

含铰接杆系结构几何非线性分析子结构方法¹⁾

王刚 齐朝晖²⁾ 汪菁

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要 将细长杆系结构按长度方向划分为多个子结构, 由于在子结构坐标系下的节点位移均是小位移, 可以将子结构内部自由度凝聚到边界. 考虑到子结构端面在变形过程中保持为刚性截面, 将端面节点自由度进一步凝聚到端面形心点, 这样每一个子结构就减缩成形式上只有两个节点的广义梁单元, 大大减缩了自由度. 大位移大转动是细长杆系结构产生几何非线性效应的一个重要原因, 基于共旋坐标法, 建立了随单元一起运动的随动坐标系, 推导了子结构单元的节点力平衡方程及其切线刚度阵. 同时, 考虑到工程机械中细长杆系结构含有相互铰接的刚体加强块, 给出了非独立自由度节点力转换到独立参数下的广义节点力及其导数. 最后, 通过履带式起重机的副臂工况算例, 给出了其在不同载荷下的臂架结构位移, 验证了方法的正确性.

关键词 细长杆系结构, 子结构凝聚, 刚体铰接, 几何非线性, 共旋坐标法, 履带式起重机

中图分类号: O342, TH213.7 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-13-345

引言

在工程机械中, 有大量的细长杆系结构, 例如履带式起重机的臂架, 桁架式可展开天线等. 这类结构由于细长的特点, 在实际工作中位移很大, 如果不考虑变形前后结构位形的改变, 得到的分析结果可能明显不符合实际. 为了对这类结构进行有限元分析, 几何非线性有限元逐步发展起来并且得到了充分地应用. 目前比较成熟的几种传统方法包括参考初始构型的完全拉格朗日方法 (total Lagrangian) 和参考当前构型的更新拉格朗日方法 (updated Lagrangian) 以及二者混用的方法^[1].

以上方法成功地解决了一大类的实际工程问题并且相关理论也得到了很大的发展和改进^[2-3]. 然而, 这几种传统的方法都需要针对不同的单元构造复杂的非线性单元, 程序化实现很困难. 对于工程中经常使用的细长杆系结构, 大位移和大转动是这类结构产生几何非线性效应的一个重要因素, 而结构本身的应变很小. 针对这样的结构, 最早由 Wempner^[4] 和 Belytschko^[5] 分别提出的共旋坐标法 (co-rotational) 成功地解决了大位移大转动小应变结构的几何非线性问题. 共旋坐标法的主要思想可以表述为: 在每个单元的当前构型上建立一个描述单

元位移的随动坐标系, 将单元的刚体位移分离到随动坐标系相对于初始位置的位移和转动. 这样就可以应用线性有限元单元, 省去了单元的重新构造.

近几十年来, 共旋坐标法已经被广泛地应用到各种结构单元, 包括梁、板壳以及各种实体单元, 并且表现出了良好的数值性态^[6-12]. 但是, 针对工程中细长杆系结构, 由于整个结构的单元个数很多, 直接采用共旋坐标法对结构进行离散, 得到的平衡方程个数非常多, 加之每个方程的非线性程度很高, 给出每个方程的切线刚度阵就显得十分困难^[13].

针对履带式起重机的臂架, 考虑到组成臂架的每个臂节的端面都进行了加强处理, 将臂架按长度方向每个臂节作为一个子结构. 对子结构进行了自由度减缩, 同时把子结构刚性端面的节点自由度用端面形心位移和转动表示, 这样将一个子结构减缩成了形式上只有两个节点的广义梁单元. 推导了减缩后的子结构节点力平衡方程以及切线刚度阵. 最后, 考虑了臂架与转台通过刚体加强块铰接和两个臂架之间的刚体连接引起的臂架铰接后的自由度转换问题, 给出了独立自由度表示的节点力平衡方程以及转换后的切线刚度阵. 最后, 给出了履带式起重机副臂工况下不同吊重的结构位移.

2013-10-16 收到第 1 稿, 2013-12-09 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11372057).

2) 齐朝晖, 教授, 主要研究方向: 多体系统动力学、结构力学. E-mail: zhaohuiq@dlut.edu.cn

1 子结构瞬时单元坐标系

工程机械中,大量起重机械的结构部分都是由细长杆系结构组成.为了运输和安装方便,实际使用时多个杆系结构进行对接组装成整个结构.因此,每个框架的交接面上都进行了加强处理.由于组装之后的杆系结构在承载后会发生很大的节点位移,对这类结构进行几何非线性分析显得尤为重要.

考虑到所研究的细长杆系结构主要发生大位移和大转动,结构的应变很小.因此,在子结构内部,各个节点的位移相对于子结构坐标系均是小位移.根据这一特点,可以将细长杆系结构按长度方向划分为多个子结构,对其自由度进行减缩.

子结构内部自由度可以凝聚到边界的条件是在某个坐标系下描述的子结构所有的节点位移之间满足线性关系.因此,建立一个描述子结构节点位移的当前单元坐标系是子结构减缩的必要条件和准确求出节点力的关键.

如图 1 所示的变形后的子结构,定义子结构端面相对于总体坐标系的初始方位矩阵分别为 S_{10} 和 S_{20} ,将子结构的端面形心作为广义梁单元的两个节点,其相对于总体坐标系的矢径分别为 r_1 和 r_2 ,总体转动参数分别为 θ_1 和 θ_2 .

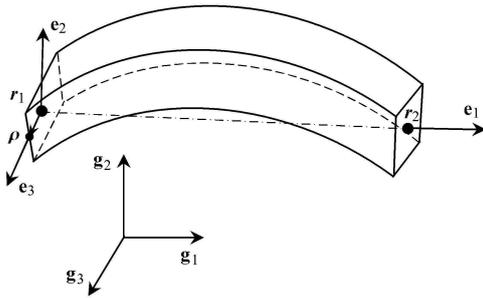


图 1 子结构瞬时坐标系

Fig. 1 Current coordinate systems of substructures

子结构左右端面基矢量组成的正交矩阵分别可以表示为

$$R_1 = R_{\theta_1} S_{10} \tag{1}$$

$$R_2 = R_{\theta_2} S_{20} \tag{2}$$

在左端面选一个参考点 ρ ,则瞬时子结构单元坐标系可以按以下方式选取

$$e_1 = \frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|}, e_2 = \frac{\rho \times e_1}{\|\rho \times e_1\|}, e_3 = e_1 \times e_2 \tag{3}$$

则显然参考点在 e_2 方向没有分量,即

$$\rho = \rho_1 e_1 + \rho_3 e_3 \tag{4}$$

定义子结构单元坐标系和总体坐标系的转换矩阵为 R_s ,则子结构右端面形心在单元坐标系下的位移可以表示为

$$\bar{u}_2 = R_s^T (r_2 - r_1) - \bar{r}_2 \tag{5}$$

其变化率为

$$\dot{\bar{u}}_2 = r_s^T [\dot{R}_2 - \dot{r}_1 + (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \omega_s] \tag{6}$$

其中, ω_s 是单元坐标系转动角速度.

参考点在单元坐标系下的位移可以表示为

$$\bar{u}_\rho = R_s^T \rho - \bar{\rho} \tag{7}$$

其中, $\bar{\rho}$ 是参考点相对于端面形心的初始矢径.其变化率为

$$\dot{\bar{u}}_\rho = R_s^T (\bar{\rho} \omega_s - \bar{\rho} \omega_1) \tag{8}$$

其中, ω_1 是子结构左端面转动角速度.

