面内投影为短半轴为 1 km、长半轴为 2 km 的椭圆, 在 y–z 面内投影则为半径为 2 km 的圆.

设定绕飞周期 T 为 2 h (7 200 s) 从而实现 “慢速绕飞”, 由式 (24) 可以得到双脉冲解为

$$\left.\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{v}_1 &= \begin{bmatrix} 2.717\,3 & -0.444\,8 & 3.042\,5 \end{bmatrix}^{\rm T} \text{ m/s} \\ \Delta\boldsymbol{v}_2 &= \begin{bmatrix} 2.717\,3 & 0.444\,8 & 3.042\,5 \end{bmatrix}^{\rm T} \text{ m/s} \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

双脉冲解主矢量曲线如图 7(a) 所示, 不满足脉冲推力燃料最优解的一阶必要条件.

取 $a = 1/T = 1/7\,200$(无量纲), 得到第 1 个优化的推力幅值为

$$F_0 = \|\Delta\boldsymbol{v}_1\| + \|\Delta\boldsymbol{v}_2\| = 8.206\,9 \text{ N} \tag{43}$$

按照第 2.1 节介绍的延拓方法对推力幅值进行延拓, 即多次求解 NLP1(并取 $b = 1\times10^{-2}$) 与一次求解 NLP2, 可以得到最小推力解, 其推力幅值为

$$F_{\min} = 7.441\,2\times10^{-4} \text{ N} \tag{44}$$

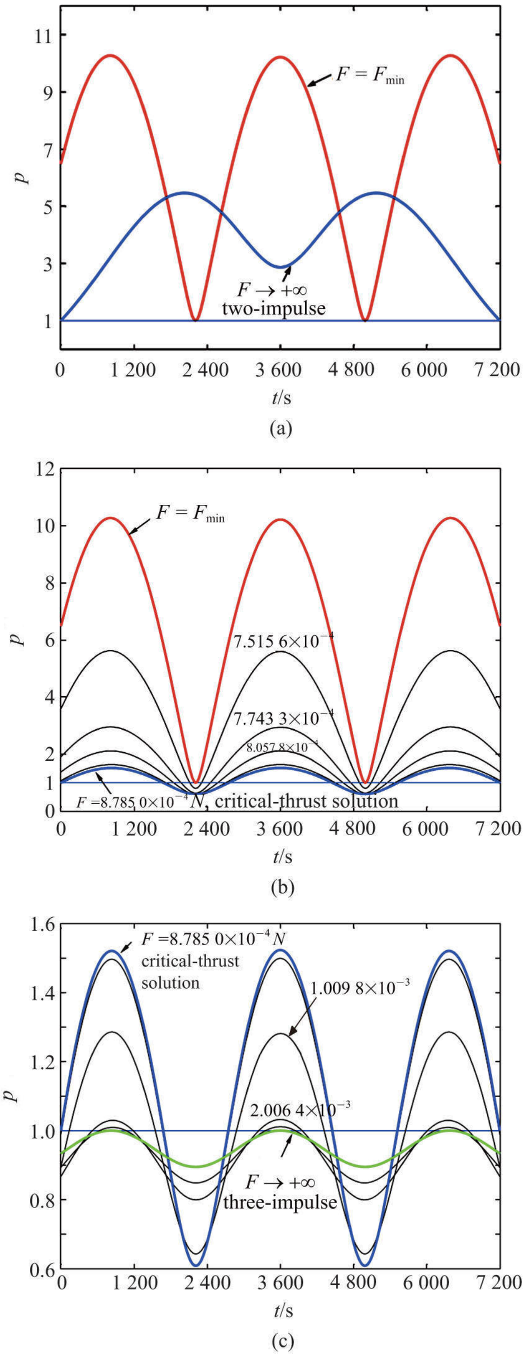


图 7 主矢量曲线 (慢速绕飞)

Fig. 7 The primer vector (slow fly-around)

