

# 基于合理子域的改进响应面方法<sup>1)</sup>

赵维涛<sup>\*,2)</sup> 邱志平<sup>†</sup>

<sup>\*</sup>(沈阳航空航天大学航空航天工程学部, 沈阳 110136)

<sup>†</sup>(北京航空航天大学固体力学研究所, 北京 100191)

**摘要** 基于结构可靠性分析理论, 给出了合理子域概念. 合理子域能够明确在设计点附近对失效概率起主要贡献区域尺寸, 且能够保证失效点以一定概率落在其内, 解决了对失效概率起主要贡献区域尺寸难以量化问题. 基于合理子域概念, 给出了一种改进响应面方法. 该方法能够保证响应函数在设计点处是无误差的、且在合理子域内对极限状态函数具有较好近似. 采取蒙特卡罗重要抽样方法求解失效概率, 结合抽样点位置采取分区域评估方法以提高失效概率求解精度. 算例表明, 所提方法在处理具有显式和隐式极限状态函数的可靠性分析时, 均具有较好的计算精度和较高的计算效率.

**关键词** 结构可靠性, 响应面, 合理子域, 失效概率

中图分类号: O213.2 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-13-339

## 引言

响应面方法是结构可靠性分析中常用方法, 该方法首先利用试验点处极限状态函数信息拟合响应函数, 然后用响应函数替代极限状态函数进行结构可靠性分析. 国内外学者曾对该方法作了大量的讨论. Bucher 和 Bourgund<sup>[1]</sup> 用一个不含交叉项的二次多项式作为响应函数, 但该方法只进行了两次可靠性指标的迭代, 在有些情况下可靠性指标和失效概率的计算精度不足. Rajashekhar 和 Ellinwood<sup>[2]</sup> 将 Bucher 的两次迭代变为多次迭代, 直到满足给定的可靠性指标收敛准则. Nguyen 等<sup>[3]</sup> 基于双加权回归技术提出了一种改进响应面方法, 在首次计算时采用线性多项式构建响应函数, 在后续迭代中采用不含交叉项的二次多项式构建响应函数. Kang 等<sup>[4]</sup> 利用移动最小二乘方法拟合响应函数, 并将最可能失效点增加到先前试验点集中去更新响应函数. Duprat 和 Sellier<sup>[5]</sup> 在完全二次多项式响应面方法的基础上, 将对设计点有利的试验点在后续迭代中进行再次利用. Allaix 和 Carbone<sup>[6]</sup> 讨论了试验点位置的选取方式, 首先根据各变量的敏感度信息对试验点进行旋转, 然后在旋转后的坐标系下构建响应函数. Richard 等<sup>[7]</sup> 提出了和 Allaix 类似的方法, 通过在设计点处的敏感度信息对试验点进行旋转, 以提高响应

函数在设计点附近的拟合精度. 国内学者对响应面方法也做了大量研究, 李洪双和吕震宙<sup>[8]</sup> 给出了结构可靠性分析的支持向量机响应面方法, 并改进了训练样本的选择方式. 吕震宙等<sup>[9]</sup> 提出了一种高精度响应面方法, 该方法能够在设计点附近更好地拟合真实极限状态函数, 失效概率评估精度较高. 程晔等<sup>[10]</sup> 在响应函数重构过程中, 采取不断缩减样本窗口的方法来提高响应函数在设计点附近的拟合精度, 进而提高可靠度分析的精度. 赵维涛和邱志平等<sup>[11]</sup> 利用试验点的移动技术, 将试验点移动到设计点附近, 以提高了响应函数在设计点附近的拟合精度, 并给出了兼顾极限状态函数在设计点附近变化趋势的改进响应面方法<sup>[12]</sup>.

由于设计点附近区域对失效概率贡献较大, 因此大多数响应面方法<sup>[1-12]</sup> 对设计点给予了足够的重视, 能够给出较为精确的设计点和可靠性指标. 然而在设计点附近对失效概率起主要贡献区域的尺寸具体有多大, 目前尚未明确, 即无法明确“响应函数应具有较好近似精度的范围”. 进而导致难以明确“试验点布置方案中偏离系数  $f$  的取值”. 在已有文献中偏离系数  $f$  的取值是根据大量算例分析结果和经验给出的, 取值 1, 2 和 3 均有报道<sup>[13]</sup>, 从而造成这些算法的适应性不佳. 正如 Guan 等<sup>[13]</sup> 的研究表明, 偏

2013-10-14 收到第 1 稿, 2013-12-30 收到修改稿.

1) 航空基金(2013ZA54004) 和国家自然科学基金(10872017) 资助项目.