单元坐标系的选取方式满足以下条件:(1)子结构右端面形心速度在单元坐标系 e_2 轴和 e_3 轴方向没有分量;(2)参考点速度在单元坐标系 e_2 轴方向没有分量.该条件可以写成以下形式

$$e_2^T \dot{\bar{u}}_2 = 0, e_3^T \dot{\bar{u}}_2 = 0, e_2^T \dot{\bar{u}}_\rho = 0 \tag{9}$$

将式 (6) 和式 (8) 代入式 (9),可以解得子结构单元坐标系角速度 ω_s 与端面形心速度、角速度的关系

$$\omega_s = D_u (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) + D_\theta \omega_1 \tag{10}$$

其中

$$D_u = \frac{1}{\rho_3 e_1^T (r_2 - r_1)} \rho e_2^T - \frac{1}{e_1^T (r_2 - r_1)} e_2 e_3^T \tag{11}$$

$$D_\theta = -\frac{1}{\rho_3} e_1 \rho^T e_2 \tag{12}$$

按照以上步骤可以建立当前构型下子结构的单元坐标系,在单元坐标系下描述子结构的变形.给出单元坐标系下的节点位移,就可以求得单元坐标系下的节点力.

2 细长杆系结构自由度凝聚

如图 2 所示的空间杆系结构,其左右端面均是加强的矩形截面.

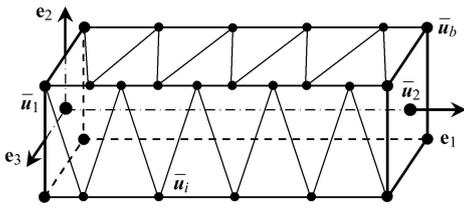


图 2 子结构连体坐标系

Fig. 2 Embedded coordinate systems of substructures

在子结构连体坐标系下，对组成子结构的每个梁单元节点进行刚度阵组装并按内部位移和边界位移进行分块

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{bb} & \mathbf{k}_{bi} \\ \mathbf{k}_{ib} & \mathbf{k}_{ii} \end{bmatrix} \quad (13)$$

在子结构坐标系下，子结构的内力虚功率可以写成

$$\delta \bar{p}_e = \delta \bar{\mathbf{u}}_b^T (\mathbf{k}_{bb} \bar{\mathbf{u}}_b + \mathbf{k}_{bi} \bar{\mathbf{u}}_i) + \delta \bar{\mathbf{u}}_i^T (\mathbf{k}_{ib} \bar{\mathbf{u}}_b + \mathbf{k}_{ii} \bar{\mathbf{u}}_i) \quad (14)$$

其中， $\bar{\mathbf{u}}_b$ 表示子结构左右端面上节点的位移； $\bar{\mathbf{u}}_i$ 表示子结构内部节点的位移。

子结构体力的虚功率可以写成

$$\delta \bar{p}_g = \delta \bar{\mathbf{u}}^T \int_V \mathbf{g} \rho dv = \delta \bar{\mathbf{u}}_1^T m \mathbf{g} + \delta \omega_s^T m \mathbf{g}_c + \delta \bar{\mathbf{u}}^T \int_V \bar{\mathbf{g}} \rho dv \quad (15)$$

其中， m 是子结构的质量； $\bar{\mathbf{r}}_c$ 是子结构在单元坐标系下的质心矢径； \mathbf{g} 和 $\bar{\mathbf{g}}$ 分别是总体坐标系和子结构坐标系下的重力加速度； \mathbf{g}_c 可以表示为

$$\mathbf{g}_c = \mathbf{R}_s \bar{\bar{\theta}}_c \mathbf{R}_s \mathbf{g} \quad (16)$$

内力虚功率与体力虚功率之差可以写成

$$\delta \bar{p}_e - \delta \bar{p}_g = \delta \bar{\mathbf{u}}_b^T (\mathbf{k}_{bb} \bar{\mathbf{u}}_b + \mathbf{k}_{bi} \bar{\mathbf{u}}_i - \mathbf{w}_b \bar{\mathbf{g}}) + \delta \bar{\mathbf{u}}_i^T (\mathbf{k}_{ib} \bar{\mathbf{u}}_b + \mathbf{k}_{ii} \bar{\mathbf{u}}_i - \mathbf{w}_i \bar{\mathbf{g}}) - \delta \bar{\mathbf{u}}_1^T m \mathbf{g} - \delta \omega_s^T m \mathbf{g}_c \quad (17)$$

其中， \mathbf{w}_b 和 \mathbf{w}_i 分别是子结构坐标系下边界和内部节点的体力影响系数。

由于子结构的内部节点位移 $\bar{\mathbf{u}}_i$ 是独立的，并且除重力外子结构内部节点不受其他外力的作用，所以有

$$\mathbf{k}_{ib} \bar{\mathbf{u}}_b + \mathbf{k}_{ii} \bar{\mathbf{u}}_i - \mathbf{w}_i \bar{\mathbf{g}} = \mathbf{0} \quad (18)$$

通过式 (18) 解出子结构内部位移 $\bar{\mathbf{u}}_i$ 并将其代入式 (17)，得到仅由子结构端面节点自由度表示的子

结构内力和体力虚功率方程

$$\delta \bar{p}_e - \delta \bar{p}_g = \delta \bar{\mathbf{u}}_b^T (\bar{\mathbf{k}}_{bb} \bar{\mathbf{u}}_b - \bar{\mathbf{w}}_b \bar{\mathbf{g}}) - \delta \bar{\mathbf{u}}_1^T m \mathbf{g} - \delta \omega_s^T m \mathbf{g}_c \quad (19)$$

其中，等效刚度阵 $\bar{\mathbf{k}}_{bb}$ 和等效体力影响系数 $\bar{\mathbf{w}}_b$ 可以表示为

$$\bar{\mathbf{k}}_{bb} = \mathbf{k}_{bb} - \mathbf{k}_{bi} \mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{k}_{ib} \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{w}}_b = \mathbf{w}_b - \mathbf{k}_{bi} \mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{w}_i \quad (21)$$

考虑到子结构的左右端面都进行了加强，所以左右端面上的各个节点位移并不是独立的。定义左右端面的形心位移 $\bar{\mathbf{u}}_1$ ， $\bar{\mathbf{u}}_2$ 和截面转角矢量 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_1$ ， $\bar{\boldsymbol{\theta}}_2$ 来表示端面上所有节点的位移和转角。

记子结构左右端面上节点数分别为 m 和 n ，则将其对应的位移和转角记为

$$\bar{\mathbf{u}}_b = [\bar{\mathbf{u}}_{11}^T \ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{11}^T \ \cdots \ \bar{\mathbf{u}}_{1m}^T \ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{1m}^T \ \bar{\mathbf{u}}_{21}^T \ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{21}^T \ \cdots \ \bar{\mathbf{u}}_{2n}^T \ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{2n}^T]^T \quad (22)$$

其中，左端面上任一节点的位移和转角可以表示为

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{1i} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{1i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\bar{\mathbf{r}}_{1i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_1 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

同理，右端面上任一节点的位移和转角可以表示为

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{2j} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{2j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\bar{\mathbf{r}}_{2j} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_2 \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_2 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