最小推力解主矢量曲线如图 7(a) 所示 (处理后), 存在两个同时为 1 的极小值. 因此, 在该最小推力解基础上增大推力幅值后, 最优推力开关序列变为 “开 — 关 — 开 — 关 — 开”. 图 7(b) 为增大推力幅值直至遇到临界推力解过程中燃料最优解主矢量曲线的变化情况. 取 $c = 1\times10^{-2}$, $d = 1\times10^{-4}$, 可以得到该最优推力开关序列的临界推力幅值为 $8.785\,0\times10^{-4}$ N, 此时最优解主矢量的初始值和末端值均为 1. 继续增加推力幅值, 最优推力开关序列变为 “关 — 开 — 关 — 开 — 关 — 开 — 关”. 图 7(c) 为继续增加推力幅值后燃料最优解主矢量曲线的变化情况. 利用推力幅值为 8.206 9 N 时的最优解求解脉冲推力燃料最优解可以得到: 最优脉冲数目为 3, 3 次脉冲的大小以及作用时刻分别为

$$\left.\begin{aligned} \Delta v_1 &= 1.015\,0 \text{ m/s}, \quad t_1 = 823.2 \text{ s} \\ \Delta v_2 &= 2.030\,0 \text{ m/s}, \quad t_2 = 3\,600.0 \text{ s} \\ \Delta v_3 &= 1.015\,0 \text{ m/s}, \quad t_3 = 6\,376.8 \text{ s} \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

三脉冲燃料最优解主矢量曲线也在图 7(c) 中给出, 满足最优解的一阶必要条件, 即主矢量在脉冲作用时刻为 1 且在其他时刻小于 1. 可以看出, 在此算例中, 临界推力幅值只在主矢量初始值与末端值为 1 的情况存在.

根据主矢量曲线的变化情况, 最优推力开关序列及其相应的推力幅值范围如表 7 所示.

表 7 最优推力开关序列以及推力幅值范围（慢速绕飞）

Table 7 Optimal thrusting switching sequences and corresponding range of thrust amplitude (slow fly-around)

optimal thrusting switching sequences	range of thrust amplitude/N
On—Off—On—Off—On	$[7.4412\ \ 8.7850]\times10^{-4}$
Off—On—Off—On—Off—On—Off	$[8.7850\times10^{-4}\ \ +\infty)$

由推力幅值延拓过程中得到的所有燃料最优解还可以画出 bang-bang 控制曲线的 “全貌” 以及每个推力幅值对应的总速度脉冲 Δv, 如图 8 所示. 此处的 “全貌” 指的是沿任意一个推力幅值作平行于横轴的直线, 即可得到该推力幅值水平下的最优 bang-bang 控制曲线以及相应的总速度脉冲. 例如, 当 $F = 1\times10^{-2}$ N 时, 从图 8 可以直接得到其最优开关序列为 “关 — 开 — 关 — 开 — 关 — 开 — 关”, 开关时刻 t_i 和总速度脉冲 $\Delta\boldsymbol{v}$ 也可以从数轴上直接得到.

图 9 给出了双脉冲解、三脉冲最优解、最小推力解、临界推力解 (“开 — 关 — 开 — 关 — 开” 推力序列) 以及自然绕飞 (标注 null-thrust) 的相对轨迹. 图 9(a) 中, 箭头方向表示三脉冲最优解的推力方向; 图 9(b) 中, 箭头方向表示有限推力方向, 箭头长度与主矢量模值大小成正比.

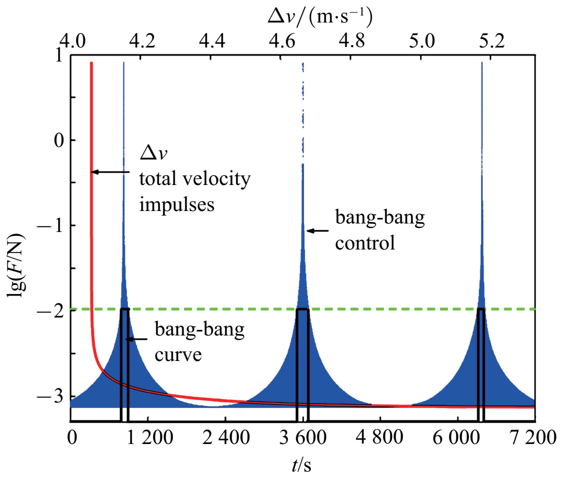


图 8 Bang-bang 控制与总速度脉冲随推力幅值的变化曲线 (慢速绕飞)