2) 赵维涛, 副教授, 主要研究方向: 结构可靠性. E-mail: zhwt201@163.com

离系数  $f$  的取值会严重影响可靠性分析的精度。

针对这一问题, 本文在传统响应面方法的基础上, 提出了一种改进方法. 该方法能够明确设计点附近对失效概率起主要贡献区域的尺寸, 即能够明确“响应函数应具有较好近似精度的范围”以及“试验点布置方案中偏离系数  $f$  的取值”, 进而提高结构失效概率评估精度和算法适用性。

### 1 合理子域

本文将设计点附近对失效概率起主要贡献区域定义为合理子域, 利用设计点处累积分布函数推导合理子域尺寸, 合理子域能够保证真实失效点以一定概率落在其内。

#### 1.1 子域参数

在给定重要水平  $\varepsilon_p$  下, 子域参数  $\varepsilon_\beta$  由下式定义

$$\Phi[-\beta(1 + \varepsilon_\beta)] = \varepsilon_p \Phi(-\beta) \quad (1)$$

式中,  $\Phi(\cdot)$  为标准正态累积分布函数,  $\beta$  为可靠性指标。

式 (1) 两边分别对  $\beta$  求偏导数, 化简后得

$$\varepsilon_\beta = \sqrt{1 - \frac{2 \ln(\varepsilon_p / \varepsilon_\beta)}{\beta^2}} - 1 \quad (2)$$

子域参数随可靠性指标变化曲线见图 1. 从图 1 可以看出, 在给定  $\varepsilon_p$  下,  $\varepsilon_\beta$  随  $\beta$  增加而减小. 即可靠性指标越大, 在设计点附近对失效概率起主要贡献区域越小; 可靠性指标越小, 在设计点附近对失效概率起主要贡献区域越大. 这一点是符合失效点落在失效域内真实分布情况的. 另外, 从图 1 中还可以看出, 在给定  $\beta$  下,  $\varepsilon_\beta$  随  $\varepsilon_p$  增加而减小. 这说明  $\varepsilon_\beta$  与  $\varepsilon_p$  取值有关, 本文将结合算例讨论  $\varepsilon_p$  取值对失效概

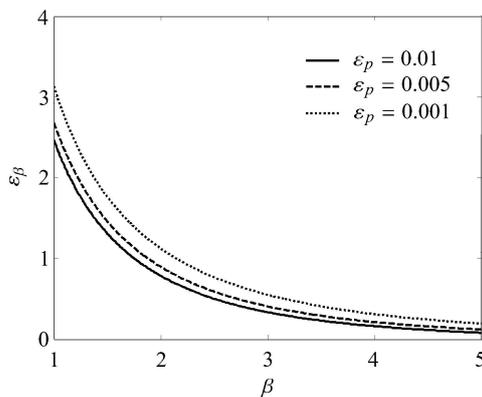


图 1 子域参数随可靠性指标的变化

Fig. 1 Subdomain parameter versus reliability index

率评估结果的影响。

在二维标准正态空间内, 子域参数  $\varepsilon_\beta$  的物理意义如图 2, 图中 LSF (limit state function) 表示极限状态函数,  $X_D$  表示设计点. 通过子域参数定义可知: 当可靠性指标增加到真实可靠性指标的  $(1 + \varepsilon_\beta)$  倍时, 结构失效概率  $\Phi[-\beta(1 + \varepsilon_\beta)]$  为真实失效概率  $\Phi(-\beta)$  的  $\varepsilon_p$  倍. 基于可靠性指标的几何解释可知: 在标准正态空间内, 真实失效点以概率 1 落在半径为  $\beta$  的超球面外侧、以概率  $\varepsilon_p$  落在半径为  $\beta(1 + \varepsilon_\beta)$  的超球面外侧. 即重要水平  $\varepsilon_p$  表示真实失效点以概率  $1 - \varepsilon_p$  落在半径分别为  $\beta(1 + \varepsilon_\beta)$  和  $\beta$  的两个超球面所夹的区域内. 综上, 在给定重要水平  $\varepsilon_p$  下, 子域参数  $\varepsilon_\beta$  能够反映设计点附近对失效概率起主要贡献区域的大小。

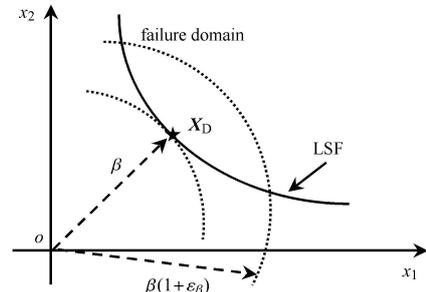


图 2 子域参数

Fig. 2 Subdomain parameter

#### 1.2 合理子域的确

由图 2 可知, 子域参数  $\varepsilon_\beta$  所标定范围 (即两个超球面所夹范围) 较大, 包含了距离设计点较远区域, 而距离设计点较远区域对失效概率贡献较小, 因此需要进一步对该范围进行调整. 这里引入两个参考点  $X_{R1}$  和  $X_{R2}$ , 具体如下

$$X_{R1} = X_D + \varepsilon_\beta \omega \times \sigma \quad (3)$$

$$X_{R2} = X_D - \varepsilon_\beta \omega \times \sigma \quad (4)$$

式中,  $\omega$  为坐标原点到设计点的单位矢量,  $\sigma$  为随机变量的标准差矢量。

以参考点  $X_{R1}$ ,  $X_{R2}$  和  $\omega$  分别构造两个超平面, 具体如下

$$(X - X_{R1})^T \omega = 0 \quad (5)$$

$$(X - X_{R2})^T \omega = 0 \quad (6)$$

以设计点为圆心，以半径  $R_D$  构造一个超球面，具体如下

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{Di})^2 - R_D^2 = 0 \quad (7)$$