其中， $\bar{\mathbf{r}}_{1i}$ 和 $\bar{\mathbf{r}}_{2j}$ 分别表示在子结构连体坐标系下，左右端面形心到端面上任一节点的矢径。

综合式 (22) ~ 式 (24)，可以得到子结构端面节点位移和端面形心位移之间的关系，即

$$\bar{\mathbf{u}}_b = \mathbf{T}_{bc} \bar{\mathbf{u}}_c \quad (25)$$

其中， $\bar{\mathbf{u}}_c = [\bar{\mathbf{u}}_1^T \ \bar{\boldsymbol{\theta}}_1^T \ \bar{\mathbf{u}}_2^T \ \bar{\boldsymbol{\theta}}_2^T]^T$ ； \mathbf{T}_{bc} 是子结构端面所有节点自由度和端面形心的位移、转角的转换矩阵。由于端面是刚性的，所以其为常数矩阵。因此， $\bar{\mathbf{u}}_c$ 和 $\bar{\mathbf{u}}_b$ 的导数关系可以写成

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}_b = \mathbf{T}_{bc} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_c \quad (26)$$

将式 (25) ~ 式 (26) 代入子结构的内力和体力虚功率方程式 (19) 中，可得

$$\delta \bar{p}_e - \delta \bar{p}_g = \delta \bar{\mathbf{u}}_c^T (\mathbf{k}_c \bar{\mathbf{u}}_c - \mathbf{w} \bar{\mathbf{g}}) - \delta \bar{\mathbf{u}}_1^T m \mathbf{g} - \delta \omega_s^T m \mathbf{g}_c \quad (27)$$

这样,由梁单元组装的空间杆系结构就减缩成了一个由子结构两端加强截面形心位移和转角表示所有节点自由度的广义梁单元.其等效刚度阵、等效体力影响系数和等效外力可以表示为

$$k_e = T_{bc}^T \bar{k}_{bb} T_{bc} \quad (28)$$

$$w = T_{bc}^T \bar{w}_b \quad (29)$$

节点力平衡方程中的位移、离散体力和外力均是在当前单元坐标系下度量的,所以需要给出当前单元坐标系下自由度和总体自由度的转换关系,从而得到总体坐标系下的节点力平衡方程.

3 子结构等效节点力

将单元坐标系下的内节点力转换到总体坐标系下,需要给出总体位移和局部位移之间的速度关系.定义变形前子结构左右端面相对于单元坐标系的方位矩阵分别为 \bar{S}_{10} 和 \bar{S}_{20} ,则变形后端面相对于总体坐标系的方位矩阵可以表示为

$$R_{\theta_1} S_{10} = R_s R_{\theta_1} \bar{S}_{10} \quad (30)$$

$$R_{\theta_2} S_{20} = R_s R_{\theta_2} \bar{S}_{20} \quad (31)$$

对式(30)~(31)求导可以得到局部转动参数和总体转动参数之间的关系,即

$$\omega_1 = \omega_s + R_s \bar{\omega}_1 \quad (32)$$

$$\omega_2 = \omega_s + R_s \bar{\omega}_2 \quad (33)$$

因此,子结构内力和体力虚功率方程可以写成

$$\begin{aligned} \delta \bar{p}_e - \delta \bar{p}_g &= \delta \dot{\bar{u}}_1^T (\bar{f}_1 - \bar{F}_1 \bar{g}) + \delta \dot{\bar{\omega}}_1^T T_{\theta_1}^{-T} (\bar{m}_1 - \bar{\Phi}_1 \bar{g}) + \\ &\delta \dot{\bar{u}}_2^T (\bar{f}_2 - \bar{F}_2 \bar{g}) + \delta \dot{\bar{\omega}}_2^T T_{\theta_2}^{-T} (\bar{m}_2 - \bar{\Phi}_2 \bar{g}) - \\ &\delta \dot{\bar{u}}_1^T m g - \delta \dot{\bar{\omega}}_s^T m g_c \end{aligned} \quad (34)$$

其中, \bar{f}_1 , \bar{m}_1 , \bar{f}_2 和 \bar{m}_2 是单元坐标系下内虚功率对应的广义节点力. \bar{F}_1 , $\bar{\Phi}_1$, \bar{F}_2 和 $\bar{\Phi}_2$ 是单元坐标系下对应自由度的体力影响系数.

T_{θ_1} 和 T_{θ_2} 是转动矢量导数和角速度的转换矩阵,由于在单元坐标系下子结构端面的转动均是小转动^[14],所以可以将 T_{θ_1} 和 T_{θ_2} 写成

$$T_{\theta_1} \approx E + \frac{1}{2} \theta_1 \quad (35)$$

$$T_{\theta_2} \approx E + \frac{1}{2} \theta_2 \quad (36)$$

将式(10)代入式(32)和式(33)并综合式(6),可以得到总体参数变化率和局部参数变化率之间的关

系

$$\dot{\bar{u}} = T_\theta T_u \dot{u} \quad (37)$$

其中

$$\dot{\bar{u}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{u}}_1^T & \dot{\bar{\theta}}_1^T & \dot{\bar{u}}_2^T & \dot{\bar{\theta}}_2^T \end{bmatrix}^T \quad (38)$$

$$\dot{u} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1^T & \dot{\omega}_1^T & \dot{u}_2^T & \dot{\omega}_2^T \end{bmatrix}^T \quad (39)$$

$T_u =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ r_s^T D_u & R_s^T (E - D_\theta) & -R_s^T D_u & \mathbf{0} \\ -R_s^T (E + \tilde{r} D_u) & R_s^T \tilde{r} D_\theta & R_s^T (E + \tilde{r} D_u) & \mathbf{0} \\ R_s^T D_u & -R_s^T D_\theta & -R_s^T D_u & R_s^T \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$T_\theta = \begin{bmatrix} E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_{\theta_1}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & T_{\theta_2}^{-1} \end{bmatrix} \quad (41)$$

其中, $\tilde{r} = \tilde{r}_2 - \tilde{r}_1$.

记总体坐标系下子结构的广义内节点力为

$$F = \begin{bmatrix} F_1^T & M_1^T & F_2^T & M_2^T \end{bmatrix}^T \quad (42)$$

单元坐标系下子结构的广义内节点力为

$$f = \begin{bmatrix} f_1^T & m_1^T & f_2^T & m_2^T \end{bmatrix}^T \quad (43)$$

其中

$$f_1 = \bar{f}_1 - \bar{F}_1 R_s g \quad (44)$$

$$m_1 = \bar{m}_1 - \bar{\Phi}_1 R_s g \quad (45)$$

$$f_2 = \bar{f}_2 - \bar{F}_2 R_s g \quad (46)$$

$$m_2 = \bar{m}_2 - \bar{\Phi}_2 R_s g \quad (47)$$

将式(37)的分量形式代入式(34),子结构在总体坐标系下的等效内节点力可以写成

$$F = (T_\theta T_u)^T f - F_g \quad (48)$$

其中

$$F_g = \begin{bmatrix} f_{g1}^T & m_{g1}^T & f_{g2}^T & m_{g2}^T \end{bmatrix}^T \quad (49)$$

$$f_{g1} = m g - m D_u^T g_c, \quad m_{g1} = m D_\theta^T g_c \quad (50)$$

$$f_{g2} = m D_u^T g_c, \quad m_{g2} = \mathbf{0} \quad (51)$$

4 切线刚度阵

总体坐标系下的广义内节点力直接出现在子结构的节点力平衡方程中, 式 (48) 中的各项均是结构总体位移的非线性函数, 如果给出广义节点力的导数, 即切线刚度阵, 则结构的平衡方程会很容易求解. 对式 (48) 求导可得

$$\dot{F} = (T_\theta T_u)^T \dot{f} + (\dot{T}_u^T T_\theta^T + T_u^T \dot{T}_\theta^T) f - \dot{F}_g \quad (52)$$