Fig. 8 Bang-bang control and total velocity impulses with the change of thrust amplitude (slow fly-around)

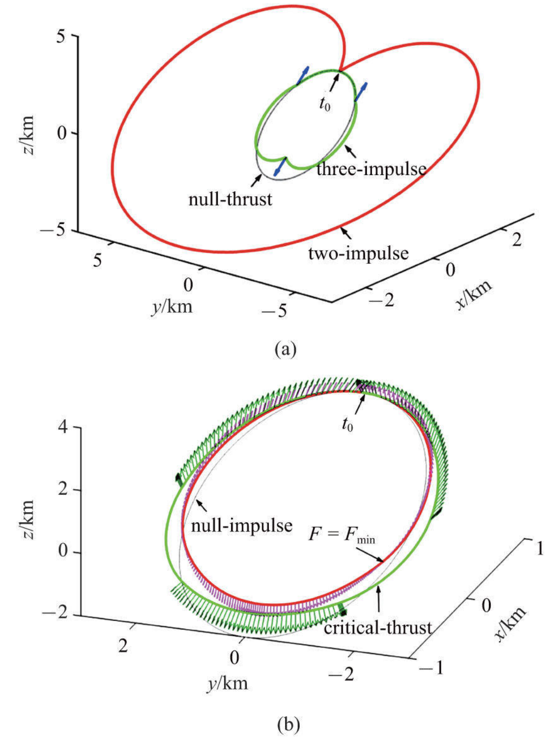


图 9 相对轨迹 (慢速绕飞)

Fig. 9 Relative trajectories (slow fly-around)

3.2 快速绕飞

针对 3.1 节所描述的同样问题, 调整绕飞周期 T 为 1 h (3 600 s) 从而实现 “快速绕飞”. 由式 (24) 可以得到双脉冲解为

$$\left.\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{v}_1 &= [-0.977\,6\ \ 0.320\,0\ \ -4.502\,7]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m/s}\\ \Delta\boldsymbol{v}_2 &= [-0.977\,6\ \ -0.320\,0\ \ -4.502\,7]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m/s}\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

双脉冲解主矢量曲线如图 10(a) 所示, 亦不满足脉冲推力最优解的一阶必要条件, 因此该双脉冲解也不是最优解. 取 $a = 1/T$ (无量纲), 得到第 1 个优化的推力幅值为

$$F_0 = \|\Delta\boldsymbol{v}_1\| + \|\Delta\boldsymbol{v}_2\| = 9.2375\ \mathrm{N} \tag{47}$$

取 $b = 10^{-2}$, 得到最小推力解为

$$F_{\min} = 2.140\,0 \times 10^{-3}\ \mathrm{N} \tag{48}$$

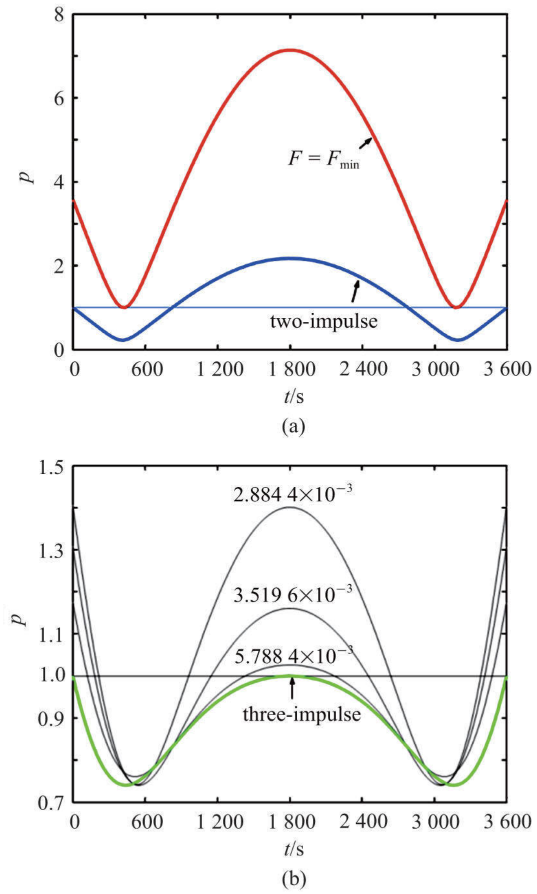


图 10 主矢量曲线 (快速绕飞)