式中， $n$  为随机变量总个数。

基于蒙特卡罗重要抽样方法，半径  $R_D$  的选取如下

$$R_D = \Phi^{-1}(P_m) \quad (8)$$

式中， $P_m$  为给定控制概率。

当  $P_m$  给定时，由式 (8) 所确定的  $R_D$  能够保证在应用蒙特卡罗重要抽样方法时，抽样点以概率  $P_m$  落在由式 (7) 所构造的超球面内。

由式 (5) 和式 (6) 所构造的两个超平面和由式 (7) 所构造的超球面所夹范围即为合理子域的范围。在二维标准正态空间内，合理子域如图 3。通过式 (5) 和式 (6) 构建过程可知：式 (5) 为半径为  $\beta(1 + \varepsilon_\beta)$  超球面的切平面，式 (6) 为半径为  $\beta(1 - \varepsilon_\beta)$  超球面的切平面。即在设计点附近，由式 (5) 和式 (6) 所标定的范围已经包含了由子域参数  $\varepsilon_\beta$  所标定的范围。另外，式 (7) 又对抽样点到设计点的距离加以控制。因此，本文给出的合理子域能够标定在设计点附近对失效概率起主要贡献区域的大小。

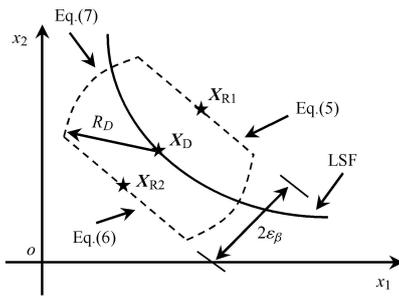


图 3 合理子域

Fig. 3 Reasonable subdomain

## 2 响应函数的构造

通过合理子域的概念可知，只要响应函数在合理子域范围内对真实极限状态函数具有较好近似，则可靠性分析精度是可以得到保障的。由于多项式响应函数具有较好的局部拟合特性，且在实际工程中应用广泛。因此，本文基于合理子域概念采用不含交叉项的二次多项式构建响应函数，至于其他形式的响应函数将另文讨论。另外，已有研究<sup>[6,14]</sup>表明“多项式阶次的选取应兼顾精度和效率两个方面”。考虑到精度方面，应采用阶次尽量高的多项式，但高阶

多项式效率较低，且精度的增长随阶次的增长呈下降趋势；考虑到效率方面，应采用阶次尽量低的多项式。基于以上原因，Allaix<sup>[6]</sup> 和 Gavin<sup>[14]</sup> 等建议，在一般情况下应尽量采用不含交叉项的二次多项式构建响应函数。

### 2.1 试验点的确定

(1) 选择  $n+1$  个试验点， $X_1 = \bar{X}$  和  $X_j = \bar{X} - f\sigma_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, n+1$ .  $\bar{X}$  为随机变量的均值矢量， $f$  为偏离系数，初始值通常取为 3， $\sigma_j = \{0, \dots, \sigma_{j-1}, \dots, 0\}^T$  为除第  $j-1$  个分量  $\sigma_{j-1}$  外其余分量均为 0 的  $n$  维矢量， $\sigma_{j-1}$  为第  $j-1$  个随机变量的标准差。

(2) 用步骤 1 中的  $n+1$  个试验点，拟合线性响应函数并求得设计点  $X_D^{(1)}$ 。

(3) 沿坐标原点到  $X_D^{(1)}$  的方向，将设计点  $X_D^{(1)}$  序列插值到极限状态曲面附近，序列插值公式如下

$$X_{k+1} = X_k + \frac{X_{k-1} - X_k}{g(X_k) - g(X_{k-1})} g(X_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

式中， $g(X_k)$  为极限状态函数在点  $X_k$  处的函数值。

当  $k = 1$  时， $X_0$  为均值点  $\bar{X}$ ， $X_1$  为设计点  $X_D^{(1)}$ ，序列插值收敛条件为

$$\left| \frac{g(X_k)}{g(\bar{X})} \right| \leq \varepsilon \quad (10)$$

式中， $\varepsilon$  为常数，本文取  $\varepsilon = 0.001$ 。将满足收敛条件的试验点记为  $X_D^{(2)}$ 。

(4) 选择  $2n + 1$  个试验点， $X_1 = X_D^{(2)}$ ， $X_j = X_D^{(2)} + f\sigma_j$  和  $X_{j+n} = X_D^{(2)} - f\sigma_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, n+1$ 。

为保证所布置的试验点能够考虑由子域参数  $\varepsilon_\beta$  确定的范围，文中将偏离系数  $f$  取为  $\varepsilon_\beta$ 。但此时由于可靠性指标  $\beta$  未知，无法利用式 (2) 求解  $\varepsilon_\beta$ 。因此本文利用“设计点  $X_D^{(2)}$  在标准正态空间内到坐标原点的距离”近似计算可靠性指标  $\beta$ ，进而获得子域参数  $\varepsilon_\beta$  的近似解。

利用这  $2n + 1$  个试验点构造不含交叉项的二次多项式响应函数，并求得设计点  $X_D^{(3)}$ ，响应函数  $\bar{g}(X)$  如下

$$\bar{g}(X) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 \quad (11)$$

式中， $a_0$ ， $a_i$  和  $b_i$  为待定系数。

(5) 利用从坐标原点到设计点  $X_D^{(3)}$  的单位矢量  $\eta$ ，作经过  $X_D^{(3)}$  的超平面，超平面方程如下

$$(X - X_D^{(3)})^T \eta = 0 \quad (12)$$

将该超平面与第  $i$  个坐标轴交点记为  $\mathbf{X}_i^c$ , 此处只需要记录交点坐标信息, 不计算极限状态函数值. 以设计点  $\mathbf{X}_D^{(3)}$  为中心, 沿超平面与各坐标轴交点方向布置  $n$  个试验点, 如下

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_D^{(3)} + R_D \boldsymbol{\gamma}_i \times \sigma, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

式中,  $R_D$  由式 (8) 确定,  $\boldsymbol{\gamma}_i$  为由  $\mathbf{X}_D^{(3)}$  到  $\mathbf{X}_i^c$  的单位矢量.