其中

$$\dot{f} = (k_c T_\theta T_u - T_g) \dot{u} \quad (53)$$

$$T_g = \begin{bmatrix} -\bar{I}_1 r_s^T \tilde{g} D_u & \bar{I}_1 r_s^T \tilde{g} D_\theta & \bar{I}_1 R_s^T \tilde{g} D_u & \mathbf{0} \\ -\bar{\Phi}_1 r_s^T \tilde{g} D_u & \bar{\Phi}_1 r_s^T \tilde{g} D_\theta & \bar{\Phi}_1 R_s^T \tilde{g} D_u & \mathbf{0} \\ -\bar{I}_2 r_s^T \tilde{g} D_u & \bar{I}_2 r_s^T \tilde{g} D_\theta & \bar{I}_2 R_s^T \tilde{g} D_u & \mathbf{0} \\ -\bar{\Phi}_2 r_s^T \tilde{g} D_u & \bar{\Phi}_2 r_s^T \tilde{g} D_\theta & \bar{\Phi}_2 R_s^T \tilde{g} D_u & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (54)$$

对式 (52) 中的后 3 项, 需要详细分析. 首先, 第 1 项可以写成下面的形式

$$\dot{T}_u^T T_\theta^T f = \begin{pmatrix} \dot{D}_u^T \beta + (\tilde{\alpha} - D_u^T \tilde{\beta}^*) \omega_s - D_u^T \tilde{\alpha} (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) \\ -\dot{D}_\theta^T \beta + (D_\theta^T \tilde{\beta}^* - \tilde{\beta}_1) \omega_s + D_\theta^T \tilde{\alpha} (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) \\ -\dot{D}_u^T \beta - (\tilde{\alpha} - D_u^T \tilde{\beta}^*) \omega_s + D_u^T \tilde{\alpha} (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) \\ -\tilde{\beta}_2 \omega_s \end{pmatrix} \quad (55)$$

其中

$$\alpha = R_s f_2 \quad (56)$$

$$\beta_1 = R_s T_{\theta_1}^{-T} m_1 \quad (57)$$

$$\beta_2 = R_s T_{\theta_2}^{-T} m_2 \quad (58)$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) \alpha \quad (59)$$

$$\tilde{\beta}^* = \tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 + (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) \tilde{\alpha} \quad (60)$$

对式 (55) 中的 $\dot{D}_u^T \beta$ 和 $\dot{D}_\theta^T \beta$ 需要特别分析. 其可以写成下面的形式

$$\dot{D}_u^T \beta = \Psi_r (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) + \Psi_s \omega_s + \Psi_1 \omega_1 \quad (61)$$

$$\dot{D}_\theta^T \beta = \Omega_s \omega_s + \Omega_1 \omega_1 \quad (62)$$

其中

$$\Psi_r = \frac{(\mathbf{e}_2^T \beta \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3^T \beta \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_1^T}{(r_2 - r_1)^T (r_2 - r_1)} - \frac{\rho_1 \mathbf{e}_1^T \beta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^T}{\rho_3 (r_2 - r_1)^T (r_2 - r_1)} \quad (63)$$

$$\Psi_1 = \frac{\rho^T \rho}{\rho_3^2 \mathbf{e}_1^T (r_2 - r_1)} \mathbf{e}_1^T \beta \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T \quad (64)$$

$$\Psi_s = -\Psi_1 - \frac{\rho_1 (\mathbf{e}_1^T \beta \tilde{\mathbf{e}}_2 - \mathbf{e}_2 \beta^T \tilde{\mathbf{e}}_1)}{\rho_3 \mathbf{e}_1^T (r_2 - r_1)} + \frac{\mathbf{e}_2^T \beta \tilde{\mathbf{e}}_3 + \mathbf{e}_3 \beta^T \tilde{\mathbf{e}}_2 - \mathbf{e}_3^T \beta \tilde{\mathbf{e}}_2 - \mathbf{e}_2 \beta^T \tilde{\mathbf{e}}_3}{\mathbf{e}_1^T (r_2 - r_1)} \omega_s \quad (65)$$

$$\Omega_s = -\Omega_1 + \frac{\rho_1}{\rho_3} (\mathbf{e}_1^T \beta \tilde{\mathbf{e}}_3 + \mathbf{e}_3 \beta^T \tilde{\mathbf{e}}_1) - \mathbf{e}_1^T \beta \tilde{\mathbf{e}}_1 - \mathbf{e}_1 \beta^T \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad (66)$$

$$\Omega_1 = -\frac{\rho^T \rho}{\rho_3^2} (\mathbf{e}_1^T \beta) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2^T \quad (67)$$

记 $\dot{T}_u^T T_\theta^T f = \{\dot{F}_1^T \quad \dot{M}_1^T \quad \dot{F}_2^T \quad \dot{M}_2^T\}^T$, 则

$$\dot{F}_1 = \Lambda_f \omega_s + \Lambda_r (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) + \Psi_1 \omega_1 \quad (68)$$

$$\dot{F}_2 = -\dot{F}_1 \quad (69)$$

$$\dot{M}_1 = \Lambda_m \omega_s + (D_\theta^T \tilde{\alpha}) (\dot{r}_2 - \dot{r}_1) - \Omega_1 \omega_1 \quad (70)$$

$$\dot{M}_2 = -\tilde{\beta}_2 \omega_s \quad (71)$$

其中

$$\Lambda_f = \Psi_s + \tilde{\alpha} - D_u^T \tilde{\beta}^* \quad (72)$$

$$\Lambda_r = \Psi_r - D_u^T \tilde{\alpha} \quad (73)$$

$$\Lambda_m = D_\theta^T \tilde{\beta}^* - \tilde{\beta}_1 - \Omega_s \quad (74)$$

综合式 (55), (61), (62), (68)~(71) 并考虑到式 (10), 可以得到

$$\dot{T}_u^T T_\theta^T f = S_u \dot{u} \quad (75)$$

其中

$$S_u = \begin{bmatrix} -\Lambda_f D_u - \Lambda_r & \Psi_1 + \Lambda_f D_\theta & \Lambda_f D_u + \Lambda_r & \mathbf{0} \\ -\Lambda_m D_u - D_\theta^T \tilde{\alpha} & \Lambda_m D_\theta - \Omega_1 & \Lambda_m D_u + D_\theta^T \tilde{\alpha} & \mathbf{0} \\ \Lambda_f D_u + \Lambda_r & -\Psi_1 - \Lambda_f D_\theta & -\Lambda_f D_u - \Lambda_r & \mathbf{0} \\ \tilde{\beta}_2 D_u & -\tilde{\beta}_2 D_\theta & -\tilde{\beta}_2 D_u & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (76)$$