Fig. 10 The primer vector (fast fly-around)

最小推力解主矢量曲线如图 10(a) 所示 (处理后), 也存在 2 个同时为 1 的极小值. 因此, 在该最小推力解基础上增大推力幅值后, 最优推力开关序列变为 “开 — 关 — 开 — 关 — 开”. 图 10(b) 为增大推力幅值后, 燃料最优解主矢量曲线的变化情况. 利用推力幅值为 9.2375 N 时的最优解优化脉冲推力最优解可以得到: 最优脉冲数目为 3, 3 次脉冲的大小以

及作用时刻分别为

$$\left.\begin{aligned} \Delta v_1 &= 0.758\,5\ \text{m/s}, \quad t_1 = 0.003\,7\ \text{s} \\ \Delta v_2 &= 4.024\,8\ \text{m/s}, \quad t_2 = 1\,800.0\ \text{s} \\ \Delta v_3 &= 0.758\,5\ \text{m/s}, \quad t_3 = 3\,600.0\ \text{s} \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

因此, 对于任意可行的有限推力幅值, 该问题的燃料最优解的最优推力开关序列均为 “开 — 关 — 开 — 关 — 开”. 该最优控制问题 bang-bang 控制曲线的全貌和每一个推力幅值对应的总速度脉冲如图 11 所示, 其含义与图 8 类似.

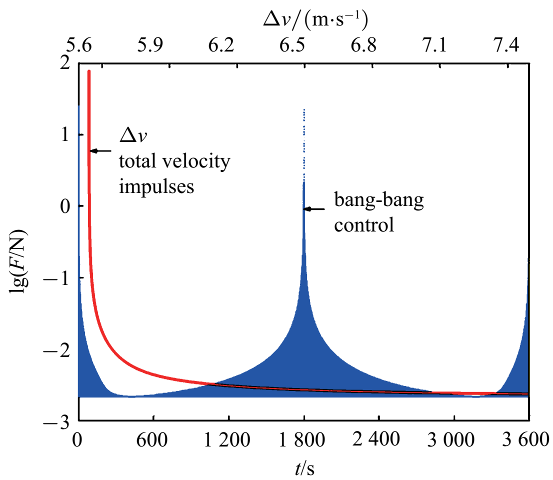


图 11 Bang-bang 控制与总速度脉冲随推力幅值的变化曲线 (快速绕飞)

Fig. 11 Bang-bang control and total velocity impulses with the change of thrust amplitude (fast fly-around)

双脉冲解、最小推力解、三脉冲最优解以及自然绕飞 (标注 null-thrust) 的相对轨迹如图 12 所示.

通过以上两个算例的优化结果可以看出, 绕飞轨迹的燃料最优解主矢量及其变化过程关于时间中轴均有较好的对称性, 然而该特点只适用于特殊初始和末端状态约束下的绕飞轨迹优化问题, 并不具备一般性. 例如, 调整 3.2 节的初始和末端状态 (若无推力仍满足自然绕飞轨迹条件):

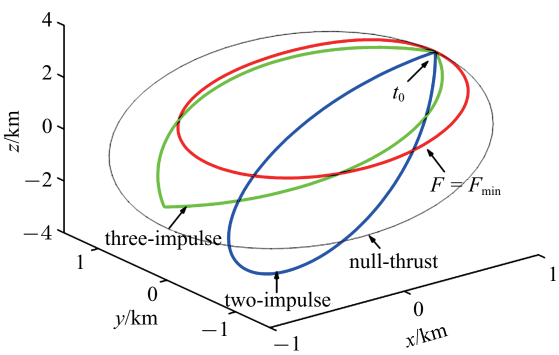


图 12 相对轨迹 (快速绕飞)

Fig. 12 Relative trajectories (fast fly-around)

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}(t_f) = \\ &\qquad [0.707\,1\ \ 1.414\,2\ \ 1.414\,2]^{\mathrm{T}}\ \text{km} \\ &\boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{v}(t_f) = \\ &\qquad [0.000\,8\ \ -0.001\,6\ \ 0.001\,6]^{\mathrm{T}}\ \text{km/s} \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

通过对推力幅值的延拓, 可以最终得到脉冲推力燃料最优解主矢量曲线如图 13 所示. 显然, 该主矢量曲线关于时间中轴并不对称.