由式 (13) 可知, 此步骤所布置的试验点恰好落在合理子域边界附近, 能够确保响应函数在合理子域内兼顾极限状态函数的变化趋势, 进而提高响应函数在合理子域内的拟合精度.

## 2.2 响应函数的拟合

在均值点附近的试验点可能会过度偏离真实极限状态曲面, 从而影响响应函数的拟合精度. 因此, 本文采用 2.1 节中的步骤 4 和步骤 5 中的试验点和设计点  $\mathbf{X}_D^{(3)}$  拟合响应函数. 经过 2.1 节的分析可知, 此时共有  $3n + 2$  个试验点. 由于试验点的个数多于式 (11) 中的待定系数的个数, 在采用最小二乘方法拟合响应函数时会在各点产生一定误差. 而在可靠性分析过程中, 精确地找到设计点是必要的. 因此本文在响应函数拟合时, 要求响应函数在设计点处取值恰好等于试验值, 即

$$\bar{g}(\mathbf{X}_D) = g(\mathbf{X}_D) \quad (14)$$

将式 (14) 代入式 (11), 得

$$a_0 = g(\mathbf{X}_D) - \sum_{i=1}^n a_i x_{Di} - \sum_{i=1}^n b_i (x_{Di})^2 \quad (15)$$

将式 (15) 反代入式 (11), 得

$$\bar{g}(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X}_D) + \sum_{i=1}^n a_i (x_i - x_{Di}) + \sum_{i=1}^n b_i (x_i^2 - x_{Di}^2) \quad (16)$$

式中, 待定系数  $a_i$  和  $b_i$  可以利用其他试验点采用最小二乘方法求得.

当响应函数确定后, 采用一次二阶矩方法计算可靠性指标和新设计点. 用新设计点替换老设计点 (第一次为  $\mathbf{X}_D^{(3)}$ ), 重新拟合式 (16), 即响应函数的更新, 然后再次计算可靠性指标和新设计点. 重复以上过程, 直到同时满足以下两个收敛条件 [11-12].

(1) 设计点应精确地位于极限状态曲面上, 即满足

$$\left| \bar{g}(\mathbf{X}_D) / g(\bar{\mathbf{X}}) \right| < \varepsilon \quad (17)$$

(2) 两次迭代得到的可靠性指标相对变化很小, 即满足

$$\left| \frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{\beta_i} \right| < \varepsilon \quad (18)$$

式中,  $\varepsilon$  为常数, 本文取  $\varepsilon = 0.001$ .

## 2.3 效率和精度分析

结合响应函数构造过程可知, 本文方法所需试验点的总个数为  $4n + 4 + m_1 + m_2$ . 其中  $n$  为随机变量总个数,  $m_1$  对应求解  $\mathbf{X}_D^{(2)}$  所需序列插值的试验点个数,  $m_2$  对应响应函数更新次数 (每次更新只需增加一个试验点). 经典响应面方法 [2] 所需试验点总个数为  $m(2n + 1) + (m - 1) + 1$ , 其中  $m$  为迭代次数. 然而针对非线性程度较高的极限状态函数, 经典响应面方法往往需要多次迭代. 因此, 在相同收敛准则下, 本文方法的计算效率是高于经典响应面方法的.

本文方法是基于合理子域概念给出的, 合理子域能够标定在设计点附近对失效概率起主要贡献区域的大小, 即能够明确“响应函数应具有较好近似精度的范围”. 通过试验点布置方案可知, 本文所构建的响应函数能够保证在合理子域内对真实极限状态函数具有较好近似, 且能够保证在设计点处无误差. 因此, 本文方法的计算精度是可以得到保证的.

## 3 失效概率评估

当响应函数建立后, 利用一次二阶矩方法求解设计点  $\mathbf{X}_D$  以及单位矢量  $\boldsymbol{\omega}$ , 进而利用式 (5) ~ 式 (7) 确定合理子域范围. 当合理子域确定后, 首先利用蒙特卡罗重要抽样方法进行抽样, 然后根据抽样点的位置采取分区评估方法, 具体如下: 若抽样点落在合理子域内, 采用所构建的响应函数进行极限状态函数评估; 若抽样点落在合理子域外, 采用由设计点  $\mathbf{X}_D$  和单位矢量  $\boldsymbol{\omega}$  所构建的线性函数进行极限状态函数评估. 最后利用蒙特卡罗重要抽样方法评估结构的失效概率. 线性函数如下

$$\bar{g}(\mathbf{X}) = (\mathbf{X} - \mathbf{X}_D)^T \boldsymbol{\omega} \quad (19)$$

基于合理子域概念可知, 当抽样点落在合理子域外时, 抽样点对失效概率贡献很小. 因此这样处理所引入的失效概率评估误差从理论上讲应是很小的.