对式 (52) 中的最后一项, 由于

$$\dot{\theta}_1 = \bar{\omega}_1 - \frac{1}{2} \theta_1 \bar{\omega}_1 \quad (77)$$

$$\dot{\theta}_2 = \bar{\omega}_2 - \frac{1}{2} \theta_2 \bar{\omega}_2 \quad (78)$$

$$\dot{T}_{\theta_1}^{-T} m_1 = -\frac{1}{2} \tilde{m}_1 T_{\theta_1}^{-1} \bar{\omega}_1 \quad (79)$$

$$\dot{T}_{\theta_2}^{-T} m_2 = -\frac{1}{2} \tilde{m}_2 T_{\theta_2}^{-1} \bar{\omega}_2 \quad (80)$$

所以有

$$T_u^T \dot{T}_\theta^T f = T_u^T S_\theta T_u \dot{u} \quad (81)$$

其中

$$S_\theta = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{m}_1 T_{\theta_1}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{m}_2 T_{\theta_2}^{-1} \end{bmatrix} \quad (82)$$

式 (52) 中的第 3 项可以写成下面形式

$$\dot{F}_g = m \begin{bmatrix} -\dot{D}_u^T g_c + D_u^T (\tilde{g}_c - r_s \tilde{r}_c r_s^T \tilde{g}) \omega_s \\ \dot{D}_\theta^T g_c - D_\theta^T (\tilde{g}_c - r_s \tilde{r}_c r_s^T \tilde{g}) \omega_s \\ \dot{D}_u^T g_c - D_u^T (\tilde{g}_c - r_s \tilde{r}_c r_s^T \tilde{g}) \omega_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \quad (83)$$

记 $C_f = \tilde{g}_c - R_s \tilde{r}_c R_s^T \tilde{g}$, 则

$$\dot{F}_g = T_{gc} \dot{u} \quad (84)$$

其中

$$T_{gc} = \begin{bmatrix} \Psi_{uu} & -\Psi_{u\theta} & -\Psi_{uu} & \mathbf{0} \\ -\Omega_{\theta u} & \Omega_{\theta\theta} & \Omega_{\theta u} & \mathbf{0} \\ -\Psi_{uu} & \Psi_{u\theta} & \Psi_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (85)$$

其中

$$\Psi_{uu} = \Psi_r + \Psi_s D_u - D_u^T C_f D_u \quad (86)$$

$$\Psi_{u\theta} = \Psi_1 + \Psi_s D_\theta - D_u^T C_f D_\theta \quad (87)$$

$$\Omega_{\theta u} = \Omega_s D_u - D_\theta^T C_f D_u \quad (88)$$

$$\Omega_{\theta\theta} = \Omega_1 + \Omega_s D_\theta - D_\theta^T C_f D_\theta \quad (89)$$

将式 (53), (75), (81), (85) 代入式 (52) 可得

$$\dot{F} = [(T_\theta T_u)^T k_c T_\theta T_u - T_g + S_u + T_u^T S_\theta T_u - T_{gc}] \dot{u} \quad (90)$$

其中, 内节点力和体力的切线刚度阵即为

$$k_T = (T_\theta T_u)^T k_c T_\theta T_u - T_g + S_u + T_u^T S_\theta T_u - T_{gc} \quad (91)$$

5 刚体铰接节点参数转换关系

细长杆系结构按照以上的方法进行减缩后, 形成了一种形式上只有两个节点的广义梁单元, 这些

子结构的端面之间对接组装形成整个臂架结构. 履带式起重机的结构形式如图 3 所示, 主臂与履带车回转平台铰接, 主副臂之间铰接并通过撑杆和拉板进行约束. 整个臂架在吊重过程中通过主臂拉板和桅杆控制臂头的位置.

为了加强主臂铰支座的强度, 臂架底节端面通常由一段可以视为刚体的楔形块连接, 楔形块再与回转平台铰接, 如图 4 所示.

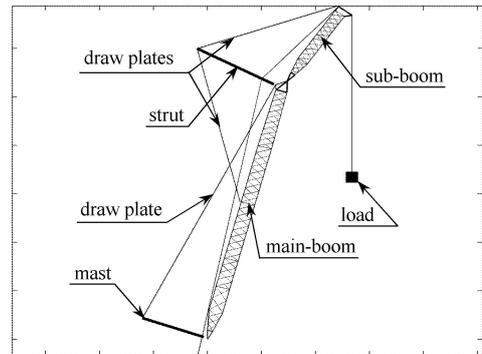


图 3 履带式起重机组成部件

Fig. 3 Component parts of crawler cranes

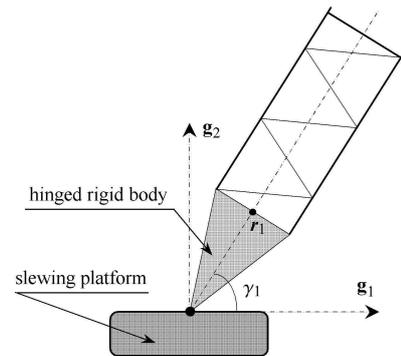


图 4 子结构与回转平台铰接

Fig. 4 Hinge-support of the substructure with a slewing platform

由于楔形加强块的刚度很大, 将其考虑成结构的一部分会使平衡方程呈现出病态. 通常的做法是: 定义刚体加强块与结构单元连接点 (面) 的独立自由度, 推导出非独立的结构节点自由度与独立自由度之间的关系, 得到关于独立自由度的节点力平衡方程.

定义臂架形心线绕自身转轴 e_r 的转角为 γ_1 , 臂架底节左端面与刚体加强块交接面的转角矢量为 θ_1 . 则交接面的形心矢径可以表示为

$$r_1 = R_{\gamma_1} \bar{r}_1 \quad (92)$$

其中, $\bar{\mathbf{r}}_1$ 为 $\gamma_1 = 0$ 时, 臂架底节左端面的形心矢径. 臂架底节左端面的转动矩阵 \mathbf{R}_{θ_1} 满足方程

$$\mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{R}_{10} = \mathbf{R}_{\gamma_1} \mathbf{S}_{10} \quad (93)$$

其中, \mathbf{R}_{10} 和 \mathbf{S}_{10} 分别为参考构型和 $\gamma_1 = 0$ 位置臂架底节左端面的方位矩阵. 对式 (92) 和式 (93) 求导可得

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{h}_1 \dot{\gamma}_1 \quad (94)$$

其中

$$\mathbf{h}_1 = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_r \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{e}_r \end{Bmatrix} \quad (95)$$

如果臂架底节左端面的广义节点力为 \mathbf{F}_1 , 则与独立参数 γ_1 相对应的广义力可以表示为

$$m_{\gamma_1} = \mathbf{h}_1^T \mathbf{F}_1 \quad (96)$$

其导数可以写成

$$\dot{m}_{\gamma_1} = \mathbf{h}_1^T \dot{\mathbf{F}}_1 + \mathbf{F}_1^T \mathbf{D}_1 \dot{\gamma}_1 \quad (97)$$

其中

$$\mathbf{D}_1 = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_r \tilde{\mathbf{e}}_r \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (98)$$

臂架底节左端面的广义节点力 \mathbf{F}_1 的导数可以写成

$$\dot{\mathbf{F}}_1 = \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{u}^*} \dot{\mathbf{u}}^* + \dot{\gamma}_1 \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{u}_1} \mathbf{h}_1 \quad (99)$$

其中, \mathbf{u}^* 表示除与刚体固结的结构自由度 \mathbf{u}_1 外其他自由度. 则与独立参数 γ_1 相应的广义力的导数可以表示为

$$\dot{m}_{\gamma_1} = \mathbf{h}_1^T \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{u}^*} \dot{\mathbf{u}}^* + \left(\mathbf{h}_1^T \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{u}_1} \mathbf{h}_1 + \mathbf{F}_1^T \mathbf{D}_1 \right) \dot{\gamma}_1 \quad (100)$$

如果两个臂架之间相互连接, 即履带式起重机对应的副臂工况. 同理, 主副臂之间也需要通过刚体加强块进行铰接, 如图 5 所示.