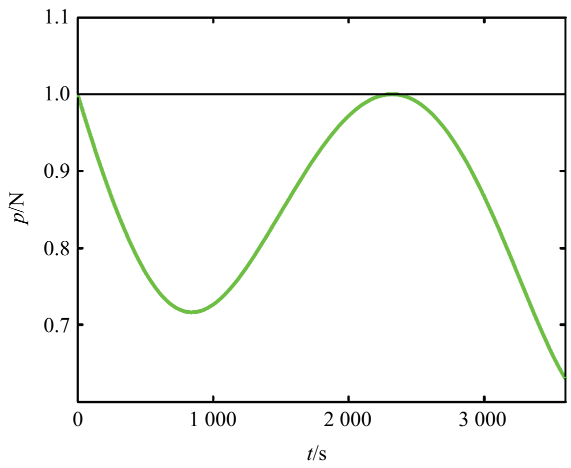


图 13 脉冲推力燃料最优解主矢量曲线

Fig. 13 The primer vector of fuel-optimal solution with impulsive thrust

3.3 平面快速绕飞

本节讨论 3.2 节中 x–y 平面内的快速绕飞运动 (周期 $T = 3\,600$ s), 初始与末端约束为式 (41), 但不考虑 z 方向运动. 采用同样的方法, 可以首先得到双脉冲解与最小推力解 ($F_{\min} = 9.304\,8 \times 10^{-4}$ N), 它们的主矢量曲线如图 14(a) 所示, 双脉冲解具有 2 个大于 1 的极大值, 最小推力解主矢量曲线没有极大值, 仅有 1 个极小值为 1. 随后, 逐步增大推力幅值即得到有限推力燃料最优解. 在推力幅值延拓过程中, 主矢量曲线逐渐在 630 s 和 1 970 s 附近形成了 2 个小于 1 的极大值, 并且这两个极大值逐渐增大至 1(对应临界推力 $4.840\,6 \times 10^{-3}$ N), 如图 14(b) 所示. 继续增大推力幅值, 极大值大于 1, 开关序列发生变化, 最终得到四脉冲燃料最优解, 主矢量曲线变化如图 14(c) 所示.