## 4 参数讨论

本文方法引入了两个重要参数, 即  $\varepsilon_p$  和  $P_m$ . 当参数  $\varepsilon_p$  趋于 0 时、参数  $\varepsilon_\beta$  将趋于正无穷大, 当参数

$P_m$  趋于 1 时、参数  $R_D$  将趋于正无穷大, 此时合理子域将趋于整个设计空间. 另一方面, 当参数  $\varepsilon_p$  趋于 1 时、参数  $\varepsilon_\beta$  将趋于 0, 当参数  $P_m$  趋于 0 时、参数  $R_D$  将趋于 0, 此时合理子域尺寸将趋于 0. 综上, 合理子域大小可通过参数  $\varepsilon_p$  和  $P_m$  进行控制. 本文将结合算例讨论参数  $\varepsilon_p$  和  $P_m$  不同取值对失效概率评估结果的影响, 并给出合理建议值.

### 5 算例

**算例 1** 非线性极限状态函数如下

$$g(\mathbf{X}) = 18.46154 - 7.476923 \times 10^{10} \frac{x_1}{x_2^3} \quad (20)$$

式中,  $x_1$  和  $x_2$  均为正态随机变量, 均值分别为 0.001 和 250, 标准差分别为 0.0002 和 37.5.

在标准正态空间内 (即  $U$  空间), 经典响应面方法 ( $f = 1.5$ ) 的结果如图 4. 经典响应面方法收敛准则与本文方法收敛准则相同, 即同时满足式 (17) 和式 (18). 由图 4 可知, 经典响应面方法可以很好地给出设计点, 然而响应函数在图形上部分严重偏离真实极限状态函数, 在应用蒙特卡罗方法求解失效概率时误差极大.

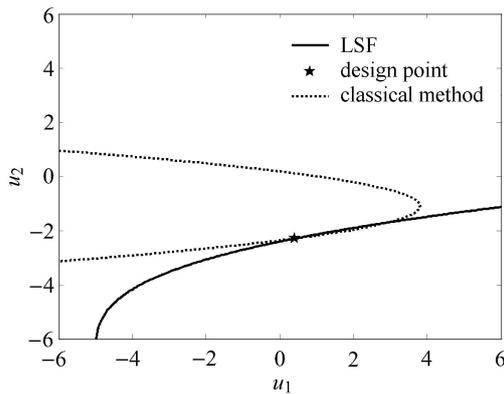


图 4 经典响应面方法

Fig. 4 Classical response surface method

在标准正态空间内, 本文方法 ( $\varepsilon_p = 0.001$ ,  $P_m = 0.99$ ) 的结果如图 5. 从图 5 可以看出, 本文方法所布置的试验点在对设计点重视的同时, 能够很好地落在合理子域边界上. 在合理子域范围内, 本文方法能够很好地近似真实极限状态函数. 但在合理子域外, 本文方法也存在偏离真实极限状态函数的情况. 这主要是由于二次多项式本身缺陷所引起的, 即用二次多项式去近似真实极限状态函数很难获得较好的全局拟合精度. 然而二次多项式的优点是具

有较好局部拟合精度, 本文充分利用了这一特点, 通过调整试验点布置方案提高响应函数在合理子域范围内的拟合精度, 并结合分区域评估方法确保可靠性求解精度. 这也是本文在引入合理子域后, 采用二次多项式构建响应函数的一个重要原因.

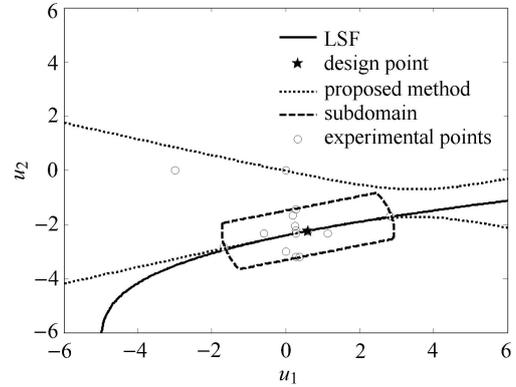


图 5 本文方法

Fig. 5 Proposed method

各种方法分析结果见表 1, 表中 NFE 表示试验点总个数. 从表 1 可以看出, 经典响应面方法所需试验点总个数为 48, 即迭代次数为  $m = 8$  次. 本文方法所需试验点总个数为 18, 其中  $m_1 = 4$ ,  $m_2 = 2$ . 本文方法相对经典响应面方法优势明显. 这里需要说明的是: 文献 [2] 应用经典响应面方法给出的失效概率比较接近蒙特卡罗方法给出的结果, 这主要是文献 [2] 将随机变量范围加以限定 (具体限定方法未知), 随机变量限定范围与本文给出的合理子域范围大致相同. 但针对具有多变量的极限状态函数, 由于缺乏直观图形表示和显式极限状态函数, 很难对变量范围加以限定. 而本文给出的合理子域能够很好地对变量范围加以限定, 即能够明确在设计点附近对失效概率起主要贡献区域的大小.