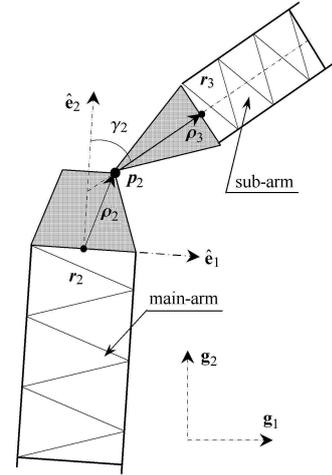


图 5 两个子结构之间的铰接

Fig. 5 Hinge-support of two substructures

铰接处下方的臂架称为主臂, 上方的臂架称为副臂. 则副臂相对于主臂的转动中心可以表示为

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{r}_2 + \boldsymbol{\rho}_2 \quad (101)$$

其中, $\boldsymbol{\rho}_2$ 为从主臂顶节右端面形心 \mathbf{r}_2 到副臂转动中心的矢径 (与主臂顶节右端面固结).

同理, 副臂底节左端面形心矢径可以表示为

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2 + \boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\rho}_3 \quad (102)$$

副臂底节左端面方位矩阵可以表示为

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_{\theta_3} \mathbf{R}_{30} = \mathbf{R}_{\gamma_2} \mathbf{R}_{\theta_2} \mathbf{R}_{20} \quad (103)$$

其中, \mathbf{R}_{θ_2} 和 \mathbf{R}_{θ_3} 分别为主臂顶节右端面以及副臂底节左端面相对于其参考构型的相对转动矩阵. 由此可得角速度之间的关系

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}_2 + \dot{\gamma}_2 \hat{\mathbf{e}}_r \quad (104)$$

其中, $\hat{\mathbf{e}}_r$ 为副臂相对主臂转动的转轴矢量. 对式 (102) 求导可得

$$\dot{\mathbf{r}}_3 = \dot{\mathbf{r}}_2 - (\dot{\boldsymbol{\rho}}_2 + \dot{\boldsymbol{\rho}}_3) \boldsymbol{\omega}_2 - \dot{\gamma}_2 \dot{\boldsymbol{\rho}}_3 \hat{\mathbf{e}}_r \quad (105)$$

则副臂底节左端面自由度和主臂顶节右端面自由度变化率的关系可以写成

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_3 \\ \boldsymbol{\omega}_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{h}_2 \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \end{Bmatrix} + \mathbf{h}_2 \dot{\gamma}_2 \quad (106)$$

其中

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & -(\tilde{\rho}_2 + \tilde{\rho}_3) \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (107)$$

$$\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} -\tilde{\rho}_3 \tilde{\mathbf{e}}_r \\ \tilde{\mathbf{e}}_r \end{bmatrix} \quad (108)$$

如果副臂底节左端面作用的广义节点力为 $\mathbf{F}_3 = [\mathbf{F}^T \ \mathbf{M}^T]^T$, 则附加于主臂顶节右端面上的节点力可以表示为

$$\Delta \mathbf{F}_2 = \mathbf{H}_2^T \mathbf{F}_3 \quad (109)$$

与主副臂相对转角 γ_2 相对应的广义广义力为

$$m_{\gamma_2} = \mathbf{h}_2^T \mathbf{F}_3 \quad (110)$$

主臂顶节右端面附加力的导数可以写成

$$\Delta \dot{\mathbf{F}}_2 = \mathbf{h}_2^T \dot{\mathbf{F}}_3 + \mathbf{D}_{F_3} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \dot{\omega}_2 \end{Bmatrix} + \dot{\gamma}_2 \mathbf{D}_{F_3} \quad (111)$$

则式 (111) 中的各项可以表示为

$$\mathbf{D}_{F_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\rho}_2 + \tilde{\rho}_3) \end{bmatrix} \quad (112)$$

$$\mathbf{D}_{F_3} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\rho}_3 \tilde{\mathbf{e}}_r \end{Bmatrix} \quad (113)$$

副臂相对于主臂的转角 γ_2 对应的广义力的导数可以写成

$$\dot{m}_{\gamma_2} = \mathbf{h}_2^T \dot{\mathbf{F}}_3 + \mathbf{F}_3^T \mathbf{D}_h \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \dot{\omega}_2 \end{Bmatrix} + \dot{\gamma}_2 \mathbf{F}_3^T \mathbf{d}_h \quad (114)$$

其中

$$\mathbf{D}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\rho}_3 \tilde{\mathbf{e}}_r - \tilde{\mathbf{e}}_r \tilde{\rho}_3 \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{e}}_r \end{bmatrix} \quad (115)$$

$$\mathbf{d}_h = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_r \tilde{\mathbf{e}}_r \rho_3 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (116)$$

综合以上, 主臂顶节右端面附加力的导数可以写成

$$\Delta \dot{\mathbf{F}}_2 = \mathbf{H}_2^T \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \mathbf{u}^\circ} \dot{\mathbf{u}}^\circ + \left(\mathbf{H}_2^T \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \mathbf{u}_3} \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_2^T \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \mathbf{u}_2} + \mathbf{D}_{F_3} \right) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \dot{\omega}_2 \end{Bmatrix} + \dot{\gamma}_1 \left(\mathbf{H}_2^T \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \mathbf{u}_1} \mathbf{h}_1 \right) + \dot{\gamma}_2 \left(\mathbf{H}_2^T \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \mathbf{u}_3} \mathbf{h}_2 + \mathbf{D}_{F_3} \right) \quad (117)$$

其中, \mathbf{u}° 表示除加强块连接端面自由度 \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 和 \mathbf{u}_3 外其他节点的自由度。

副臂相对主臂转角 γ_2 对应的广义力的导数为

$$\dot{m}_{\gamma_2} = \mathbf{h}_2^T \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \mathbf{u}^\circ} \dot{\mathbf{u}}^\circ + \left(\mathbf{h}_2^T \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \mathbf{u}_3} \mathbf{H}_2 + \mathbf{h}_2^T \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \mathbf{u}_2} + \mathbf{F}_3^T \mathbf{D}_h \right) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \dot{\omega}_2 \end{Bmatrix} + \dot{\gamma}_1 \left(\mathbf{h}_2^T \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \mathbf{u}_1} \mathbf{h}_1 \right) + \dot{\gamma}_2 \left(\mathbf{h}_2^T \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial \mathbf{u}_3} \mathbf{h}_2 + \mathbf{F}_3^T \mathbf{d}_h \right) \quad (118)$$

按照以上转化, 就可以得到关于独立自由度的臂架结构广义节点力平衡方程, 分析不同载荷下, 履带式起重机臂架的结构变形。

6 数值算例

算例 1 针对一个由空心圆管焊接而成的空间杆系结构, 分析其在左端固结并且右端形心处受到一个竖直向下集中力作用的情况下, 结构的变形, 并将结果与有限元软件 ANSYS 分析结果进行对比. 结构的弹性模量为 206 GPa, 泊松比为 0.3, 质量密度为 7800 kg/m³. 水平排列的弦杆的内外直径分别为 0.219 1 m 和 0.179 1 m; 交叉排列的腹杆的内外直径为 0.114 3 m 和 0.104 3 m. 整个杆系结构总长为 84 m, 右端形心处的集中力为 5×10⁴ kg, 重力加速度取 9.8 m/s².