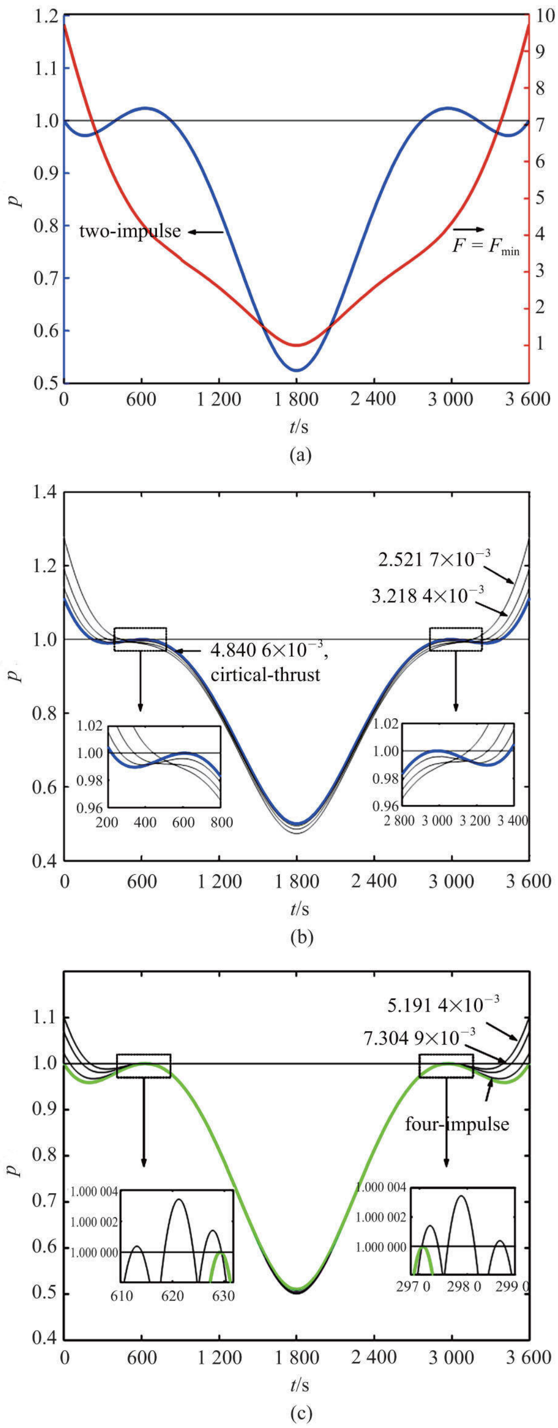


图 14　主矢量曲线 (平面快速绕飞)

Fig. 14　The primer vector (planar fast fly-around)

该算例中, 最优推力开关序列及其相应的推力幅值范围如表 8 所示. 双脉冲解、四脉冲最优解、最小推力解、临界推力解 (“开 — 关 — 开” 推力序列) 以及自然绕飞 (标注 null-thrust) 的相对轨迹如图 15 所示. 其中, 箭头方向表示连续推力方向, 箭头长度与主矢量模值大小成正比.

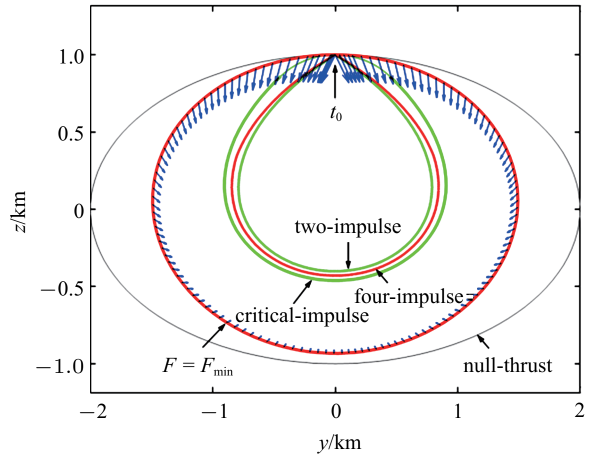


图 15　相对轨迹 (平面快速绕飞)

Fig. 1　Relative trajectories (planar fast fly-around)

表 8　最优开关序列以及推力幅值范围（平面快速绕飞）

Table 8　Optimal thrusting switching sequences and corresponding range of thrust amplitude (planar fast fly-around)

optimal thrusting switching sequences	range of thrust amplitude/N
On—Off—On	$[0.9305\ \ 4.8406] \times 10^{-3}$
On—Off—On—Off—On—Off—On	$\left[4.8406 \times 10^{-3}\ \ +\infty\right)$

由式 (24) 可以得到双脉冲解的总速度脉冲为

$$\|\Delta \boldsymbol{v}_1\| + \|\Delta \boldsymbol{v}_2\| = 2.0574 \text{ m/s} \tag{51}$$

通过对推力幅值的延拓可以最终得到四脉冲最优解的总速度脉冲为

$$\sum_{im=1}^{4} \Delta v_{im} = 2.0555 \text{ m/s} \tag{52}$$

两者仅相差为 1.9112 mm/s (小于 0.1%). 从图 14 (c) 可以看出, “开 — 关 — 开 — 关 — 开 — 关 — 开” 推力序列中位于中间的两个推进段时间很短, 其所对应的速度脉冲因此也很小 (均为 7.8580 cm/s). 即便如此, 推力幅值延拓方法仍然可以求解出四脉冲燃料最优解. 因此, 该算例进一步验证了推力幅值延拓方法的有效性.