表 1 算例 1 的结果分析对比

Table 1 Comparison of analysis results of example 1

Method	NFE	$P_f$	Relative error/%
Ref.[2] (A-3)	24	$9.54 \times 10^{-3}$	-2.55
Ref.[6]	50	$9.75 \times 10^{-3}$	-0.41
Ref.[15]	69 300	$9.88 \times 10^{-3}$	1.33
classical method	48	$4.27 \times 10^{-1}$	4 261
proposed method	18	$9.71 \times 10^{-3}$	-0.82
MCS	$10^6$	$9.79 \times 10^{-3}$	—

当参数  $\varepsilon_p$  和  $P_m$  取不同值时, 本文方法计算结果见表 2. 从表 2 可以看出: (1) 当参数  $\varepsilon_p$  和  $P_m$  取值

在合理范围内时 (子域范围既不过大又不过小), 失效概率对参数  $\varepsilon_p$  和  $P_m$  的取值是不敏感的; (2) 当参数  $\varepsilon_p$  趋于 0,  $P_m$  趋于 1 时, 失效概率评估结果误差较大. 具体原因如下: 此时合理子域趋于整个设计空间, 失效概率评估结果退化为“在整个设计空间内, 直接采用响应函数进行评估的结果”. 由于二次多项式响应函数无法在整个设计空间内对极限状态函数具有较好近似, 从而导致失效概率求解误差较大. 这一点与应用经典响应面方法求解失效概率误差较大的原因是相同的; (3) 当参数  $\varepsilon_p$  趋于 1,  $P_m$  趋于 0 时, 失效概率评估结果精度较高. 具体原因如下: 此时合理子域尺寸趋于 0, 失效概率评估结果退化为“在整个设计空间内, 直接采用式 (19) 所建立的线性函数进行评估的结果”. 结合图 4 和图 5 可知, 极限状态函数在设计点附近较为平坦, 接近线性函数. 因此, 失效概率评估结果精度较高.

表 2 算例 1 的本文方法计算结果

Table 2 Results of the proposed method of example 1

$\varepsilon_p$	$P_m$	NFE	$P_f$	Relative error/%
0.001	0.99	18	$9.71 \times 10^{-3}$	-0.82
0.005	0.99	18	$9.81 \times 10^{-3}$	0.21
0.01	0.99	17	$9.77 \times 10^{-3}$	-0.21
0.005	0.995	18	$9.78 \times 10^{-3}$	-0.10
0.005	0.999	18	$9.80 \times 10^{-3}$	0.10
→ 0	→ 1	18	$1.25 \times 10^{-1}$	27.68
→ 1	→ 0	17	$9.80 \times 10^{-3}$	0.10

**算例 2** 三跨五层平面刚架结构如图 6 所示. 该例中共有 21 个随机变量, 3 个载荷  $P_1 \sim P_3$ , 8 个惯性矩  $I_1 \sim I_8$ , 8 个面积  $A_1 \sim A_8$  和 2 个弹性模量  $E_1$  和  $E_2$ . 梁单元属性列于表 3 中, 各随机变量的分布特性参数列于表 4 中. 这里假定一些随机变量是相关的, 具体如下:

- (1) 同一单元面积和惯性矩是相关的, 相关系数为  $\rho_{A_i, I_i} = 0.95$ ;
  - (2) 不同单元之间几何特性是相关的, 相关系数为  $\rho_{A_i, A_j} = \rho_{I_i, I_j} = \rho_{A_i, I_j} = 0.13$ ;
  - (3) 两个弹性模量是相关的, 相关系数为  $\rho_{E_1, E_2} = 0.9$ ;
  - (4) 所有剩余随机变量是不相关的.
- 结构极限状态函数定义为

$$G = 0.06 - \Delta(\mathbf{X}) \tag{21}$$

式中,  $\Delta$  为结构右上角的水平位移.

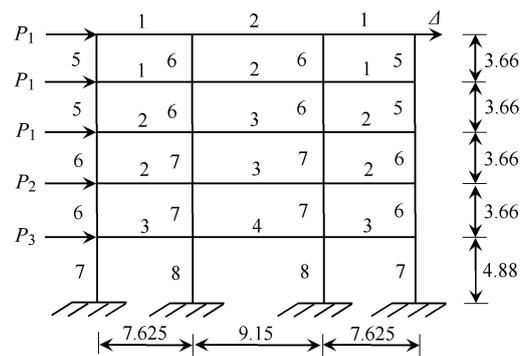


图 6 刚架结构 (单位:m)

Fig. 6 Frame structure (unit: m)

表 3 梁单元属性

Table 3 Beam element properties

Element	Modulus of elasticity	Moment of inertia	Cross section
1	$E_1$	$I_5$	$A_5$
2	$E_1$	$I_6$	$A_6$
3	$E_1$	$I_7$	$A_7$
4	$E_1$	$I_8$	$A_8$
5	$E_2$	$I_1$	$A_1$
6	$E_2$	$I_2$	$A_2$
7	$E_2$	$I_3$	$A_3$
8	$E_2$	$I_4$	$A_4$