为了加快收敛速度, 载荷被分成了 5 次施加到结构上, 表 1 列出了臂头端面形心在数值方向的位移值并与 ANSYS 进行了对比. 由表中数据可见, 本文方法得到的位移解与 ANSYS 差别很小, 证明了所提方法是正确有效的. 同时, 由于对子结构自由度进行了减缩, 本文方法对于该问题的求解只需要求解 42 个非线性方程, 而 ANSYS 需要求解 1368 个非线性方程, 说明本文方法效率更高.

图 6 是得到的结构随载荷变形的过程, 为显示清晰, 节点位移被放大了 5 倍.

表 1 杆系结构右端面形心点竖直位移

Table 1 Vertical displacements of right section center of member structure

Load/kg	This paper/m	ANSYS/m	Tolerance/%
1.0×10 ⁴	-3.0420	-3.0126	0.98
2.0×10 ⁴	-4.1733	-4.1512	0.53
3.0×10 ⁴	-5.3003	-5.2899	0.20
4.0×10 ⁴	-6.4218	-6.4286	-0.11
5.0×10 ⁴	-7.5366	-7.5673	-0.41

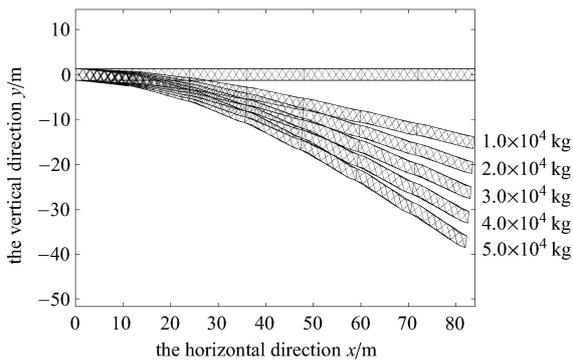


图 6 臂架结构的变形图

Fig.6 Deformed configurations the crane booms

算例 2 履带式起重机副臂工况：履带式起重机的臂架由细长杆系结构组成，其副臂工况即对应主副臂铰接的情况。针对这一结构，应用本文所提方法，计算不同吊重下，履带式起重机臂架结构的位移，并分析不同的载荷下，结构位移变化的特点。表 2 列出了某类型起重机的技术参数。其中， L_1 和 L_2 分别表示主副臂长度， γ_1 和 γ_2 分别表示主臂仰角和副臂相对于主臂的夹角。杆件和基本材料参数与算例 1 相同。

表 2 某类型起重机臂架参数

Table 2 Parameters of one type crane boom

L_1/m	L_2/m	$\gamma_1/(^\circ)$	$\gamma_2/(^\circ)$
84	24	75	20

履带式起重机在吊重的过程中，通过桅杆或超起桅杆变幅控制副臂臂头在水平方向的位移为零，竖直方向和侧向不加以控制，这样能够精确定位挂钩吊起重物。根据实际吊重过程中计算出的位移，选取臂架结构节点位移较大位置处的几个关键点分析。如图 7 所示，选取臂头和主臂中间距臂根 48 m 处的

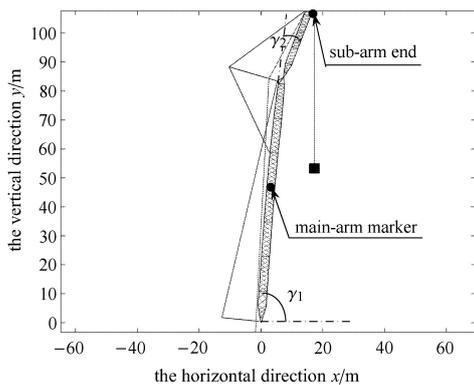


图 7 起重机臂架参考点

Fig.7 Reference points of the crane booms

位移作为比较。

图 8 给出了臂头位移相对于吊重的变化曲线。从图中曲线可以看出，当载荷较小时，臂头的竖直方向位移基本保持为线性；当载荷达到 200t 之后，位移曲线明显增幅加大，并且表现出明显的非线性。

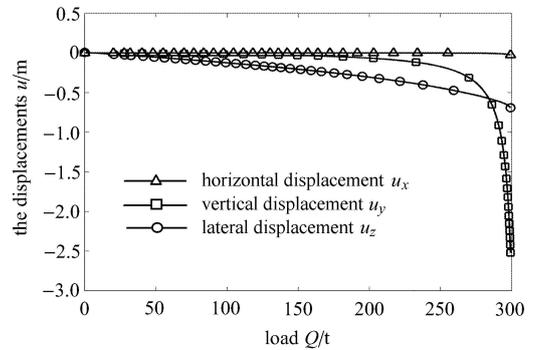


图 8 副臂臂头位移

Fig.8 Displacements of the sub-arm end

图 9 给出了主臂中部对应弯曲最明显处的臂节端面形心点的位移曲线。曲线的趋势与图 6 类似：当载荷达到 200t 之后，位移曲线明显表现出了非线性特点。

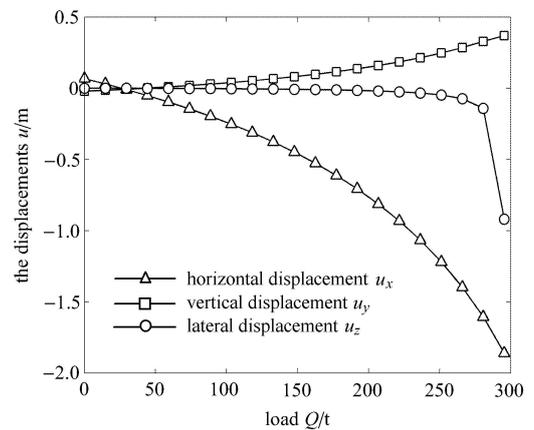
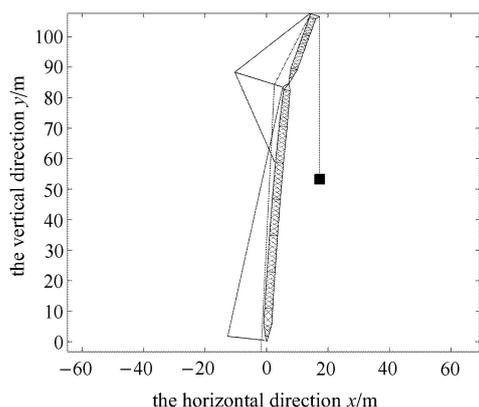


图 9 主臂参考点位移

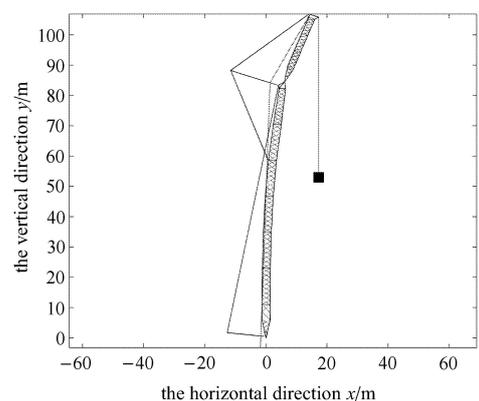
Fig.9 Displacements of the reference point on the main-arm