4　结论

本文主要针对航天器受控绕飞轨迹的燃料优化与控制问题提出了一种新的推力幅值延拓方法. 该方法通过对推力幅值的延拓, 可以将最为简单的双脉冲解延拓至有限推力以及脉冲推力燃料最优解. 在

延拓过程中, 协态变量初值的选取都有明确的依据从而避免了随机猜测, 并通过对主矢量曲线的跟踪来判断最优推力开关序列. 推力幅值延拓的核心思想是在推力幅值变化过程中跟踪监测主矢量曲线的初始值、末端值、极小值和极大值的变化情况, 并以此确定最优的推力开关序列及其相应的临界推力幅值. 该方法不仅保证了问题求解过程的平滑性, 而且通过遍历所有可行的推力幅值, 实现了有限推力与脉冲推力燃料最优绕飞轨迹优化问题的一并求解. 与此同时, 还获得以下的认识与理解:

(1) 通过延拓推力幅值, 主矢量曲线从双脉冲解连续变形至脉冲推力最优解, 其间经过最小推力解与临界推力解. 这个连续变形过程类似一个同伦, 但没有给出明确的同伦映射函数. 算例中, 双脉冲解均成功地延拓至最优脉冲推力解, 但事先并未证明解的存在性. 因此, 如何为延拓赋予更为严格的数学证明是值得深入研究的问题.

(2) 推力幅值延拓的过程也是一个 “预测–校正” 过程, 每一步的解均以上一步的解作为初值, 这是最为简单的预测方法, 每一步求解 NLP 则是校正. 临界推力幅值也是预测的一个结果, 但通过建立求解不同的 NLP 进行校正. 在这一过程中, 只要推力幅值变化足够小, 非线性规划问题总能获得收敛解. 通过建立速度脉冲与协态变量的联系, 双脉冲解可以解析地给出一组协态变量, 此后的推力幅值延拓过程中, 求解 NLP 无需再猜测协态变量.

(3) 临界推力意味着延拓过程中最优推力开关序列发生突变, 这是通过求解 NLP 将此类突变识别出来, 然后重新设置推力开关序列. 当推力幅值足够大时, 认为不会再有突变, 开关序列近似为脉冲序列, 即确定了脉冲个数与作用时刻的初值. 推力幅值的延拓过程为航天器变轨的推力配置起到一定参考作用. 实际飞行不宜采用临界推力幅值, 由于推力幅值误差的存在, 最优推力开关序列的确定可能陷入混沌, 给制导控制律设计带来问题.

实际上, 本文提出的延拓方法具有一般适用性, 只要改变初始与末端约束条件, 或将 HCW 方程替换为其他形式, 就可应用于其他类型的轨迹转移燃料优化问题中, 比如: HCW 模型所描述的目标飞越与交会问题可以同样方法求解; 基于本文所得到的解, 通过对参考轨道偏心率的延拓可以求解椭圆参考轨道最优相对轨迹转移问题; 通过对主星引力场大小的延拓可以求解太阳系小天体可变周期燃料最优绕飞轨迹问题.

参 考 文 献

1 Clohessy WH, Wiltshire RS. Terminal guidance system for satellite rendezvous. *Journal of the Aerospace Sciences*, 1960, 27(9): 653-658

2 Straight S D. Maneuver design for fast satellite circumnavigation. [MS Thesis]. Air Force Institute of Technology, USA, 2004

3 朱彦伟, 杨乐平. 航天器近距离相对运动轨迹设计与控制. 宇航学报, 2009, 30(5): 1834-1841 (Zhu Yanwei, Yang Leping. Mission trajectory design and control for spacecraft proximity relative motion. *Journal of Astronautics*, 2009, 30(5): 1834-1841 (in Chinese))

4 王功波, 孟云鹤, 郑伟, 等. 快速绕飞卫星空间圆编队设计方法. 宇航学报, 2010, 31(11): 2465-2470. (Wang Gongbo, Meng Yunhe, Zheng Wei, et al. Fast fly around satellite space circle formation design. *Journal of Astronautic*, 2010, 31(11): 2465-2470 (in Chinese))

5 Carter TE. Fuel-optimal maneuvers of a spacecraft relative to a point in circular orbit. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1984, 7(6): 710-716