表 4 随机变量的统计参数和分布类型

Table 4 Statistical parameters and distributions of the random variables

Variable	Distribution	Mean value	Standard deviation
$P_1/\text{kN}$	lognormal	133.454	40.04
$P_2/\text{kN}$	lognormal	88.97	35.59
$P_3/\text{kN}$	lognormal	71.175	28.47
$E_1/\text{kPa}$	normal	$2.173 \times 10^7$	$1.915 \times 10^6$
$E_2/\text{kPa}$	normal	$2.379 \times 10^7$	$1.915 \times 10^6$
$I_1/\text{m}^4$	normal	$8.134 \times 10^{-3}$	$1.083 \times 10^{-3}$
$I_2/\text{m}^4$	normal	$1.150 \times 10^{-2}$	$1.298 \times 10^{-3}$
$I_3/\text{m}^4$	normal	$2.137 \times 10^{-2}$	$2.596 \times 10^{-3}$
$I_4/\text{m}^4$	normal	$2.596 \times 10^{-2}$	$3.028 \times 10^{-3}$
$I_5/\text{m}^4$	normal	$1.081 \times 10^{-2}$	$2.596 \times 10^{-3}$
$I_6/\text{m}^4$	normal	$1.410 \times 10^{-2}$	$3.461 \times 10^{-3}$
$I_7/\text{m}^4$	normal	$2.327 \times 10^{-2}$	$5.624 \times 10^{-3}$
$I_8/\text{m}^4$	normal	$2.596 \times 10^{-2}$	$6.490 \times 10^{-3}$
$A_1/\text{m}^2$	normal	$3.125 \times 10^{-1}$	$5.581 \times 10^{-2}$
$A_2/\text{m}^2$	normal	$3.721 \times 10^{-1}$	$7.442 \times 10^{-2}$
$A_3/\text{m}^2$	normal	$5.060 \times 10^{-1}$	$9.302 \times 10^{-2}$
$A_4/\text{m}^2$	normal	$5.581 \times 10^{-1}$	$1.116 \times 10^{-1}$
$A_5/\text{m}^2$	normal	$2.530 \times 10^{-1}$	$9.302 \times 10^{-2}$
$A_6/\text{m}^2$	normal	$2.911 \times 10^{-1}$	$1.023 \times 10^{-1}$
$A_7/\text{m}^2$	normal	$3.730 \times 10^{-1}$	$1.209 \times 10^{-1}$
$A_8/\text{m}^2$	normal	$4.186 \times 10^{-1}$	$1.953 \times 10^{-1}$

数值分析结果见表 5。从表 5 可以看出, 经典响应面方法所需试验点总个数为 264, 即迭代次数为  $m = 6$  次。本文方法 ( $\varepsilon_p = 0.001$ ,  $P_m = 0.99$ ) 所需试验点总个数为 95, 其中  $m_1 = 4$ ,  $m_2 = 3$ 。本文方法相对经典响应面方法优势明显。另外, 本文方法求得的失效概率比较接近蒙特卡罗方法所给出的结果。这说明本文方法在处理具有大量相关非正态随机变量的可靠性分析问题是有效的。

表 5 算例 2 的结果分析对比

Table 5 Comparison of analysis results of example 2

Method	NFE	$P_f/10^{-4}$	Relative error/%
Full PCE <sup>[16]</sup>	3724	1.59	-29.01
sparse PCE <sup>[16]</sup>	450	1.53	-31.70
Ref.[17]	149	1.42	-36.61
classical method	264	1.88	-16.07
proposed method	95	2.15	-4.02
MCS <sup>[16-17]</sup>	$5.0 \times 10^5$	2.24	—

当参数  $\varepsilon_p$  和  $P_m$  取不同值时, 本文方法计算结果见表 6。从表 6 可以看出: (1) 当参数  $\varepsilon_p$  和  $P_m$  取值在合理范围内时, 文中方法求得的失效概率对参数  $\varepsilon_p$  和  $P_m$  的取值是不敏感的; (2) 当参数  $\varepsilon_p \rightarrow 0$ ,  $P_m \rightarrow 1$  时, 失效概率评估结果的误差略大, 具体原因同算例 1; (3) 当参数  $\varepsilon_p \rightarrow 1$ ,  $P_m \rightarrow 0$  时, 失效概率评估结果的误差较大。具体原因如下: 针对非线性程度较高的极限状态函数, 在整个设计空间内直接采用式 (19) 所建立的线性函数进行失效概率评估, 所引起的误差必然较大。

表 6 算例 2 中本文方法计算结果

Table 6 Results of the proposed method of example 2

$\varepsilon_p$	$P_m$	NFE	$P_f/10^{-4}$	Relative error/%
0.001	0.99	95	2.15	-4.02
0.005	0.99	95	2.16	-3.57
0.01	0.99	95	2.14	-4.46
0.005	0.995	95	2.19	-2.23
0.005	0.999	95	2.18	-2.68
$\rightarrow 0$	$\rightarrow 1$	97	1.90	-15.18
$\rightarrow 1$	$\rightarrow 0$	95	6.39	185.27

## 6 结论

(1) 基于可靠性分析理论, 本文提出了合理子域概念, 能够明确“响应函数应具有较好近似精度的范围”以及“试验点布置方案中偏离系数  $f$  的取值”, 为响应面方法成功应用实际奠定了理论基础, 即“只

要响应函数在合理子域内对真实极限状态函数具有较好近似, 则可靠性分析精度是可以得到保障的”。

(2) 基于合理子域的物理意义, 本文采用不含交叉项的二次多项式构建响应函数, 提高算法计算效率; 采取分区域评估方法, 确保失效概率评估精度。算例分析结果表明, 对于显式和隐式极限状态函数, 本文方法均具有满意的精度和效率。