图 10 给出了几个典型吊重下结构的变形图，为了清晰地看出臂架的变形，位移被放大了 5 倍。从图中可以明显看出图 6 和图 7 所得出的结论：载荷小于 200t 时，臂架位移很小；但是增加到 300t 时，臂架的变形已经很明显了，呈现出非线性的特点。



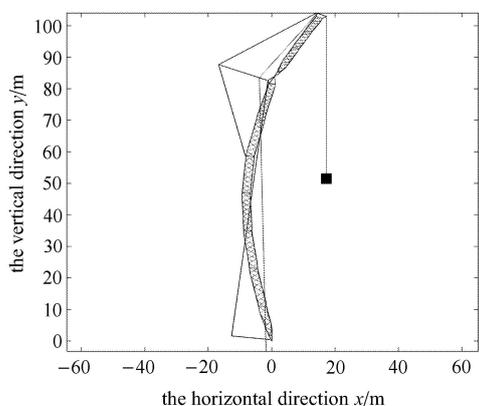
(a) 吊重 100 吨

(a) Load 100 t



(b) 吊重 200 吨

(b) Load 200 t



(c) 吊重 300 吨

(c) Load 300 t

图 10 不同吊重下起重机臂架的变形图

Fig. 10 Deformation figures of the crane booms under different load conditions

7 结 论

考虑到细长杆系结构大转动小应变的特点, 将其按长度方向划分为多个子结构, 并将自由度凝聚到端面节点上. 同时, 根据端面刚性截面的设计, 将每一个子结构简化成了形式上只有两个节点的广义梁单元. 这样的简化在保证精度的同时大大缩减了自由度, 也给非线性的节点力平衡方程及其切线刚度阵推导带来了方便. 结合工程实际, 考虑了两个细长杆系结构与刚体固结后相互铰接的情况, 推导了关于独立自由度的广义节点力及其导数, 得到了节点力平衡方程和切线刚度阵. 将上述推导应用到工程机械中的履带式起重机副臂工况, 分析了不同载荷下起重机臂架的结构位移, 为这类以杆系结构作为主体的起重机设计提供了参考.

参 考 文 献

- 1 Belytschko T, Liu WK, Moran B. 连续体和结构的非线性有限元. 庄茁译. 北京: 清华大学出版社, 2002 (Belytschko T, Liu WK, Moran B. *Nonlinear Finite Element for Continua and Structures*. Zhuang Zhuo tran. Beijing: Tsinghua University Press, 2002 (in Chinese))
- 2 吴庆雄, 陈宝春, 韦建刚. 三维杆系结构的几何非线性有限元分析. 工程力学, 2007, 12: 19-24 (Wu Qingxiong, Chen Baochun, Wei Jiangan. A geometric nonlinear finite element analysis for 3D framed structures. *Engineering Mechanics*, 2007, 12: 19-24 (in Chinese))
- 3 古雅琦, 王海龙, 杨怀宇. 一种大变形几何非线性 Euler-Bernoulli 梁单元. 工程力学, 2013, 6: 11-15 (Gu Yaqi, Wan Hailong, Yang Huaiyu. A large deformation geometric nonlinear Euler-Bernoulli beam element. *Engineering Mechanics*, 2013, 6: 11-15 (in Chinese))
- 4 Wempner G. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, 5 (2): 117-153
- 5 Belytschko T, Hsieh BJ. Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1973, 7 (3): 255-271
- 6 Crisfield MA, Moita GF. A unified co-rotational framework for solids, shells and beams. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, 33 (20-22): 2969-2992
- 7 Felippa CA, Haugen B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194: 2285-2235
- 8 周凌远, 李乔. 基于 UL 法的 CR 列式三维梁单元计算方法. 西南交通大学学报, 2006, 41(6): 690-695 (Zhou Lingyuan, Li Qiao. Updated Lagrangian Co-rotational formulation for geometrically nonlinear FE analysis of 3-D beam element. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2006, 41(6): 690-695 (in Chinese))
- 9 Li ZX. A co-rotational formulation for 3D beam element using vectorial rotational variables. *Computational Mechanics*, 2007, 39:

- 309-322
- 10 邓继华, 邵旭东, 邓潇潇. 四边形八节点共旋法平面单元的几何非线性分析. *工程力学*, 2011, 7: 6-12 (Deng Jihua, Shao Xudong, Deng Xiaoxiao. Geometrically nonlinear analysis using a quadrilateral 8-node co-rotational plane element. *Engineering Mechanics*, 2011, 7: 6-12 (in Chinese))
- 11 Li ZX. A stabilized co-rotational curved quadrilateral composite shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 86 (8): 975-999
- 12 杨劲松, 夏品奇. 薄壳大转动、小应变几何非线性分析共旋有限元法. *中国科学: 技术科学*, 2012, 11: 1295-1304 (Yang Jingsong, Xia Pingqi. Finite element corotational formulation for geometric nonlinear analysis of thin shells with large rotation and small strain. *Scientia Sinica Technologica*, 2012, 11: 1295-1304 (in Chinese))
- 13 李文雄, 马海涛, 陈太聪. 空间框架结构几何非线性分析方法的改进研究. *力学学报*, 2013, 45(6): 928-935 (Li Wenxiong, Ma Haitao, Chen Taichong. Improvements of geometrically nonlinear analysis algorithms for spatial frame structures. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, 45 (6): 928-935 (in Chinese))
- 14 Argyris JH. An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1982, 32(1-3): 85-155

(责任编辑: 刘希国)

SUBSTRUCTURE METHODS OF GEOMETRIC NONLINEAR ANALYSIS FOR MEMBER STRUCTURES WITH HINGED SUPPORTS ¹⁾

Wang Gang Qi Zhaohui²⁾ Wang Jing

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract Along the longitudinal direction, a slender truss structure is divided into several substructures. Due to that the nodal displacements are small in the embedded coordinate systems of substructures, the degrees of freedom of the internal nodes can be reduced to the ones of the interface nodes. Considering that the left and right ends of the substructure remain rigid sections during deformation, the interface nodal displacements would be reduced to the ones of the section central points. Each substructure would be reduced to be a generalized two-node beam element, in which the degree of freedom would be reduced sharply. Large displacement and rotation are important causes of the geometric nonlinearity of slender member structures. Based on the co-rotational method, an embedded coordinate system is defined, and the equilibrium equations of nodal forces for substructure elements and the tangential stiffness matrix are formulated. Taking into account of slender truss structures containing mutually hinged rigid bodies in the actual construction machinery, the convention of the nodal forces and their derivatives with respect to the independent and non-independent degrees of freedom are formulated. At last, numerical examples of sub-arm condition for crawler cranes are presented, in which the displacements of the boom structures under different load conditions are obtained. The numerical examples prove the validity of the presented method.

Key words slender truss structure, substructure reduction, rigid bodies hinged, geometric nonlinearity, co-rotational method, crawler cranes

Received 16 October 2013, revised 9 December 2013.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11372057).

2) Qi Zhaohui, professor, research interests: dynamics of multibody system, structural mechanics. E-mail: zhaohuiq@dlut.edu.cn