6 Lawden DF. Optimal Trajectories for Space Navigation. London: Butterworths, 1963: 56, 63

7 Bertrand R, Epenoy R. New smoothing techniques for solving bang-bang optimal control problems - numerical results and statistical interpretation. *Optimal Control Applications and Methods*, 2002, 23(4): 171-197

8 Haberkorn T, Martinon P, Gergaud J. Low-thrust minimum-fuel orbital transfer: A homotopic approach. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, 27(6): 1046-1060

9 Mitani S, Yamakawa H. Continuous-thrust transfer with control magnitude and direction constraints using smoothing techniques. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*,2012, 36(1): 163-174

10 Thevenet JB, Epenoy R. Minimum-fuel deployment for spacecraft formations via optimal control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2008, 31(1): 101-113

11 Li J, Xi XN. Fuel-optimal low-thrust reconfiguration of formation-flying satellites via homotopic approach. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, 35(6): 1709-1717

12 Martinon P, Gergaud J. Using switching detection and variational equations for the shooting method. *Optimal Control Applications and Methods*, 2007, 28(2): 95-116

13 Jiang FH, Baoyin HX, Li JF. Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, 35(1): 245-258

14 蒋方华, 陈杨, 刘跃聪, 等. 2010 年国际深空探测轨道优化竞赛的清华大学解法. 力学与实践, 2011, 33(3): 103-105 (Jiang Fanghua, Chen Yang, Liu Cong, et al. The solution by Tsinghua University. *Mechanics in Engineering*, 2011, 33(3): 103-105 (in Chinese))

15 Guo TD, Jiang FH, Li JF. Homotopic approach and pseudospectral method applied jointly to low thrust trajectory optimization. *Acta Astronautica*, 2012, 71: 38-50

16 Kim SC. Mission design and trajectory analysis for inspection of a host spacecraft by a microsatellite. [MS Thesis]. Massachusetts Institute of Technology, 2006: 43
17 胡寿松. 自动控制原理. 第五版. 北京: 科学出版社, 2007: 572 (Hu Sousong. Principle of Automatic Control. 5th edn. Beijing: Science Press. 2007. 572)
18 Gao Y, Kluever CA. Low-thrust interplanetary orbit transfers using hybrid trajectory optimization method with multiple shooting, Paper 2004-5088, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, August 16, 19, 2004, Providence, RI, United states, 2004.

(责任编委: 陆启韶)
(责任编辑: 周冬冬)

THRUST-AMPLITUDE CONTINUATION DESIGN APPROACH FOR SOLVING SPACECRAFT OPTIMAL CONTROLLED FLY-AROUND TRAJECTORY[1)]

Zhu Xiaolong[*,†] Liu Yingchun[*] Gao Yang[*,2)]
[*](*Technology and Engineering Center for Space Utilization, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100094, *China*)
[†](*University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

Abstract A continuation approach in which the thrust amplitude is the continuation parameter is proposed to solve the fuel-optimal spacecraft fly-around trajectories. On the basis of the two-impulse solution, the minimum thrust amplitude that ensures the feasibility of the fly-around trajectory is obtained by replacing impulsive thrust with finite thrust and decreasing the thrust amplitude gradually. Once obtaining the minimum-thrust solution, the thrust amplitude is increased step by step and the optimal thrusting switching sequence is determined by the primer vector in each step. Consequently, the fuel-optimal trajectories with both finite thrust and impulsive thrust are obtained by continuation from the minimum-thrust fly-around trajectory solution. By continuation on all feasible thrust amplitudes, the fuel-optimal solutions with both finite thrust and impulsive thrust are solved, and the costate variables in the optimal control problem are no longer acquired randomly. Numerical examples of slow and fast fly-around trajectories show the effectiveness of the proposed continuation approach.

Key words fly-around trajectory, continuation approach, trajectory optimization, fuel-optimal, finite thrust, impulsive thrust

Received 22 January 2014, revised 05 April 2014.
1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11372311).
2) Gao Yang, research professor, research interests: spaceflight dynamics and control. E-mail：gaoyang@csu.ac.cn