(3) 参数  $\varepsilon_p$  和  $P_m$  的取值原则为“既要保证真实失效点以较大概率落在合理子域内, 又要避免合理子域尺寸过大或过小”。结合算例分析结果, 本文建议参数  $\varepsilon_p$  和  $P_m$  的合理取值范围分别为 0.001~0.01 和 0.99~0.999。

(4) 本文采用一次二阶矩方法求解设计点, 但对于具有多设计点情况下的可靠性分析问题, 一次二阶矩方法是无能为力的。因此, 本文方法是不适用于具有多设计点情况下的可靠性分析问题。

## 参 考 文 献

- 1 Bucher CG, Bourgund U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. *Structural Safety*, 1990, 7(1): 57-66
- 2 Rajashekhar MR, Ellingwood BR. A new look at the response surface approach for reliability analysis. *Structural Safety*, 1993, 12(3): 205-220
- 3 Nguyen XS, Sellier A, Duprat F, et al. Adaptive response surface method based on a double weighted regression technique. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009, 24(2): 135-143
- 4 Kang SC, Koh HM, Choo JF. An efficient response surface method using moving least squares approximation for structural reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2010, 25(4): 365-371
- 5 Duprat F, Sellier A. Probabilistic approach to corrosion risk due to carbonation via an adaptive response surface method. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2006, 21(3): 207-216
- 6 Allaix DL, Carbone VI. An improvement of the response surface method. *Structural Safety*, 2011, 33(2): 165-172
- 7 Richard B, Cremona C, Adelaide L. A response surface method based on support vector machines trained with an adaptive experimental design. *Structural Safety*, 2012, 39(1): 14-21
- 8 李洪双, 吕震宙. 结构可靠性分析的支持向量机的响应面法. 计算力学学报, 2009, 26(2):199-203 (Li Hongshuang, Lü Zhenzhou. A support vector machine response surface method for structural reliability analysis. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, 26(2): 199-203 (in Chinese))
- 9 吕震宙, 赵洁, 岳珠峰. 机械结构可靠性分析的高精度响应面法. 应用数学和力学, 2007, 1(28): 17-24 (Lü Zhenzhou, Zhao Jie, Yue Zhufeng. Advanced response surface method for mechanical reliability analysis. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, 1(28): 17-24 (in Chinese))
- 10 程晔, 周翠英, 黄林冲等. 基于缩减样本窗口的响应面重构方法.

- 计算力学学报, 2011, 28(5): 699-704 (Cheng Ye, Zhou Cuiying, Huang Linchong et al. Sequential response surface reconstructing method based on reducing sampling windows. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011, 28(5): 699-704 (in Chinese))
- 11 Weitao Z, Zhiping Q. An efficient response surface method and its application to structural reliability and reliability-based optimization. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2013, 67: 34-42
- 12 Weitao Z, Zhiping Q, Yi Y. An efficient response surface method considering the nonlinear trend of the actual limit state. *Structural Engineering and Mechanics*, 2013, 47(1): 45-58
- 13 Guan XL, Melchers RE. Effect of response surface parameter variation on structural reliability estimates. *Structural Safety*, 2001, 23: 429-444
- 14 Gavin HP, Yau CS. High-order limit state functions in the response surface method for structural reliability analysis. *Structural Safety*, 2008, 30: 162-179
- 15 Elegbede C. Structural reliability assessment based on particles swarm optimization. *Structural Safety*, 2005, 27(2): 171-186
- 16 Blatmana G, Sudret B. An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2010, 25(2): 183-197
- 17 Roussouly N, Petitjean F, Salaun M. A new adaptive response surface method for reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2013, 32: 103-105

(责任编辑: 刘希国)

## AN IMPROVED RESPONSE SURFACE METHOD BASED ON THE REASONABLE SUBDOMAIN<sup>1)</sup>

Zhao Weitao<sup>\*,2)</sup> Qiu Zhiping<sup>†</sup>

<sup>\*</sup>(Faculty of Aerospace Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

<sup>†</sup>(Institute of Solid Mechanics, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract** The concept of reasonable subdomain is defined based on the theory of structural reliability in the paper. The size of domain around the design point which gives the main contribution to the failure probability is well-defined by using the reasonable subdomain. The failure points can be distributed in the reasonable subdomain in terms of a given probability. The proposed reasonable subdomain can solve the problem that the size of main domain influencing failure probability is not given obviously. Then, an improved response surface method is also proposed based on the reasonable subdomain. The proposed method can ensure that there is no fitting error of the response function at the design point, and can better fit the limit state function in the reasonable subdomain. The failure probability is evaluated by using the importance sampling Monte Carlo simulation. In order to improve the evaluation accuracy of failure probability, the evaluation method of subdomain is applied according to the locations of sample points. Numerical examples are shown that the proposed method has high accuracy and efficiency for both explicit and implicit limit states.

**Key words** structural reliability, response surface method, reasonable subdomain, failure probability

Received 14 October 2013, revised 30 December 2013.

1) The project was supported by the Aviation Foundation of China (2013ZA54004) and the National Natural Science Foundation of China (10872017).

2) Zhao Weitao, associate professor, research interests: structural reliability. E-mail: zhwt201@163.com